 В.П. Бурский, Е.В. Кириченко

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ В ПЛОСКОМ УГЛЕ ДЛЯ БЕСТИПНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В настоящей работе рассматривается первая краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами и неоднородным символом в угле на плоскости. Получено необходимое и достаточное условие единственности решения указанной задачи в пространстве C^2 с полиномиальным ростом на бесконечности.

Ключевые слова: бестипное уравнение, угловая точка, единственность
MSC (2000): 35M99, 35E15, 35E20

Введение.

Общие краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с угловыми точками изучались Г.И.Эскиным в работе [1], где автор доказал нормальную разрешимость таких задач для плоской области с граничными условиями, удовлетворяющими условию Лопатинского в пространстве C^N (N – достаточно большое положительное число). Случай первой краевой задачи рассматривался в работах В.В.Фуфаева [2], Е.А.Волкова [3]. В работе В.А.Кондратьева [4] исследовалась общая краевая задача для эллиптического уравнения в области, граница которой содержит конечное число конических точек. При этом решение рассматривалось в специальных пространствах функций, имеющих производные, суммируемые с некоторым весом. Автор показал, что решение такой задачи является всюду гладким, и при приближении к конической точке производные имеют, вообще говоря, степенные особенности.

В настоящей работе изучаются вопросы единственности решения первой краевой задачи в угле для бестипного уравнения второго порядка с неоднородным символом и комплексными коэффициентами. Получено необходимое и достаточное условие нарушения единственности решения задачи Дирихле в пространствах функций умеренного роста для некоторого класса дифференциальных уравнений, связанного с заданным углом. Проведено сопоставление полученного результата с наличием известного решения уравнения Лапласа в угле.

Метод исследования состоит в том, что, сдвигая первоначальный символ на некоторый вектор, принадлежащий трубчатой области в $\mathbb{C}^2$, зависящей от угла, мы получаем дифференциальный оператор с однородным символом, и к полученной таким образом граничной задаче применяем метод двойственности уравнение-область ([5]). Этим сдвигом мы устраняем трудности, связанные с отсутствием локальной аналитичности преобразования Фурье продолжения нулём решения задачи на всю плоскость.

1.Постановка задачи.

Мы рассматриваем однородную задачу Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1}$$

для уравнения второго порядка

$$\tilde{L}u = L\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda\right)u = (a^1 \cdot (\nabla + \lambda))(a^2 \cdot (\nabla + \lambda))u = 0 \tag{2}$$

в угле Ω (см. рис.1), где $a^1, a^2, \lambda \in \mathbb{C}^2-$ постоянные комплексные векторы, причём векторы a^1, a^2- произвольные, а выбор $\lambda \in T^C \subset \mathbb{C}^2$ ограничен множеством T^C, зависящим от угла. Пусть прямые, ограничивающие данный угол и проходящие через начало координат, описываются уравнениями $(b^1 \cdot x) = 0,\ (b^2 \cdot x) = 0$ соответственно, где $b^1 = (b^1_1, b^1_2),\ b^2 = (b^2_1, b^2_2)$ – нормальные векторы к прямым, а $\tilde{b}^1 = (-b^1_2, b^1_1),\ \tilde{b}^2 = (-b^2_2, b^2_1)-$ образующие.

Отметим, что условия на бесконечности мы выбираем принадлежностью решения пространству Шварца S' и что неоднородный символ $\tilde{l}(\xi)$ дифференциального оператора $\tilde{L}(\frac{\partial}{\partial x})$ становится однородным после сдвига на вектор λ:

$$\tilde{l}(\xi - \lambda) = l(\eta) = a\eta_1^2 + b\eta_1\eta_2 + c\eta_2^2.$$

Здесь мы можем считать, что a, b, c – произвольные комплексные числа. Полученный таким образом однородный символ $l(\eta)$ соответствует дифференциальному оператору

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = a\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + b\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} + c\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = (a^1 \cdot \nabla)(a^2 \cdot \nabla).$$

