УДК 531.36.

Б. Атажанов, канд. физ.-мат. наук
Национальный университет Узбекистана
(Узбекистан, 100095, Ташкент, ВУЗ городок, ул. Университетская, 1,
тел.: (8-371) 396-49-30, E-mail: atajanov_b@rambler.ru)

Об устойчивости установившихся движений неголономных систем с однородными связями

(Статью представил чл.-кор. НАН Украины А. А. Мартынюк)

Рассмотрена в общей постановке задача устойчивости установившихся движений неголономных систем с однородными связями относительно различных определений циклических координат.

Розглянуто у загальній постановці задачу стійкості встановлених рухів неголономних систем з однорідними зв'язками відносно різних визначень циклічних координат.

Ключевые слова: неголономная система, установившиеся движения, устойчивость и стабилизация, циклическая координата.

В настоящее время наблюдается существенное расширение класса задач неголономных систем, связанных с прикладными проблемами. Как известно, такие системы встречаются при изучении относительного движения в равномерно вращающейся системе, в динамике мобильных роботов, в задачах путевой устойчивости колесных экипажей, динамических гасителей колебаний и других.

Рассмотрим в общей постановке задачу устойчивости установившихся движений неголономных систем с однородными связями относительно различных определений циклических координат. Предположим, что кинетическая и потенциальная энергия системы и коэффициенты уравнений неголономных связей явно не зависят от времени t. Кинетическая энергия системы содержит квадратичные, линейные относительно обобщенных скоростей и не содержащие обобщенных скоростей члены, уравнения неголономной связи однородны относительно обобщенных скоростей. На систему, кроме потенциальных сил, могут действовать произвольные обобщенные силы. Уравнения связей общего вида могут содержать циклические скорости.

Установлены основные отличия рассматриваемой задачи от достаточно полно изученной задачи устойчивости установившихся движений склерономных неголономных систем [1—11]. Известно, что установившиеся движения таких систем расположены на многообразиях, размерности которых в положении равновесия не меньше числа неголономных связей общего вида, а для установившихся движений (в некоторых случаях) не меньше суммы числа связей общего вида и числа циклических координат [4]. Однако в общем случае размерность многообразия установившихся движений может быть различной [3]. Вследствие этого число нулевых корней характеристического уравнения системы первого приближения в соответствующих задачах устойчивости не меньше размерности многообразия, и задачи об устойчивости исследуемого движения не всегда могут быть решены с помощью теоремы Ляпунова – Малкина об устойчивости в особенном случае наличия нескольких нулевых корней [12, 13].

Постановка задачи. ***Уравнения движения.*** Пусть положение неголономной системы определяется обобщенными координатами $q_1, q_2, ..., q_n$. Неголономные связи, наложенные на систему, имеют вид

$$\dot{q}_\mu = B_{\mu\rho}(q)\,\dot{q}_\rho, \tag{1}$$

а геометрические связи — нестационарные. Тогда кинетическая энергия системы без учета связей (1) имеет вид

$$T^* = \frac{1}{2} A_{\gamma\nu}(q)\,\dot{q}_\gamma \dot{q}_\nu + A_\gamma(q)\,\dot{q}_\gamma + A_0(q)\,.$$

Выразив ее через независимые скорости, запишем

$$T = T_2 + T_1 + T_0 = \frac{1}{2} a_{sp}\dot{q}_s\dot{q}_\rho + a_s\dot{q}_s + a_0, \tag{2}$$

$$a_{s\rho} = A_{s\rho} + A_{\mu s} + B_{\mu\rho} + A_{\mu\tau}B_{\mu\rho}B_{\mu s},\; a_s = A_s + A_\mu B_{\mu s},\; T_0 = A_0 = \alpha_0.$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам проводится суммирование, индексы принимают следующие значения:

$$\aleph = 1, 2, ..., m-l;\;\; \eta = m-l+1, m-l+2, ..., m\,;\;\; \mu, \tau = 1, 2, ..., m\,,$$

$$\alpha, \beta = m+1, m+2, ..., m+k_1\;;\;\; \delta = m+k_1+1, m+k_1+2, ..., m+k,$$

$$s, \rho = m+1, m+2, ..., n\;;\;\; r, i, j = m+k+1, m+k+2, ..., n,\;\; \gamma, \nu = 1, 2, ..., n\,.$$

Предложим, что коэффициенты кинетической энергии (2), уравнений неголономных связей (1), потенциальная энергия $\Pi(q)$ и обобщенные силы $Q_\nu(q, \dot{q})$ являются аналитическими функциями в некоторой открытой области фазового пространства и явно не зависят от времени *t*, причем T_2 определенно положительная функция относительно скоростей.

Для составления уравнений движения системы введем векторы и матрицы [6]:

$$q' = (q_1, q_2, ..., q_n), \aleph' = (q_1, q_2, ..., q_{m-1}), \eta' = (q_{m-l+1}, q_{m-l+2}, ..., q_m),$$

$$\alpha' = (q_{m+1}, q_{m+2}, ..., q_{m+k_1}), \delta' = (q_{m+k_1+1}, q_{m+k_1+2}, ..., q_{m+k}),$$

$$r' = (q_{m+k+1}, q_{m+k+2}, ..., q_n),$$

$$\mu' = (\aleph', \eta'), \varepsilon' = (\alpha', \delta'), \rho' = (\alpha', \delta', r'), \omega' = (\delta', r'),$$

$$\widetilde{Q} = Q(q, r_1, \delta_1, p), Q_1 = Q_i + B_{\eta 1} Q_\eta,$$

$$Q_2 = Q_\delta + B_{\eta 2} Q_\eta, \; Q_3 = Q_\alpha + B_{\eta 3} Q_\eta,$$

$$\|a_{s\rho}\| = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{i\delta} & a_{i\alpha} \\ a_{\delta i} & a_{\delta\delta} & a_{\delta\alpha} \\ a_{\alpha i} & a_{\alpha\delta} & a_{\alpha\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$a'_s = \|a'_i, a'_\delta, a'_\alpha\|, \; a_1 = \|a_i\|, \; a_2 = \|a_\delta\|, \; a_3 = \|a_\alpha\|.$$

Здесь штрих означает транспонирование. Разбиение вектора ρ на α, δ и r определяется не только характером зависимости потенциальной энергии, обобщенных сил, матриц коэффициентов кинетической энергии и уравнений связей [6] от этих переменных, а и характером изучаемой задачи устойчивости установившихся движений [1, 5].

