©2007. **М.М. Бокало, Ю.Б. Дмитришин**

НЕЛІНІЙНА ДИНАМІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВОЇ УМОВИ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Досліджується задача для квазілінійного еліптичного рівняння другого порядку, заданого в циліндрі з твірними, паралельними осі t, де t — часова змінна, яка пробігає проміжок $(-\infty, T]$. Крайова умова на бічній поверхні циліндра має вигляд нелінійного еволюційного рівняння, що містить похідні шуканої функції за часовою і просторовими змінними першого порядку. Доводиться існування єдиного розв'язку та його неперервна залежність від вихідних даних при відсутності умов на зростання вихідних даних і поведінку розв'язку при $t \to -\infty$.

Ключові слова: динамічна крайова задача, динамічна крайова умова, квазілінійне еліптичне рівняння
MSC (2000): 35B30, 35J25, 35J60

Вступ.

Задачі такого типу, які розглядаються у даній роботі, виникають при описі багатьох процесів фізики і хімії [1]-[4]. Модельним прикладом таких задач є відшукання функції $u(x,t)$, $(x,t) \in \Omega \times (T_0, T)$ (Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $\Gamma = \partial\Omega$, $-\infty \leqslant T_0 < T \leqslant +\infty$), яка задовольняє співвідношення

$$\triangle_x u = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (T_0, T), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \nu} = f, \quad (x,t) \in \Gamma \times (T_0, T), \tag{2}$$

$$u\Big|_{\Gamma} \to u_0 \quad \text{при} \quad t \to T_0, \tag{3}$$

де $\triangle_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — лапласіан, $\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum\limits_{i=1}^{n} \nu_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ — символ диференціювання за нормаллю. Узагальнення задачі (1)-(3) у випадку $T_0 > -\infty$ досліджувалися багатьма авторами [4]-[15]. У роботах [4]-[7] вивчалася задача

$$\triangle_x u = f(x, t, u, \nabla u) \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, T), \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \nu} = g(x,t,u) \quad \text{на} \quad \Gamma \times (0,T), \tag{5}$$

з початковою умовою (3), де $T_0 = 0$, а у роботі [8], поряд з рівнянням (4) і умовою (3) розглядалося рівняння, яке відрізняється від (5) тим, що замість $\frac{\partial u}{\partial t}$ стоїть $|\frac{\partial u}{\partial t}|^{m-2}\frac{\partial u}{\partial t}$, $m > 1$. Подібна задача розглядалася і в [9]. Узагальнення ж задачі (4), (5), (3) на випадок, коли в головній частині рівняння типу (4) замість оператора Лапласа стоїть деякий лінійний еліптичний оператор, а в умові типу (5) замість похідної по нормалі — похідна по конормалі, досліджувалися в [10]-[13] та інших роботах. Зокрема, у [11] розглядався випадок, коли замість (4) стоїть параболічне рівняння, а в [12] — коли крайова умова виконується на частині межі. Вивчалися такого типу задачі і для квазілінійних рівнянь, зокрема, в роботі [13], коли рівняння та динамічна крайова умова — еволюційні та лінійні щодо похідних за просторовими змінними. Крім того, відмітимо, що задачі з динамічними крайовими умовами у півпросторі досліджувалися в [14] і [15]. У [16] і [17] доведено існування та єдиність розв'язку задачі типу (1)-(3) з квазілінійним еліптичним рівнянням замість (1) і нелінійною динамічною умовою замість (2) при $T_0 = 0$. У даній роботі ми розглядаємо подібну ситуацію, але при $T_0 = -\infty$ і за відсутності умови типу (3), тобто, узагальнення задачі (1), (2) з часовим проміжком $(-\infty, T]$. Такі задачі виникають, коли початковий момент достатньо віддалений від актуального і початкові умови не впливають на проходження процесу в даний час.