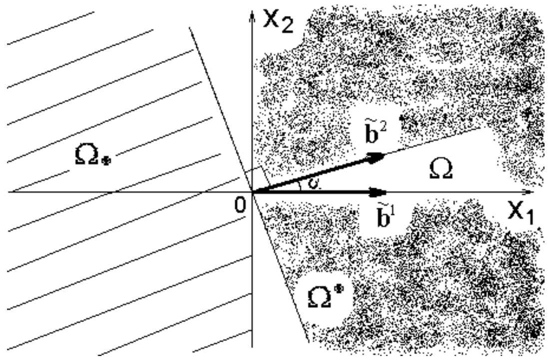

Рис. 1.

Обсудим подробнее выбор вектора λ. Угол Ω является частным случаем выпуклого острого конуса с вершиной в нуле. Будем рассматривать также сопряженный конус Ω^*, образующими которого служат перпендикуляры, проведенные к образующим исходного конуса Ω. Ω^* – замкнутый выпуклый конус с вершиной в нуле. Пусть $\Omega_* = -\Omega^*$ и $C = \operatorname{int} \Omega_*, C \neq \varnothing$, – открытый выпуклый конус. Через T^C обозначим трубчатую область в $\mathbb{C}^2$ с основанием C [6]:

$$T^C = \mathbb{R}^2 + iC = \{z = x + iy : x \in \mathbb{R}^2, y \in C\}.$$

Ниже будем выбирать $\lambda \in T^C$. То есть, если

$$\lambda = (\mu_1,\ \nu_1) + i(\mu_2,\ \nu_2), \quad \text{где } (\mu_1,\ \nu_1) \in \mathbb{R}^2,\ (\mu_2,\ \nu_2) \in C,$$

то, исходя из выбранного нами угла Ω и построенных по нему конусов Ω^* и Ω_*, заключаем, что компоненты μ_1, ν_1 произвольны, а μ_2, ν_2 должны быть таковы, чтобы угол $\operatorname{arctg} \frac{\nu_2}{\mu_2}$ пробегал сектор Ω_* (см. рис. 1).

2. Основной результат.

Приведенная ниже теорема дает ответ на вопрос, когда рассматриваемая задача (1), (2) имеет нетривиальное решение.

Теорема. *Для того чтобы задача (1), (2) имела нетривиальное решение $u(x)$ из пространства $C^2(\overline{\Omega})$ с полиномиальным ростом на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы при* *некотором натуральном n выполнялось равенство*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} (\widetilde{b}^1 \cdot \widetilde{a}^1)^n & (\widetilde{b}^2 \cdot \widetilde{a}^1)^n \\ (\widetilde{b}^1 \cdot \widetilde{a}^2)^n & (\widetilde{b}^2 \cdot \widetilde{a}^2)^n \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Доказательство.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap S'_\Omega$ – некоторое нетривиальное решение задачи (1), (2), где $S'_\Omega = \{\omega \in S' | \mathrm{supp}\ \omega \subset \overline{\Omega}\}$, $\tilde{u} \in C^2(\mathbb{R}^2) \cap S'$ – любое его продолжение на все пространство $\mathbb{R}^2$. Замечая, что символ

$$\tilde{l}(\xi) = l(\eta + \lambda) = l(\eta) + (2a\lambda_1 + b\lambda_2)\eta_1 + (b\lambda_1 + 2c\lambda_2)\eta_2 + l(\lambda),$$

представим оператор $\tilde{L}$ в виде суммы $\tilde{L} = L + L_{(1)} + L_{(0)}$ трех операторов, первый из которых совпадает с однородным дифференциальным оператором L, второй $L_{(1)}$ содержит только первые производные по переменным x_1 и x_2, а последний $L_{(0)}$ – константа. Теперь применим оператор $\tilde{L}$ к произведению $\tilde{u} \cdot \theta_\Omega$, где θ_Ω – характеристическая функция угла:

$$\begin{aligned}
&\tilde{L}(\tilde{u} \cdot \theta_\Omega) = \\
&\quad = (L + L_{(1)} + L_{(0)})(\tilde{u} \cdot \theta_\Omega) = L(\tilde{u} \cdot \theta_\Omega) + (L_{(1)}\tilde{u}) \cdot \theta_\Omega + \tilde{u} \cdot (L_{(1)}\theta_\Omega) + \\
&\quad + (L_{(0)}\tilde{u}) \cdot \theta_\Omega = (L\tilde{u}) \cdot \theta_\Omega + \mathcal{L}_1\tilde{u} \cdot \delta_{\partial\Omega} + l(\nu) \cdot (\delta_{\partial\Omega})'_\nu \cdot \tilde{u} + L_{(1)}\tilde{u}) \cdot \theta_\Omega + \\
&\quad + (\tilde{u} \cdot (L_{(1)}\theta_\Omega) + (L_{(0)}\tilde{u}) \cdot \theta_\Omega = [(L + L_{(1)} + L_{(0)})\tilde{u}] \cdot \theta_\Omega + \\
&\quad + \mathcal{L}_1\tilde{u} \cdot \delta_{\partial\Omega} + l(\nu) \cdot (\delta_{\partial\Omega})'_\nu \cdot \tilde{u} + \tilde{u} \cdot (L_{(1)}\theta_\Omega) = \\
&\quad = (\tilde{L}\tilde{u}) \cdot \theta_\Omega + \mathcal{L}_1\tilde{u} \cdot \delta_{\partial\Omega} + l(\nu) \cdot (\delta_{\partial\Omega})'_\nu \cdot \tilde{u} + \tilde{u} \cdot (L_{(1)}\theta_\Omega).
\end{aligned}$$

Здесь $\delta_{\partial\Omega}$ – мера, сосредоточенная на границе угла, $\frac{\partial\theta_\Omega}{\partial\tau} = 0$, $\frac{\partial\theta_\Omega}{\partial\nu} = -\delta_{\partial\Omega}$. Отметим, что поскольку $\tilde{L}\tilde{u} = 0$ внутри угла Ω в силу равенства $\tilde{u}|_\Omega = u$ и, кроме того, $\theta_\Omega = 0$ вне Ω, то первое слагаемое в сумме аннулируется. Что касается третьего и четвертого слагаемых, то оба они приводятся к форме, подобной виду второго слагаемого (это следует из формулы $\psi\delta' = -\psi'\delta$ при условии, что $\psi(0) = 0$). Таким образом, окончательно имеем:

$$\tilde{L}(\tilde{u} \cdot \theta_\Omega) = M_{(1)}\tilde{u} \cdot \delta_{\partial\Omega}, \tag{4}$$

где $M_{(1)}$ – дифференциальный оператор первого порядка.

Умножим полученное равенство (4) на произведение полиномов, стоящих в левых частях уравнений прямых, которые ограничивают угол Ω:

$$(b^1 \cdot x)(b^2 \cdot x)\tilde{L}(\tilde{u} \cdot \theta_\Omega) = 0. \tag{5}$$

Теперь подействуем на равенство (5) преобразованием Фурье:

$$(b^1 \cdot \nabla_\xi)(b^2 \cdot \nabla_\xi)[\tilde{l}(\xi)(\widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega}(\xi))] = 0. \tag{6}$$

Поскольку функция $\tilde{u}\theta_\Omega(x)$ имеет носитель в угле Ω, то ее преобразование Фурье $\widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega}(\xi)$ не будет аналитической в нуле функцией. Однако, произведя сдвиг в равенстве (6) на вектор λ, выбор которого описан выше, мы попадаем в трубчатую область T^C, где преобразование Фурье $\widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega}(\xi - \lambda)$ является функцией, аналитической в окрестности нуля (см. [6]). Таким образом, будем иметь:

$$(b^1 \cdot \nabla_\xi)(b^2 \cdot \nabla_\xi)[\tilde{l}(\xi - \lambda)](\widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega}(\xi - \lambda)) = 0,$$