Введя импульсы по переменным α, составим функцию Рауса:

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = a_{31}\dot{r} + a_{32}\dot{\delta} + a_{33}\dot{\alpha} + a_3,$$

$$R = T - \Pi - p'\dot{\alpha} = R_2 + R_1 + R_0,$$

$$R_2 = \frac{1}{2}\dot{r}' a^*_{11}\dot{r} + \dot{r}' a^*_{12}\dot{\delta} + \frac{1}{2}\dot{\delta}' a^*_{22}\dot{\delta},$$

$$R_1 = A_1\dot{r} + A_2\dot{\delta}, \; R_0 = T'_0 - \Pi - \frac{1}{2}(p' - a'_3)\, b\, (p - a_3),$$

$$A_\xi = a^*_\xi + \gamma_{3\xi} p = a_{i_1} + \gamma_{3\xi}(p - a_3),$$

$$a^*_{\xi\zeta} = a_{\xi\zeta} - \gamma_{3\xi} a_{3\zeta}, \; a^*_\xi = a_\xi - \gamma_{3\xi} a_3,$$

$$b' = \|a_{33}\|^{-1}, \gamma_{3\xi} = b a_{3\xi} \; (\xi, \zeta = 1, 2),$$

$$\dot{\alpha} = b(p - a_3) - \gamma_{31}\dot{r} - \gamma_{32}\dot{\delta}. \tag{3}$$

Тогда уравнения движения системы в форме уравнений Воронца в переменных Рауса [3, 6, 7, 14] будут иметь вид

$$\dot{q}_\alpha = -\frac{\partial R}{\partial p_\alpha},$$

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} + B_{\mu\alpha}\frac{\partial R}{\partial q_\mu} + \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\mu}\right)(\Omega_{\mu\alpha\rho}\dot{q}_\rho) + Q_\alpha + B_{\mu\alpha}Q_\mu,$$

$$\frac{d\partial R}{dt\partial \dot{q}_\delta} - \frac{\partial R}{\partial q_\delta} - B_{\mu\delta}\frac{\partial R}{\partial q_\mu} = \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\mu}\right)(\Omega_{\mu\delta\rho}\dot{q}_\rho) + Q_\delta + B_{\mu\delta}Q_\mu, \qquad (4)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} - B_{\mu i}\frac{\partial R}{\partial q_\mu} = \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\mu}\right)(\Omega_{\mu i\rho}\dot{q}_\rho) + Q_i + B_{\mu i}Q_\mu,$$

$$\Omega_{\mu s\rho} = \frac{\partial B_{\mu s}}{\partial q_\rho} - \frac{\partial B_{\mu\rho}}{\partial q_s} + B_{\tau\rho}\frac{\partial B_{\mu s}}{\partial q_\tau} - B_{\tau s}\frac{\partial B_{\mu\rho}}{\partial q_\tau},$$

$$\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\mu}\right) = (A_{\mu\rho} + A_{\mu\tau}B_{\tau\rho})\dot{q}_\rho + A_\mu = \theta_{\mu\rho}\dot{q}_\rho + \theta_\mu.$$

Допустим, что первые $m-l$ связей являются связями типа Чаплыгина, т. е.

$$\frac{\partial(T^* - \Pi)}{\partial q_\aleph} = 0, \quad \frac{\partial B_{\mu\rho}}{\partial q_\aleph} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial q_\aleph} = 0.$$

Тогда явный вид уравнения связей общего вида и уравнения движения системы в векторно-матричной форме будет следующий:

$$\dot{\eta} = (B_{\eta 1} - B_{\eta 3}\gamma_{31})\dot{r} + (B_{\eta 2} - B_{\eta 3}\gamma_{32})\dot{\delta} + B_{\eta 3}b(p - a_3), \qquad (5)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \gamma_{31} \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \gamma_{32} \\ 0 & 0 & E_{k_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{\delta}_1 \\ \dot{p} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} A_{11}r_1 & A_{11}^1\delta_1 & A_{12}\delta_1 & A_{13}(p-a_3) \\ A_{21}r_1 & A_{21}^2\delta_1 & A_{22}\delta_1 & A_{23}(p-a_3) \\ A_{31}r_1 & A_{31}^2\delta_1 & A_{32}\delta_1 & A_{33}(p-a_3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_1 \\ \delta_1 \\ p-a_3 \end{pmatrix} -$$

$$-\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \\ M_{31} & M_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_1(q, p-a_3) \\ F_2(q, p-a_3) \\ F_3(q, p-a_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

$$\dot{r} = r_1, \dot{\delta} = \delta_1, \dot{\alpha} = b(p - a_3) - \gamma_{31}r_1 - \gamma_{32}\delta_1.$$

Коэффициенты системы уравнений (6) выразим через элементы матриц кинетической и потенциальной энергии, обобщенных сил, членов неголономности и уравнений связи [1, 2, 6] (приведены первые строки векторно-матричных уравнений (6)):

$$A_{11} = a^*_{11(r)} - a^*_{11(\alpha)}\gamma_{31} + a^*_{11(\eta)}(B_{\eta 1} - B_{\eta 3}\gamma_{31}) - \frac{1}{2}(a^*_{11[\alpha]} + B_{\eta 1} a^*_{11[\eta]}) -$$

$$-(\theta_{\mu r} - \theta_{\mu\alpha}\gamma_{\alpha r})(\Omega_{\mu i r} - \Omega_{\mu i\alpha}\gamma_{\alpha r}),$$

$$A^1_{12} = a^*_{11(\delta)} - a^*_{11(\alpha)}\gamma_{32} + a^*_{11(\eta)}(B_{\eta 2} - B_{\eta 3}\gamma_{32}) + a^*_{12(r)} - a^*_{12(\alpha)}\gamma_{31} +$$

$$+ a^*_{12(\eta)}(B_{\eta 1} - B_{\eta 3}\gamma_{31}) - (a^*_{12[r]} + B_{\eta 1} a^*_{12[\eta]}) - (\theta_{\mu r} - \theta_{\mu\alpha}\gamma_{31})(\Omega_{\mu i\delta} - \Omega_{\mu i\alpha}\gamma_{32}) -$$