Відмітимо, що розв'язками задачі (1), (2) при $T_0 = -\infty$, $f = 0$ є будь-яка стала функція. Отже, для коректності цієї задачі потрібно покласти умову типу (3). Ми ж розглядаємо випадок, коли за рахунок сильної нелінійності для коректності нашої задачі не потрібно умов на поведінку розв'язку і зростання вихідних даних (наприклад, функції f в аналозі рівняння (2)) при $t \to -\infty$. Доводимо існування єдиного розв'язку досліджуваної задачі та його неперервну залежність.

Нехай n — натуральне число; $\mathbb{R}^n$ — евклідів простір, елементами якого є впорядковані набори $x = (x_1, \ldots, x_n)$ з n дійсних чисел, зі скалярним добутком $(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ і нормою $|x| =$

$\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2}$; Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею Γ класу C^2 (припускається, що Ω локально лежить по одну сторону від Γ); $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ — одиничний вектор зовнішньої до Γ нормалі; $T > 0$ — дійсне число.

Нехай $p \in (1; +\infty)$, а p' — таке, що $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Через $W_p^1(\Omega)$ позначимо простір Соболєва, який складається з функцій простору $L_p(\Omega)$, що мають узагальнені похідні першого порядку з $L_p(\Omega)$, з нормою $\|w\|_{W_p^1(\Omega)} = \Big(\int\limits_{\Omega} \big(\sum\limits_{i=1}^{n} |v_{x_i}|^p + |v|^p\big)\, dx\Big)^{1/p}$, а $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ — підпростір простору $W_p^1(\Omega)$, елементи якого мають рівний нулю слід на Γ. Під $W_p^{1/p'}(\Gamma)$ розумітимемо простір функцій з $L_p(\Gamma)$, які мають дробові похідні порядку $1/p'$ з $L_p(\Gamma)$ (див., наприклад, [3], [18]), а $W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)$ — спряжений до $W_p^{1/p'}(\Gamma)$ простір. Відомо, що простір $W_p^{1/p'}(\Gamma)$ можна ототожнити з простором слідів на Γ функцій з $W_p^1(\Omega)$. Через $\langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle_\Gamma$ позначимо канонічний добуток на $W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma) \times W_p^{1/p'}(\Gamma)$.

1. Допоміжні поняття і твердження.

Нехай $\mathbb{P} \overset{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{R} : p > 1\}$. Позначимо для $p \in \mathbb{P}$ через $\mathbb{A}_p$ множину, що складається з впорядкованих наборів з $n+1$ дійснозначних функцій, визначених на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, будь-який елемент $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ якої задовольняє умови:

1) для кожного $i \in \{0, \dots, n\}$ функція a_i є каратеодорівською, тобто для майже всіх (м.в.) $x \in \Omega$ функція $a_i(x, \cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — неперервна і для всіх $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ функція $a_i(\cdot, s, \xi) : \Omega \to \mathbb{R}$ — вимірна;

2) для м. в. $x \in \Omega$ і довільних $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$|a_i(x, s, \xi)| \leqslant A(|s|^{p-1} + |\xi|^{p-1}) + q_a(x), \quad i = \overline{0, n},$$

де $A = \text{const} \geqslant 0$, $q_a \in L_{p'}(\Omega)$;

3) існують стала $K_1 > 0$ і функція $h_a \geqslant 0$ з $L_1(\Omega)$ такі, що для м. в. $x \in \Omega$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,s,\xi)\xi_i +$$

$$+a_0(x,s,\xi)s \geqslant K_1\big(|s|^p + |\xi|^p\big) - h_a(x) \qquad \forall s \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^n;$$

4) для м. в. $x \in \Omega$ і будь-яких $s, s' \in \mathbb{R}$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $s \neq s'$ або $\xi \neq \xi'$, маємо