откуда, с учетом того, что $\xi - \lambda = \eta$, получим:

$$(b^1 \cdot \nabla_\eta)(b^2 \cdot \nabla_\eta)[l(\eta)](\widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega}(\eta)) = 0. \tag{7}$$

Отметим, что в выражении (7) символ $l(\eta)$ уже является однородным, а функция $v(\eta) = \widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega}(\eta)$, будучи аналитической по η в T^C, может быть разложена в степенной ряд в окрестности нуля:

$$v(\eta) = v_0(\eta) + v_1(\eta) + v_2(\eta) + \ldots + v_N(\eta) + \ldots.$$

При этом, исходя из выражения (7), заключаем, что для младшей однородной части $v_N(\eta)$ степени N в указанном разложении справедливо следующее равенство:

$$(b^1 \cdot \nabla_\eta)(b^2 \cdot \nabla_\eta)[l(\eta)v_N(\eta)] = 0. \tag{8}$$

Обозначим через $w_n(\eta) = l(\eta)w_N(\eta)$ однородный полином степени $n = N + 2$. Поскольку операторы $(b^1 \cdot \nabla_\eta)$ и $(b^2 \cdot \nabla_\eta)$ перестановочны, решение уравнения (8) представимо в виде суммы двух функций:

$$w_n(\eta) = w_n^1\big((\tilde{b}^1 \cdot \eta)\big) + w_n^2\big((\tilde{b}^2 \cdot \eta)\big) = \alpha_n(\tilde{b}^1 \cdot \eta)^n + \beta_n(\tilde{b}^2 \cdot \eta)^n$$

с некоторыми коэффициентами α_n, β_n, причем функции w_n^1 и w_n^2 подбираются таким образом, чтобы удовлетворить уравнение (8).

Учитывая, что $w_n(\eta) = l(\eta) w_N(\eta)$, получаем очевидное соотношение

$$w_n(\eta)|_{l(\eta)=0} = 0,$$

которое отражает обратимость функции w_n в нуль на множестве нулей символа. Так как однородный символ $l(\eta) = (a^1 \cdot \eta)(a^2 \cdot \eta)$, то, придавая переменной η значения $\tilde{a}^1$ и $\tilde{a}^2$ поочередно и используя ортогональность векторов a^j и $\tilde{a}^j$, получим линейную однородную систему алгебраических уравнений относительно постоянных α_n, β_n

$$\begin{cases} \alpha_n(\tilde{b}^1 \cdot \tilde{a}^1)^n + \beta_n(\tilde{b}^2 \cdot \tilde{a}^1)^n = 0, \\ \alpha_n(\tilde{b}^1 \cdot \tilde{a}^2)^n + \beta_n(\tilde{b}^2 \cdot \tilde{a}^2)^n = 0 \end{cases} \tag{9}$$

с определителем

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} (\widetilde{b}^1 \cdot \widetilde{a}^1)^n & (\widetilde{b}^2 \cdot \widetilde{a}^1)^n \\ (\widetilde{b}^1 \cdot \widetilde{a}^2)^n & (\widetilde{b}^2 \cdot \widetilde{a}^2)^n \end{vmatrix}.$$

В силу двойственности уравнение-область (под которой понимается соответствие между краевой задачей (1),(2) и уравнением (8), доказанное в книге [5]) и нашего предположения о существовании нетривиального решения $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap S'$ исходной задачи, заключаем, что существует нетривиальное решение двойственной задачи

$$\begin{cases} (b^1 \cdot \nabla_\eta)(b^2 \cdot \nabla_\eta) w_n(\eta) = 0, \\ w_n(\eta)|_{l(\eta)=0} = 0 \end{cases}$$

в классе однородных полиномов степени $n \geqslant 2$. Отсюда следует, что при таком n найдется ненулевой набор коэффициентов (α_n, β_n), который является решением системы (9), что влечет выполнение равенства $\Delta_n = 0$. Необходимость доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Будем строить нетривиальное решение задачи Дирихле (1), (2) при выполнении равенства (3) для некоторого натурального n. Положим $u(x) = e^{-(\lambda \cdot x)} \cdot v(x) = e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2} \cdot v(x)$, где $\lambda \in T^C$.