$$-(\theta_{\mu\delta} - \theta_{\mu\alpha}\gamma_{32})(\Omega_{\mu i r} - \Omega_{\mu i\alpha}\gamma_{31}),$$

$$A_{12} = a^*_{12(\delta)} - a^*_{12(\alpha)}\gamma_{32} + a^*_{12(\eta)}(B_{\eta 2} - B_{\eta 3}\gamma_{21}) - \frac{1}{2}(a^*_{22[r]} + B_{\eta 1} a^*_{22[\eta]}) -$$

$$-(\theta_{\mu\delta} - \theta_{\mu\alpha}\gamma_{32})(\Omega_{\mu i\delta} - \Omega_{\mu i\alpha}\gamma_{32}),$$

$$A_{13} = \frac{1}{2}(b_{[r]} + b_{[\eta]}B_{\eta 1}) + \gamma_{31(\alpha)}b + \gamma_{31(\eta)}B_{\eta 3}b - \theta_{\mu\alpha}b'\,\Omega_{\mu i\alpha}b,$$

$$M_{11} = A_{1(r)} - A_{1(\alpha)}\gamma_{31} + A_{1(\eta)}(B_{\eta 1} - B_{\eta 3}\gamma_{31}) - (A_{1[r]} + B_{\eta 1}A_{1[\eta]}) +$$

$$+(a^*_{11(\alpha)} + B_{\eta 3}a^*_{11[\eta]})\,b\,(p - a_3) - \theta_\mu(\Omega_{\mu i r} - \Omega_{\mu i\alpha}\gamma_{31}) -$$

$$-(\theta_{\mu r} - \theta_{\alpha}\gamma_{31})[\Omega_{\mu i\alpha}b\,(p - a_3)],$$

$$M_{12} = A_{1(\delta)} - A_{1(\alpha)}\gamma_{32} + A_{1(\eta)}(B_{\eta 2} - B_{\eta 3}\gamma_{32}) - (A_{2[r]} + B_{\eta 2}A_{2[\eta]}) +$$

$$+(a^*_{12(\alpha)} + B_{\eta 3}a^*_{12[\eta]})\,b\,(p - a_3) - \theta_\mu(\Omega_{\mu i\delta} - \Omega_{\mu i\alpha}\gamma_{32}) -$$

$$-(\theta_{\mu\delta} - \theta_{\mu\alpha}\gamma_{32})[\Omega_{\mu i\alpha}b\,(p - a_3)],$$

$$F_1(q, p - a_3) = (a'_{1(\alpha)} - \gamma'_{31}a'_{3(\alpha)})\,b\,(p - a_3) +$$

$$+(a'_{1(\eta)} - \gamma'_{31}a'_{3[\eta]})\,B_{\eta 3}b\,(p - a_3) - (a'_{3[r]} - B_{\eta 1}a'_{3[\eta]})\,b\,(p - a_3) -$$

$$-(T_{0r} - \Pi_r) - B_{\eta 1}(T_{0\eta} - \Pi_\eta) - [\theta_{\mu\alpha}b\,(p - a_3) + \theta_\mu][\Omega_{\mu i\alpha}b\,(p - a_3)],$$

$W_{(q)}, W_{[q]}$ для произвольной матрицы $W_{(q)} = \|w_{ij(q)}\|$ означают соответственно векторы с матричными компонентами $\left\|\dfrac{\partial w_{iv}}{\partial q_j}\right\|$, $\left\|\dfrac{\partial w_{ij}}{\partial q_v}\right\|$, где ν — номер компоненты вектора [6].

В структурах этих уравнений содержатся линейные относительно позиционных скоростей и неоднородные относительно обобщенных координат члены. Наличие членов неголономности обусловливает появление членов второго порядка относительно независимых скоростей, линейных членов, а также членов, не содержащих скоростей.

Замечание 1. Использование лагранжевых переменных для описания состояния системы при исследовании устойчивости или стабилизации установившихся движений после необходимых преобразований [12, 13] практически неизбежно изменяет исходную структуру сил. Поэтому для таких задач целесообразно использование переменных Рауса [3, 6, 7, 14], которые, во-первых, не изменяют структуру сил, во-вторых, более удобны для анализа нелинейных членов уравнений, соответствующих импульсам, в-третьих, при исследовании задачи стабилизации, с точки зрения теории управления, нет необходимости приводить уравнения для управляемых переменных к нормальной форме.

Исследование устойчивости установившихся движений. Исследование устойчивости установившихся движений неголономных систем имеет свои особенности, так как для неголономных систем, в отличие от голономных, имеется несколько различных определений циклических координат [4]. В общем случае размерность многообразия установившихся движений склерономной неголономной системы с циклическими координатами не меньше единицы и никак не связана, в отличие от голономных систем, с числом циклических координат и неголономных связей, т.е. задачи поиска установившихся движений и интегралов движения в случае неголономных систем не являются тесно связанными.

Пусть координаты q_ε циклические в следующем смысле: в выражения обобщенной силы Q_ρ, кинетической, потенциальной энергии T, Π (q) системы (функции Рауса), составленные с учетом неголономных связей членов неголономности, эти координаты явно не входят, а могут входить их скорости

$$\begin{gathered} R^{,\varepsilon} = 0\,(T^{,\varepsilon} = 0, \Pi^{,\varepsilon} = 0),\; B^{,\varepsilon}_{\eta s} = 0, \\ (\Omega_{\mu s \rho}\theta_{\mu s})^{,\varepsilon} = 0, (\Omega_{\mu s \rho}\theta_{\mu})^{,\varepsilon} = 0, Q^{,\varepsilon}_{\rho} = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь верхний индекс ε после запятой означает дифференцирование по ε. Тогда система уравнений (5, 6), записанная в переменных Рауса, может совершать установившиеся движения

$$q_\eta = q_{\eta 0},\; q_r = q_{r0},\; \dot{q}_r = 0,\; \dot{q}_\delta = \omega_{\delta 0} = \text{const},\; p_\alpha = c_\alpha = \text{const}, \tag{8}$$