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_i(x,s,\xi) - a_i(x,s',\xi')\big)(\xi_i - \xi_i') +$$

$$+\big(a_0(x,s,\xi) - a_0(x,s',\xi')\big)(s - s') > 0.$$

Нехай $\mathbb{P}^* = \{p \in \mathbb{P} : p > 2\}$ і для кожного $p \in \mathbb{P}^*$ позначимо через $\mathbb{A}_p^*$ підмножину множини $\mathbb{A}_p$, складену з елементів $a \in \mathbb{A}_p$, які задовольняють умову:

5) існують сталі $K_2 > 0$, $K_3 > 0$ такі, що для майже всіх $x \in \Omega$

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_i(x,s,\xi) - a_i(x,r,\eta)\big)(\xi_i - \eta_i) + \big(a_0(x,s,\xi) - a_0(x,r,\eta)\big)(s - r) \geqslant$$

$$\geqslant K_2\big(|s-r|^p + |\xi - \eta|^p\big) \qquad \forall s, r \in \mathbb{R},\ \xi, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Зауваження 1. Прикладом елемента множини $\mathbb{A}_p^*$ є набір функцій $a_0(x,s,\xi) = |s|^{p-2}s$, $a_k(x,s,\xi) = |\xi_k|^{p-2}\xi_k$, $k = \overline{1,n}$.

Відомо [3], [18], що для довільного $p \in \mathbb{P}$ і будь-якої функції $v \in W_p^1(\Omega)$ існує її слід $v\big|_\Gamma$ на Γ та $v\big|_\Gamma \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$ і, навпаки, для довільної функції $\varphi \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$ знайдеться (і не одна) функція $v \in W_p^1(\Omega)$ така, що $v\big|_\Gamma = \varphi$. Крім того (див., наприклад, [19]), існує лінійний неперервний оператор $R : W_p^{1/p'}(\Gamma) \to W_p^1(\Omega)$ такий, що $R(\varphi)\big|_\Gamma = \varphi$.

Нехай $p \in \mathbb{P}$ і $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ — який-небудь елемент множини $\mathbb{A}_p$. Визначимо форму $g_a(\cdot\ ,\ \cdot) : W_p^1(\Omega) \times W_p^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ за правилом

$$g_a(v,w) = \int_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x,v,\nabla v) w_{x_i} + a_0(x,v,\nabla v) w \Big\} dx,\ v, w \in W_p^1(\Omega). \qquad (6)$$

Покладемо $V_a \stackrel{\text{def}}{=} \big\{ v \in W_p^1(\Omega) : \ g_a(v,w) = 0 \quad \forall w \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) \big\}$. Очевидно, що елементами простору V_a є не що інше, як узагальнені розв'язки з $W_p^1(\Omega)$ рівняння

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x, v, \nabla v) + a_0(x, v, \nabla v) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{7}$$

З результатів [20] легко отримати таке твердження.

Твердження 1. *Нехай $a \in \mathbb{A}_p$, де $p \in \mathbb{P}$. Тоді для будь-якого $\varphi \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$ існує єдина функція $v \in V_a$ така, що $v\big|_\Gamma = \varphi$, і, навпаки, для кожної функції $v \in V_a$ її слід $v\big|_\Gamma$ належить $W_p^{1/p'}(\Gamma)$.*

З цього твердження випливає, що між просторами $W_p^{1/p'}(\Gamma)$ і V_a існує взаємно однозначна відповідність. Позначимо через J_a оператор, який реалізує цю відповідність, тобто оператор

$$J_a : W_p^{1/p'}(\Gamma) \to V_a$$

такий, що для кожного $w \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$

$$J_a(w) \stackrel{\text{def}}{=} v,$$

де v належить до V_a і задовольняє граничну умову

$$v\big|_\Gamma = w, \tag{8}$$

тобто, v — узагальнений розв'язок задачі Діріхле для рівняння (7) з граничною умовою (8).

На підставі твердження 1 оператор J_a визначений коректно і є бієктивним відображенням $W_p^{1/p'}(\Gamma)$ на V_a.