Нетрудно убедиться, что

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \left(-\lambda_i + \frac{\partial}{\partial x_i}\right) v \cdot e^{-(\lambda \cdot x)},$$

откуда

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}+\lambda_i\Big)u=\frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot e^{-(\lambda\cdot x)},\quad i=1,2.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}=\Big(\lambda_i^2 v(x)-2\lambda_i\frac{\partial v}{\partial x_i}+\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\Big)\cdot e^{-(\lambda\cdot x)},$$

поэтому

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}+\lambda_i\Big)^2\{e^{-(\lambda\cdot x)}\cdot v(x)\}=$$
$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+2\lambda_i+\lambda_i^2\Big)\{e^{-(\lambda\cdot x)}\cdot v(x)\}=\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\cdot e^{-(\lambda\cdot x)},$$

$$\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}+\lambda_1\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_2}+\lambda_2\Big)\Big]\{e^{-(\lambda\cdot x)}\cdot v(x)\}=$$
$$=\Big[\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+\lambda_1\frac{\partial}{\partial x_2}+\lambda_2\frac{\partial}{\partial x_1}+\lambda_1\lambda_2\Big]\{e^{-(\lambda\cdot x)}\cdot v(x)\}=$$
$$=\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}\cdot e^{-(\lambda\cdot x)}.$$

С учетом проведенных вычислений получим:

$$\tilde{L}u=L\big(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda\big)u=L\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)v\cdot e^{-(\lambda\cdot x)}=0. \tag{10}$$

Следствием равенства (10) является уравнение $Lv=0$ с дифференциальным оператором $L=(a^1\cdot\nabla)(a^2\cdot\nabla)$, которому соответствует однородный символ $l(\eta)=(a^1\cdot\eta)(a^2\cdot\eta)$. Поскольку любое полиномиальное решение уравнения $Lv=0$ можно записать в виде

$$v(x)=v_1(\tilde{a}^1\cdot x)+v_2(\tilde{a}^2\cdot x),$$

то, очевидно,

$$u(x)=\big[v_1(\tilde{a}^1\cdot x)+v_2(\tilde{a}^2\cdot x)\big]\cdot e^{-(\lambda\cdot x)}.$$

Слагаемые v_1 и v_2 необходимо подобрать таким образом, чтобы функция u, помимо уравнения (2), удовлетворяла граничному условию Дирихле при некотором ненулевом наборе постоянных (α_n, β_n):

$$v_1(\tilde{a}^1 \cdot x) = \alpha_n \cdot (\tilde{a}_1 \cdot x)^n; \quad v_2(\tilde{a}^2 \cdot x) = \beta_n \cdot (\tilde{a}_2 \cdot x)^n.$$

Заметим, что полученная функция

$$u(x) = \left[\alpha_n \cdot (\tilde{a}_1 \cdot x)^n + \beta_n \cdot (\tilde{a}_2 \cdot x)^n\right] \cdot e^{-(\lambda \cdot x)} \tag{11}$$

будет удовлетворять краевому условию (1), если $x = \tilde{b}^1$ либо $x = \tilde{b}^2$ (это связано с тем, что стороны угла Ω лежат на прямых $(b^1 \cdot x) = 0$ и $(b^2 \cdot x) = 0$). Подставляя в выражение (11) вместо x указанные значения, получим систему

$$\begin{cases} [\alpha_n(\tilde{a}^1 \cdot \tilde{b}^1)^n + \beta_n(\tilde{a}^2 \cdot \tilde{b}^1)^n] e^{-(\lambda \cdot \tilde{b}^1)} = 0, \\ [\alpha_n(\tilde{a}^1 \cdot \tilde{b}^2)^n + \beta_n(\tilde{a}^2 \cdot \tilde{b}^2)^n] e^{-(\lambda \cdot \tilde{b}^2)} = 0, \end{cases}$$