которые определяем из системы уравнений

$$(B_{\eta 2} - B_{\eta 3}\gamma_{32})\delta_1 + B_{\eta 3} b\,(p - a_3) = 0, \tag{9}$$

$$\delta_1' A_{12}\delta_1 + (p' - a_3') A_{13}(p - a_3) + M_{12}\delta_1 + F_1(q, p - a_3) + Q_i + B_{\eta 1} Q_\eta = 0, \quad (10)$$

$$\delta_1' A_{22}\delta_1 + (p' - a_3') A_{23}(p - a_3) + M_{22}\delta_1 + F_2(q, p - a_3) + Q_\delta + B_{\eta 2} Q_\eta = 0, \quad (11)$$

$$\delta_3' A_{32}\delta_1 + (p' - a_3') A_{33}(p - a_3) + M_{32}\delta_1 + F_3(q, p - a_3) + Q_\alpha + B_{\eta 3} Q_\eta = 0. \quad (12)$$

Если система является консервативной, т. е. отсутствуют обобщенные силы, установившееся движение системы имеет многообразия размерности не меньше единицы [4, 10]. Поскольку ранг матрицы системы уравнений (9) — (12) равен нулю, по крайней мере, одно из уравнений этой системы не является независимым. В переменных Рауса это легко подтверждается решением системы уравнений (4) с учетом условий (7) и (8). Если умножить вторую и третью группу уравнений соответственно на $\dot{a}$ и $\dot{\delta}$, затем сложить все уравнения, то с учетом (3) получим

$$B_{\mu\alpha} \frac{\partial R_0}{\partial q_\mu} [b(p - a_3) - \gamma_{32}\dot{\delta}] + B_{\mu\delta} \frac{\partial R_0}{\partial q_\mu} \dot{\delta} = 0$$

или

$$\frac{\partial R}{\partial q_\mu} [(B_{\eta 2} - B_{\eta 3}\gamma_{32})\dot{\delta} + B_{\eta 3} b(p - a_3)] = 0\,.$$

Теперь в силу уравнений неголономных связей (5) число независимых уравнений системы (9) — (12) будет меньше хотя бы на единицу.

Введя возмущения по фазовым переменным

$$q_\eta = q_{\eta 0} + s,\ \ q_r = q_{r0} + x,\ \ \dot{q}_\delta = \omega_{\delta 0} + z,\ \ p_\alpha = c_\alpha + y,$$

составим уравнения возмущенного движения, выделив в них первое приближение:

$$\begin{gathered}
\dot{x} = x_1, \\
A_1^0 \dot{x}_1 + A_{12}^0 \dot{z} + \varGamma_1 \dot{y} + (D+G)_{11} x_1 + (D+G)_{12} z + (D+G)_{13} y + \\
+ (C+P)_1 x + (C+P)_{12} s = \Phi_1(s, x, x_1, y, z), \\
A_{21}^0 \dot{x}_1 + A_2^0 \dot{z} + \varGamma_2 \dot{y} + (D+G)_{21} x_1 + (D+G)_{22} z + (D+G)_{23} y + \\
+ (C+P)_2 x + (C+P)_{22} s = \Phi_2(s, x, x_1, y, z), \\
\dot{y} = (D+G)_{31} x_1 + (D+G)_{32} z + (D+G)_{33} y + \\
+ (C+P)_3 x + (C+P)_{32} s + \Phi_3(s, x, x_1, y, z), \\
\dot{s} = B_1 x_1 + B_2 z + H_3 y + K_1 x + K_2 s + \Phi_4(s, x, x_1, y, z),
\end{gathered} \quad (13)$$

где Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 — нелинейные члены;

$$\Gamma' = (\Gamma_1', \Gamma_2'), \Gamma_1 = \|(\gamma_{31})_0\|, \Gamma_2 = \|(\gamma_{32})_0\|,$$

$$A = \left\| \begin{Bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{Bmatrix}_0 \right\|, \quad G = \|\{M\}_0\|, \quad M = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \\ M_{31} & M_{32} \end{vmatrix},$$

$$X_i(q, \delta_1, p - a_3) = \delta_1' A_{i2} \delta_1 + (p' - a_3') A_{i3}(p - a_3) + M_{i2}\delta_1 + F_i(q, p - a_3),$$

$$P = \left\| \left\{ \frac{\partial Q_\rho}{\partial u} + \frac{\partial B_{\eta\rho}}{\partial u} Q_\eta + B_{\eta\rho} \frac{\partial Q_\eta}{\partial u} \right\}_0 \right\|, \quad D = \left\| \left\{ \frac{\partial Q_\rho}{\partial v} + B_{\eta\rho} \frac{\partial Q_\eta}{\partial v} \right\} = \left\{ \frac{\partial Q_{o_0}^*}{\partial v} \right\}_0 \right\|,$$

$$B = \|\{B_{\eta\omega} - B_{\eta 3}\gamma_{3\omega}\}_0\|, \quad b_0 = \|\{b\}_0\|, \quad H_3 = \|\{B_{\eta 3} b\}_0\|,$$

$$(u = q_\eta, q_r), \; u' = (q_\eta', q_r'), \; v = (r_1, \delta_1, p), \; \overline{u} = (s, x), \; \overline{v} = (x_1, z, y),$$

$$Q_\rho^*(\eta, r, \delta, \alpha, \eta_1, r_1, \delta_1, p) = Q_\rho + B_{\eta\rho} Q_\eta = \{Q_\rho^*\}_0 + P\overline{u} + D\overline{v} + Q_\rho^{(2)},$$

$$X = \{X\}_0 + C\overline{u} + Gy + X^{(2)},$$

$$K_j = \left\| \left\{ \frac{\partial}{\partial u} ((B_{\eta 2} - B_{\eta 3}\gamma_{32}) + B_{\eta 3} b(p - a_3)) \right\}_0 \right\|,$$

$$G_{i1} = \|G_{i1}\| = \left\| \{A_{i1}^i\}_0 \omega_{\delta 0} + \{M_{i1}\}_0 \right\|,$$

$$G_{i2} = \left\| \, \omega_{\delta 0}' \{A_{i2}\}_0 + \{A_{i2}\}_0 \omega_{\delta 0} + \{M_{i2}\}_0 \right\|,$$

$$G_{i3} = \left\| \left\{ \frac{\partial X_i}{\partial y} \right\}_0 \right\|, C = \|C_{iu}\| = \left\| \left\{ \frac{\partial X_i}{\partial u} \right\}_0 \right\|, (i = 1, 2, 3), (j = 1, 2).$$

Здесь знак $\{\}_0$ означает, что выражение, стоящее в скобках, вычислено при стационарном движении (8); верхний индекс «(2)» означает порядок младших членов в разложении соответствующего выражения. При этом в уравнениях движения системы не допускаются, вообще говоря, циклические интегралы. Число уравнений системы (9) — (12) в общем случае не меньше числа переменных q_n, q_r, $\dot{q}_\delta$, q_α в (8). Если система уравнений (9) — (12) имеет единственное решение относительно величин q_{n0}, q_{r0}, $\dot{q}_{\delta 0}$, q_α, то такое стационарное движение системы будет изолированным. Если система обладает многообразием установившихся движений, то установившееся движение системы будет неизолированным.

Итак, неголономные системы при $Q \neq 0$ с циклическими по определению (7) координатами в общем случае могут совершать изолированное установившееся движение. Характеристическое уравнение, составленное для (13), несимметрично [1, 2] и не имеет, в общем случае, нулевых корней, так как уравнения возмущенного движения (13) содержат линейные члены относительно скоростей и импульсов, а неголономные связи общего вида в первом приближении могут содержать линейные члены относительно координат. Следует заметить, что установившиеся движения неголономной системы с однородными связями могут быть асимптотически устойчивыми по первому приближению при действии внешних обобщенных сил Q_ρ^*. Вопрос об устойчивости (7) можно решать, используя теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Замечание 2. В работе [6] упомянуто, что матрица коэффициентов линейных позиционных сил несимметрична, а кососимметрическая составляющая появляется не только при наличии непотенциальных позиционных сил в векторе Q_ρ^*. Такие члены могут появиться при действии сил, содержащих скорости. Показана возможность появления линейных позиционных сил при выражении некоторой части скоростей через импульс (3).

Покажем, что такие члены могут появиться вследствие приложения сил по координатам, соответствующим зависимым скоростям, а также в случае, если обобщенные силы Q_ρ^* зависят от скоростей. Например, действующие на систему силы — линейные относительно скоростей

$$Q_\rho^*(q_\eta, q_r, q_\delta, q_\alpha, \dot{q}_\eta, \dot{q}_r, \dot{q}_\delta, p) = Q_\rho + B_{\eta\rho} Q_\eta =$$
$$= Q_1^*(q)\,\dot{q}_\eta + Q_2^*(q)\,\dot{q}_\omega + Q_3^*(q)\,\dot{q}_\alpha .$$

Тогда с учетом (3) и (5) получим

$$Q_\rho^* = [Q_2^*(q) + Q_1^*(q)(B'_{\eta\omega} - B_{\eta 3}\gamma'_{3\omega}) - Q_3^*(q)\,\gamma']\,\dot{q}_\omega +$$
$$+ [Q_1^*(q) B_{\eta 3} + Q_3^*(q)]\, b\,(p - a_3) .$$

Далее, аналогично [6], разлагая в ряд этот вектор в окрестности установившихся движений (8), получаем линейные члены с постоянными коэффициентами относительно фазовых переменных s, x, x_1, z, y.

При исследовании устойчивости установившихся движений (7) линейные по позиционным координатам члены могут появиться вследствие обобщенных сил, зависящих от скоростей, а также вследствие зависимости (3). Кроме того, в уравнениях первого приближения (11) могут появиться силы, линейные относительно координат, с учетом членов неголономности, потенциальной энергии и матрицы коэффициентов кинетической энергии, т. е. силы $C\overline{u}$, Hy, Gx_1. Тогда, при определенных условиях, возникает возможность стабилизации установившихся движений. Выбором коэффициентов линейных членов в разложении обобщенных сил Q_ρ^* и линейных членов в F и G можно добиться, чтобы действительные части корней характеристического уравнения (12) были отрицательными.

Таким образом, справедливо утверждение: если действительные части всех корней характеристического уравнения первого приближения (13) отрицательны, то установившееся движение (8) неголономной системы асимптотически устойчиво по первому приближению независимо от членов высших порядков. Следует заметить, что это возможно только для изолированных движений. Однако при решении конкретных задач возможны ситуации, когда система имеет многообразие установившихся движений, например в следующем случае.

Предположим, что связи общего вида (5), вообще говоря, содержат циклические скорости. Пусть выполнены следующие условия:

$$(B_{\eta\varepsilon})_0 = 0, \tag{14}$$

$$\theta_{\mu\varepsilon}\Omega_{\mu\varepsilon\varepsilon} = 0, \quad \theta_{\pi}\Omega_{\mu\varepsilon\varepsilon} = 0\,. \tag{15}$$

Условия (14) означают, что коэффициенты $B_{\eta\varepsilon}$ обращаются в нуль только при рассматриваемом установившемся движении (8), а условия (15) — что уравнения движения для циклических импульсов не содержат членов, квадратичных и линейных по скоростям (импульсам) циклических координат.

Условия (15) выполняются, если в системе для кинетической энергии (2) $A_{\mu} \equiv 0$ и $A_{\mu r} \equiv 0$. Тогда, если отсутствуют внешние силы Q_r, многообразие установившихся движений определяется из уравнений (10) и (14). При этом в уравнениях движения системы не допускаются, вообще говоря, циклические интегралы.

Если $B_{\eta\varepsilon}$ обращаются тождественно в нуль при установившихся движениях (8), то многообразие установившихся движений определяется только уравнением (10) и размерность его не меньше суммы числа циклических координат и числа неголономных связей общего вида [4].

Рассмотрим устойчивость установившихся движений (8) в следующем случае. Пусть кроме условий (14) и (15) выполнены условия

$$B_{\eta\alpha} \equiv 0\,, \; (B_{\eta\delta})_0 \equiv 0, \; \frac{\partial B_{\eta\delta}}{\partial q_{\varepsilon}} = 0, \; Q_{\varepsilon} = 0\,,$$

которые означают, что связи общего вида не содержат часть циклических скоростей [14]; коэффициенты, содержащие циклические скорости, обращаются в нуль при установившемся движении и не зависят от циклических координат [3]; обобщенные силы не действуют по циклическим координатам. Тогда многообразие установившихся движений (8) определяется из уравнения (10), размерность которого не меньше числа циклических координат.