которая равносильна следующей:

$$\begin{cases} \alpha_n(\tilde{a}^1 \cdot \tilde{b}^1)^n + \beta_n(\tilde{a}^2 \cdot \tilde{b}^1)^n = 0, \\ \alpha_n(\tilde{a}^1 \cdot \tilde{b}^2)^n + \beta_n(\tilde{a}^2 \cdot \tilde{b}^2)^n = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Так как определитель однородной системы (12) равен нулю по предположению, то эта система имеет бесконечное число ненулевых решений. Следовательно, наборы констант (α_n, β_n) нетривиальны, что означает нетривиальность построенного решения (11) задачи (1), (2). Достаточность доказана. □

3. Сопоставление с известным решением уравнения Лапласа.

Рассмотрим функцию $u = r^{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot \sin \frac{\pi\varphi}{\alpha}$, где α – величина угла Ω. Данная функция является гармонической всюду внутри Ω и обращается в нуль на сторонах угла. Поэтому эта функция есть решение однородной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в угле. Ясно, что это решение нетривиально и $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap S'$ при малых α. Покажем, что это решение не порождает решения задачи (1), (2) из пространства $C^2(\overline{\Omega}) \cap S'$ при допустимых сдвигах λ.

Вернемся к постановке задачи и выберем произвольным образом вектор $\lambda \in T^C$, например, так:

$$\lambda = (0,0) + i(-1,0) = (-i,0).$$

Поскольку символ оператора Лапласа $l(\eta) = \eta_1^2 + \eta_2^2$, то символ, получаемый сдвигом на выбранный выше вектор λ, имеет следующий вид:

$$l(\eta + \lambda) = (\eta_1 + \lambda_1)^2 + (\eta_2 + \lambda_2)^2 = l(\eta) - 2i\eta_1 - 1.$$

Учитывая формулу связи $Lu = F^{-1}(l(\xi) \cdot \hat{u})$ дифференциального оператора и символа при помощи обратного преобразования Фурье, построим по сдвинутому символу оператор

$$\widetilde{\Delta} = -\Delta + 2\frac{\partial}{\partial x_1} - 1.$$

Наряду с функцией $u = r^{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot \sin\frac{\pi\varphi}{\alpha}$, рассмотрим решение $\tilde{u} = e^{(\mu\cdot x)} \cdot u(x)$ уравнения $\widetilde{\Delta}\tilde{u} = 0$ с неоднородным символом и определим координаты вектора μ. Подставив $\tilde{u}$ в уравнение $\widetilde{\Delta}\tilde{u} = 0$, будем иметь:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}\tilde{u} =& \Big(\Delta - 2\frac{\partial}{\partial x_1} + 1\Big)\{e^{(\mu\cdot x)} \cdot u(x)\} = \\ &= e^{(\mu\cdot x)} \cdot (|\mu|^2 u + 2(\mu \cdot \nabla u) + \Delta u - 2\mu_1 u - 2\frac{\partial u}{\partial x_1} + 1) = 0.\end{aligned}$$

Перепишем последнее равенство в эквивалентной форме, используя тот факт, что $u \in \ker\Delta$:

$$|\mu|^2 u + 2(\mu \cdot \nabla u) - 2\mu_1 u - 2\frac{\partial u}{\partial x_1} + u = 0.$$

Отсюда заключаем, что $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$, то есть $\mu = (1,\ 0)$.

Стало быть, функция $e^{x_1} \cdot u$, где $u = r^{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot \sin\frac{\pi\varphi}{\alpha} \in \ker\Delta$, является решением уравнения $\widetilde{\Delta}\tilde{u} = 0$. Однако, несмотря на то, что $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap S'$, наше решение $\tilde{u}$ не является функцией умеренного роста, поскольку $Re(\mu \cdot x) > 0$.

4. Пример: оператор Лапласа с младшими членами.