Характеристическое уравнение линейного приближения

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} E\lambda & -E & 0 & 0 & 0 \\ (C+P)_1 & A_1^0\lambda+(D+G)_{11} & A_{21}^0\lambda+(D+G)_{12} & \Gamma_1\lambda+(D+G)_{13} & (C+P)_{12} \\ (C+P)_2 & A_{21}^0\lambda+(D+G)_{21} & A_2^0\lambda+(D+G)_{22} & \Gamma_2\lambda+(D+G)_{23} & (C+P)_{22} \\ (C+P)_3 & -(D+G)_{31} & -(D+G)_{32} & E\lambda-(D+G)_{33} & -(C+P)_{32} \\ -K_1 & -B_1 & -B_2 & -H_3 & -K_2+E\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет, по крайне мере, k_1 нулевых корней (k_1 — часть числа циклических координат, для которой введены циклические импульсы). При $B_{\eta\alpha}=0$ вследствие того, что уравнения связей общего вида не содержат части циклических скоростей, в системе (13) члены $(D+G)_{22}, (D+G)_{23}, (C+P)_2$, $(C+P)_{22}$, $(G+D)_{32}$, $(D+G)_{33}$, $(C+P)_{32}$, B_2, H_3, K_2 обращаются в нуль. Тогда характеристическое уравнение первого приближения системы будет иметь k_1 нулевых корней, т. е. их число равно числу части циклических координат.

Для дальнейшего исследования необходим анализ нелинейных членов, чтобы определить тип критических случаев.

Замечание 3. Задачу исследования устойчивости установившихся движений неголономных систем с однородными связями можно решать не только с использованием теорем Ляпунова об устойчивости по первому приближению и Ляпунова—Малкина об устойчивости в особенном случае нескольких нулевых корней. Возможны общие неособенные критические случаи наличия нескольких нулевых чисто мнимых корней. Число критических переменных может не соответствовать размерности многообразия установившихся движений. В этих случаях необходимо провести анализ нелинейных членов и определить тип критических случаев.

Линейная замена для выделения критических переменных может существенно изменить исходную структуру уравнений, что усложнит исследования устойчивости движения. При решении конкретных задач исследование корней характеристического уравнения даже в случаях получения только необходимых условий устойчивости приводит к трудоемким вычислениям и значительным временным затратам. Выражение условий устойчивости в явном виде через параметры системы весьма громоздко. Поэтому для решения таких задач целесообразно вводить в систему исполнительное устройство (регулятор), с помощью которого можно получить необходимые результаты.

Замечание 4. Уравнения возмущенного движения в переменных Рауса более удобны для анализа нелинейных членов уравнений, соответствующих циклическим импульсам. При анализе этих нелинейных членов выявлены новые случаи, когда вопрос об устойчивости установившихся движений с помощью преобразований теории критических случаев можно свести к особенному случаю.

Результаты исследований показали, что такое преобразованиее (введение импульсов), сокращая размерность матриц коэффициентов при старших производных, часто приводит к усложнению их компонент, что значительно затрудняет исследования структуры уравнений движения.

Замечание 5. Если в рассматриваемой системе с несколькими циклическими координатами существует гироскопическая связанность по циклическим координатам, следует вводить импульс только по той циклической координате, которая гироскопически не связана с лагранжевыми координатами. В этом случае исследования устойчивости установившихся движений значительно упрощаются.

Пример. Рассмотрим движение неоднородного осесимметричного шара по сферической чаше [10]. Предположим что, на оси симметрии в геометрическом центре шара расположен ротор, вращающийся с постоянной угловой скоростью. В [13] рассмотрена задача об устойчивости равновесия при действии диссипативных сил, так как по некоторым переменным без диссипации асимптотическая устойчивость не наблюдается. Характеристическое уравнение первого приближения имеет три нулевых корня. Получены достаточные условия устойчивости равновесия.

В работе [15] исследованы динамические режимы нового гасителя вынужденных колебаний высотных сооружений. Гаситель представляет собой механическую систему «тяжелый шар в сферической выемке», установленную на массивном несущем теле.

Рассмотрим тяжелый неоднородный шар с ротором в сферической чаше. Покажем, что уравнения неголономных связей общего вида содержат часть циклических скоростей и размерность многообразий установившихся движений не зависит от числа циклических координат и связей общего вида. Уравнения первого приближения связей общего вида содержат линейные члены, зависящие от позиционных координат и от координат, скорости которых зависимы. Функция Лагранжа [6, 10] для неоднородного шара и ротора имеет вид

$$L_0 = \frac{1}{2} m\rho^2 (\dot\psi_1^2 \sin(\theta_1)^2 + \dot\theta_1^2) + \frac{1}{2} m(a^2 + A)(\dot\psi^2 \sin(\theta) + \dot\theta^2) +$$

$$+ ma\rho\,(\dot\theta\dot\theta_1 \sin(\theta)\sin(\theta_1) + \cos(\psi - \psi_1)(\dot\psi\dot\psi_1 \sin(\theta)\sin(\theta_1) +$$

$$+ \dot\theta\dot\theta_1 \cos(\theta)\cos(\theta_1)) + \sin(\psi - \psi_1)(\dot\theta\dot\psi_1 \cos(\theta)\sin(\theta_1))) +$$

$$+ \frac{1}{2} C\,(\dot\psi\cos(\theta) + \dot\varphi)^2 + mg\,(\rho\cos(\theta_1) + a\cos(\theta)) + \frac{1}{2} B\dot\alpha^2 + B\,(\dot\varphi + \dot\psi\cos(\theta))\,\dot\alpha.$$

Здесь $\psi_1, \theta_1, \varphi, \theta, \psi$ — обобщенные координаты; m, A и C — соответственно масса, экваториальный и осевой моменты инерции шара и условно остановленного ротора; g — ускорение свободного падения; B — момент инерции ротора относительно оси вращения; $\dot{\alpha}$ — угловая скорость ротора; R и r — радиусы чаши и неоднородного шара; a — расстояние между центром тяжести и геометрическим центром шара; $\rho = R - r$.

Условие качения без проскальзывания приводит к двум уравнениям неголономных связей общего вида, однородным относительно обобщенных скоростей:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{r\,((\cos(\theta) - \cos(\theta_1)\sin(\theta)\cos(\psi - \psi_1))\,\dot{\varphi} - \cos(\theta_1)\sin(\psi - \psi_1)\,\dot{\theta} - \dot{\psi})}{\rho},$$

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{r\,((\sin(\theta)\sin(\psi - \psi_1))\,\dot{\varphi} - \cos(\psi - \psi_1)\,\dot{\theta})}{\rho}.$$

Обозначив обобщенные координаты $\psi_1, \theta_1, \varphi, \theta, \psi, \alpha$ соответственно через $\tilde{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, \dot{q}_6)$, запишем

$$\dot{\psi}_1 = B_{13}\dot{\varphi} + B_{14}\dot{\theta} + B_{15}\dot{\psi} + B_{16}\dot{\alpha},$$

$$\dot{\theta}_1 = B_{23}\dot{\varphi} + B_{24}\dot{\theta} + B_{25}\dot{\psi} + B_{26}\dot{\alpha},$$

где

$$B_{13} = -\frac{r}{\rho}\,[\cos\theta - \operatorname{ctg}\theta_1 \sin\theta \cos(\psi - \psi_1)],$$

$$B_{14} = -\frac{r}{\rho}\,\operatorname{ctg}\theta_1 \sin(\psi - \psi_1)],\;\; B_{15} = -\frac{r}{\rho},\;\; B_{16} = 0,$$

$$B_{23} = -\frac{r}{\rho}\sin\theta\sin(\psi - \psi_1),\;\; B_{24} = -\frac{r}{\rho}\cos(\psi - \psi_1),\;\; B_{25} = 0,\;\; B_{26} = 0\,.$$

Функция Лагранжа с учетом неголономных связей имеет вид

$$L = \frac{1}{2}\,mr^2(((\cos(\theta) - \cos(\theta_1)\sin(\theta)\cos(\psi - \psi_1))\,\dot{\varphi} -$$

$$-\cos(\theta_1)\sin(\psi - \psi_1)\dot{\theta} - \dot{\psi})\sin(\theta_1)^2 + ((\sin(\theta)\sin(\psi - \psi_1))\dot{\varphi} - \cos(\psi - \psi_1)\dot{\theta})^2) +$$

$$+\frac{1}{2}m(a^2 + A)(\dot{\psi}^2\sin(\theta) + \dot{\theta}^2) + mar\,(-\dot{\theta}\,((\sin(\theta)\sin(\psi - \psi_1))\,\dot{\varphi} -$$

$$-\cos(\psi - \psi_1)\,\dot{\theta})\sin(\theta)\sin(\theta_1) + \cos(\psi - \psi_1)(-\dot{\psi}\,((\cos(\theta) -$$

$$-\cos(\theta_1)\sin(\theta)\cos(\psi - \psi_1))\,\dot{\varphi} - \cos(\theta_1)\sin(\psi - \psi_1)\,\dot{\theta} - \dot{\psi})\sin(\theta)\sin(\theta_1) +$$

$$+\dot{\theta}\,((\sin(\theta)\sin(\psi - \psi_1))\,\dot{\varphi} - \cos(\psi - \psi_1)\,\dot{\theta})\cos(\theta)\cos(\theta_1)) +$$

$$+\sin(\psi-\psi_1)(-\dot\theta((\cos(\theta)-\cos(\theta_1)\sin(\theta)\cos(\psi-\psi_1))\dot\varphi-$$
$$-\cos(\theta_1)\sin(\psi-\psi_1)\dot\theta-\dot\psi)\cos(\theta)\sin(\theta_1)+\frac{1}{2}C(\dot\psi\cos(\theta)+\dot\varphi)^2+$$
$$+mg(\rho\cos(\theta_1)+a\cos(\theta))+\frac{1}{2}B\dot\alpha^2+B(\dot\varphi+\dot\psi\cos(\theta))\dot\alpha.$$

Функция Лагранжа системы содержит квадратичные члены, линейные относительно обобщенных скоростей и не содержащие обобщенных скоростей. Уравнения неголономной связи однородны относительно обобщенных скоростей.

Коэффициенты уравнений связи и функции Лагранжа не зависят от координат α, φ, а уравнения связи не содержат циклическую скорость $\dot\alpha$ $(B_{\eta\alpha}\equiv 0)$ [14], но содержат циклическую скорость $\dot\varphi$ при связях общего вида. Однако если вместо координаты ψ_1 ввести другую переменную, то первому уравнению связи можно придать вид связи типа Чаплыгина, но при этом матрица коэффициентов функции Лагранжа (Рауса) значительно усложняется.

Введя импульс по циклической координате α, составим функцию Рауса [7, 14]:

$$p=\frac{\partial L}{\partial\dot\alpha}=B(\dot\alpha+\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta),\ \ \dot\alpha=\frac{p}{B}-\dot\varphi-\dot\psi\cos\theta,$$
$$R=L-p\dot\alpha=\frac{1}{2}\dot q^1A^A\dot q-\frac{1}{2}B\left(\frac{p}{B}-\dot\varphi-\dot\psi\cos\theta\right)^2,$$

где $\dot q^1=(\dot\varphi,\dot\theta,\dot\psi)=(\dot q_3,\dot q_4,\dot q_5)$; A^A — матрица коэффициентов кинетической энергии (функции Лагранжа) с учетом неголономных связей.

Уравнения движения в явном виде в переменных Рауса, составленные с использованием символьных вычислений MAPLE, слишком громоздки, поэтому здесь не приведены.

Уравнения движения системы допускают стационарные решения вида

$$\dot\varphi=m,\ \psi=\psi_1,\ \dot\psi=\dot\psi_1=n\neq 0,\ \theta\neq\theta_1\neq 0,\ \dot\theta=0,\ \dot\theta_1=0,\ p=p_0,$$

где m, n, p_0 — постоянные величины (при значениях углов $\theta\neq\theta_1\neq 0$ матрицы коэффициентов функции Лагранжа вырождаются). Размерность многообразия установившихся движений равна трем и определяется уравнениями

$$\sin(\psi-\psi_1)=0,\ \ n(p+r)n=r(\mathrm{ctg}\theta_1\sin\theta-\cos\theta),$$
$$mg(a\sin\theta-r\sin\theta_1)-m^2\lfloor 0{,}5(a_{33}^{\theta}+B_{24}a_{33}^{\theta_1})+e_{33}\rfloor-$$

$$-mn\left\lfloor a_{35}^{\theta}+B_{24}a_{35}^{\theta_1}+B\sin\theta+e_{35}\right\rfloor-$$

$$-n^2[0{,}5(a_{55}^{\theta}+B_{24}a_{55}^{\theta_1})+B\sin\theta\cos\theta+e_{55}]+p_0 n\sin\theta=0.$$

Здесь верхние индексы означают частные производные по этим переменным.