Пусть в исходном неоднородном символе

$$\tilde{l}(\xi) = l(\eta + \lambda) = a(\eta_1 + \lambda_1)^2 + b(\eta_1 + \lambda_1)(\eta_2 + \lambda_2) + c(\eta_2 + \lambda_2)^2$$

коэффициенты $a = c = 1$, $b = 0$. Тогда этот символ, очевидно, соответствует лапласиану с младшей частью:

$$\widetilde{\Delta} = -\Delta + 2i\lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2i\lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + l(\lambda).$$

Сдвигая символ $l(\eta + \lambda) = (\eta_1 + \lambda_1)^2 + (\eta_2 + \lambda_2)^2$ на вектор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, принадлежащий трубчатой области T^C, получим однородный символ $l(\eta) = \eta_1^2 + \eta_2^2$, который соответствует оператору Лапласа Δ.

Поскольку $\Delta = (a^1 \cdot \nabla)(a^2 \cdot \nabla)$, где $a^1 = (1, i)$, $a^2 = (1, -i)$, и $b^1 = (0, 1)$, $b^2 = (\operatorname{tg}\alpha, -1)$, то $\tilde{a}^1 = (-i, 1)$, $\tilde{a}^2 = (i, 1)$, $\tilde{b}^1 = (-1, 0)$, $\tilde{b}^2 = (1, \operatorname{tg}\alpha)$. Отсюда следует, что определитель в равенстве (3) имеет вид:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} i^n & (\operatorname{tg}\alpha - i)^n \\ (-i)^n & (\operatorname{tg}\alpha + i)^n \end{vmatrix}.$$

Кроме того, условие $\Delta_n = 0$ преобразуется к виду: $(\frac{\operatorname{tg}\alpha + i}{\operatorname{tg}\alpha - i})^n = \pm 1$, что равносильно соотношению: α таково, что существует $k \in \mathbb{N}$, для которого

$$e^{-i\pi - 2i\alpha} = \begin{cases} e^{ik\frac{2\pi}{n}}, & \text{если } n \text{ четное,} \\ e^{\frac{i\pi}{n}(2k+1)}, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Таким образом, необходимое и достаточное условие единственности решения задачи (1) для уравнения $\widetilde{\Delta} u = 0$ будет иметь более простую формулировку, а именно:

для того чтобы однородная задача Дирихле для уравнения $\widetilde{\Delta} u = 0$ имела нетривиальное решение $u(x)$ в пространстве $C^2(\overline{\Omega}) \cap S'$, необходимо и достаточно, чтобы при некотором натуральном n угол α был π - рациональным, причем

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2n}(n - 2k), & \textit{если } n \textit{ четное,} \\ \frac{\pi}{2n}(n - 2k - 1), & \textit{если } n \textit{ нечетное,} \end{cases} \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Ввиду полученного результата, заключаем, что если угол $\alpha = \pi\frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ – рациональное число, то q совпадает с n, а p произвольно. При этом нетривиальное решение $u(x)$ задачи (1) для уравнения $\widetilde{\Delta} u = 0$ можно отыскать с помощью процедуры, описанной при доказательстве достаточности теоремы 1:

$$u(x) = [\alpha_n z^n + \beta_n \bar{z}^n] \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}.$$

Здесь $z = x_1 + ix_2$, коэффициенты α_n, β_n находятся из системы (12).

1. *Эскин Г.И.* Общие краевые задачи для уравнений главного типа в плоскости с угловыми точками // Успехи Матем. Наук. – 1963. – 18, вып. 3. – С. 241-242.
2. *Фуфаев В.В.* К задаче Дирихле для областей с углами // Докл. АН СССР. – 1960. – 131, № 1. – С. 37-39.
3. *Волков Е.А.* О решении краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике // Докл. АН. – 1963. – 147, № 1. – С. 13-16.
4. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Московского мат. о-ва – 1967. – 16 – С. 209-292.
5. *Бурский В.П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев: Наукова думка. – 2002. – 316 с.
6. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике – М: Наука. – 1979. – 320 с.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
ул.Р.Люксембург, 74
83114, Донецк, Украина
EKirichenko@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 10.04.07