Уравнения возмущенного движения в окрестности установившего движения с выделенными линейными членами имеют вид

$$\dot{s}_1=a_1\omega+a_2\dot{x}_2+a_3x_1+a_4s_2+\Phi_1(s_1,s_2,x_1,x_2,\omega_1,\dot{x}_1,\dot{x}_2),$$

$$\dot{s}_2=b_1\dot{x}_1+b_2(x_2-s_2)+\Phi_2,$$

$$a_{33}\dot{\omega}+a_{34}\ddot{x}_1+a_{35}\ddot{x}_2+\dot{y}+b_{34}\dot{x}_1+c_{34}x_1+c_{35}(x_2-s_2)=\Phi_3,$$

$$a_{43}\dot{\omega}+a_{44}\ddot{x}_1+a_{45}\ddot{x}_2+b_{44}x_1+b_{43}\omega+b_{45}\dot{x}_2+c_{42}s_2+c_{44}x_1)=\Phi_4,$$

$$a_{53}\dot{\omega}+a_{54}\ddot{x}_1+a_{55}\ddot{x}_2+\Gamma\dot{y}+b_{54}x_1+c_{53}(x_2-s_2)=\Phi_5,\ \dot{y}=\Phi_c,$$

где s_1,s_2,ω,x_1,x_2,y — возмущение соответственно по переменным ψ_1,θ_1, φ, θ, ψ, p; $\Phi_1,...,\Phi_6$ — нелинейные члены. Коэффициенты линейных членов постоянные и выражены через элементы матриц коэффициентов функций Рауса и неголономных связей.

Уравнения связей общего вида сдержат линейные члены зависящих от возмущений фазовых координат.

Характеристическое уравнение первого приближения имеет три нулевых корня, остальные корни определяются из уравнений

$$\begin{vmatrix} \lambda & -a_4 & -a_1 & -a_3 & 1-a_2 \\ b_2 & \lambda & 0 & -b_1\lambda & 0 \\ -c_{35} & 0 & a_{33}\lambda & b_{34}\lambda+c_{34} & a_{53} \\ 0 & c_{42} & b_{43} & a_{44}\lambda^2+b_{44}\lambda+c_{44} & a_{54}\lambda+b_{45} \\ 0 & c_{53}b_2^{-1} & a_{53} & a_{54}\lambda+b_{54} & a_{55} \end{vmatrix}=0.$$

Раскрытие характеристического определителя проведено в системе аналитических вычислений Maple 7: $d_0\lambda^5+d_1\lambda^4+d_2\lambda^3+d_3\lambda^2+d_4\lambda+d_5=0.$ Здесь вследствие громоздкости коэффициенты уравнения в явном виде не приведены. Как известно, критерию Рауса—Гурвица [13] соответствует только необходимое условие устойчивости.

Таким образом, при исследовании устойчивости установившихся движений неголономных систем использованы уравнения П.В. Воронина в переменных Лагранжа и Рауса в векторно-матричной форме и найдено достаточное условие устойчивости. Полученные ранее результаты применены для случая установившихся движений с однородными связями с учетом специфических особенностей именно этого класса движений.

The paper deals with stability of the steady motion of nonholonomic systems with uniform connections in respect of different determinations of cyclic coordinates.

1. *Атажанов Б.* Векторно-матричные методы в задачах стабилизации движения// Научни трудове. — Русе : Русенски Университет «Ангел Кънчев». — 2007. — Т. 46. Серия 3.1. — С.72—75.
2. *Атажанов Б.* Об устойчивости положения равновесия реономной неголономной системы/ Ж. Проблемы механики Узбекистана. — 2003. — № 1. — С. 7—11.
3. *Атажанов Б., Красинская Э. М.* О стабилизации стационарных движений неголономных механических систем//ПММ. — 1988. —Т. 52, вып. 6. —С. 902—908.
4. *Карапетян А. В., Румянцев В. В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем/Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 6. — М. : ВИНИТИ, 1983. — С. 3—128.
5. *Красинский А. Я., Атажанов Б.* О задаче стабилизации установившихся движений неголономных систем Чаплыгина//Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. — 2007. — **13**, № 2 (28). — С. 74—96.
6. *Красинский А. Я.* О стабилизации установившихся движений систем с циклическими координатами//ПММ. — 1992. — Т. 56, вып. 6. — С. 939—949.
7. *Красинская Э. М.* К стабилизации стационарных движений механических систем// ПММ. — 1983. — Т.47, вып. 2. — С. 302—309
8. *Николенко И. В.* Об устойчивости установившихся движений неголономных систем Воронца//Прикл. механика. — 1968. — **4**, № 14. — С. 84—89.
9. *Николенко И. В.* Динамика управляемых неголономных систем. — Киев. : Высш. шк. Головное изд-во, 1985. — 184 с.
10. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Об устойчивости стационарных движений голономных и неголономных систем // ПММ. — 1966. — Т. 30, вып. 2. — С. 236—242.
11. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения неголономных систем// Там же. — 1967. — Т. 31, вып. 2. — С. 260—271.
12. *Ляпунов А. М.* Собрание сочинений. В 2-х томах, Т. 2. — М. —Л. : Изд. АН СССР, 1956. — 473 с.
13. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. — М. : Наука, 1966. — 530 с.
14. *Шульгин М. Ф.* О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании//Тр. Среднеаз. ун-та. — 1958. — **144**. — 183 с.
15. *Легеза В. П.* Исследование динамического поведения нового гасителя вынужденных колебаний высотных сооружений//МТТ. — 2003. — № 5. — С. 31—38.

Поступила 05.03.08

АТАЖАНОВ Бахтияр, канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теоретической и прикладной механики Национального ун-та Узбекистана. В 1976 г. окончил Ташкентский госуниверситет. Область научных исследований — устойчивость, управление и стабилизация движений механических систем.