Лема 1. *Нехай $a \in \mathbb{A}_p$, де $p \in \mathbb{P}$. Тоді існують сталі $C_a > 0$, $\widetilde{C}_a \geqslant 0$ такі, що*

$$\big\| J_a(w) \big\|_{W_p^1(\Omega)} \leqslant C_a \big\| w \big\|_{W_p^{1/p'}(\Gamma)} + \widetilde{C}_a \quad \forall w \in W_p^{1/p'}(\Gamma). \tag{9}$$

Доведення. Нехай $w \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$, $v = J_a(w)$. Покладемо $\widetilde{v} = R(w)$. З означення оператора J_a маємо

$$\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, v, \nabla v)(v - \widetilde{v})_{x_i} + a_0(x, v, \nabla v)(v - \widetilde{v}) \Big\}\, dx = 0,$$

звідки

$$\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=1}^{n} a_i(x,v,\nabla v)v_{x_i} + a_0(x,v,\nabla v)v\Big\}\,dx = \\ = \int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=1}^{n} a_i(x,v,\nabla v)\widetilde{v}_{x_i} + a_0(x,v,\nabla v)\widetilde{v}\Big\}\,dx. \quad (10)$$

З (10), на підставі умов **2)**, **3)** і нерівності Гельдера, здобуваємо

$$K_1\|v\|^p_{W^1_p(\Omega)} - \|h_a\|_{L_1(\Omega)} \leqslant C_1\Big(\|v\|^{p-1}_{W^1_p(\Omega)} + \|q_a\|_{L_{p'}(\Omega)}\Big)\cdot\|\widetilde{v}\|_{W^1_p(\Omega)},$$

де C_1 — деяка додатна стала.

Звідси, використовуючи нерівність Юнга, отримаємо

$$K_1\|v\|^p_{W^1_p(\Omega)} - \|h_a\|_{L_1(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant \varepsilon\|v\|^p_{W^1_p(\Omega)} + C_2(\varepsilon)\|q_a\|^{p'}_{L_{p'}(\Omega)} + C_3(\varepsilon)\|\widetilde{v}\|^p_{W^1_p(\Omega)}, \quad (11)$$

де $\varepsilon > 0$ — довільне число, $C_2(\varepsilon)$, $C_3(\varepsilon) > 0$ — сталі, що залежить від ε, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

З (11), вибравши значення ε досить малим і врахувавши те, що $\|\widetilde{v}\|_{W^1_p(\Omega)} \leqslant \|R\|\cdot\|w\|_{W^{1/p'}_p(\Gamma)}$, здобудемо (9). $\square$

Лема 2. *Нехай $a \in \mathbb{A}^*_p$, де $p \in \mathbb{P}^*$. Тоді існують сталі $C_{a,1} > 0$, $C_{a,2} \geqslant 0$ такі, що правильна нерівність*

$$\|J_a(w_1) - J_a(w_2)\|_{W^1_p(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant C_{a,1}\Big(\|w_1\|^p_{W^{1/p'}_p(\Gamma)} + \|w_2\|^p_{W^{1/p'}_p(\Gamma)} + C_{a,2}\Big)^{(p-1)/p^2} \times \\ \times \|w_1 - w_2\|^{1/p}_{W^{1/p'}_p(\Gamma)} \qquad \forall\, w_1, w_2 \in W^{1/p'}_p(\Gamma). \quad (12)$$

Доведення. Нехай $w_1, w_2 \in W^{1/p'}_p(\Gamma)$. Покладемо $v_1 \overset{\text{def}}{=} J_a(w_1)$, $v_2 \overset{\text{def}}{=} J_a(w_2)$.

З означення оператора J_a маємо для довільної $\widetilde{\varphi} \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n \big(a_i(x, v_1, \nabla v_1) - a_i(x, v_2, \nabla v_2) \big) \widetilde{\varphi}_{x_i} + \\ + \big(a_0(x, v_1, \nabla v_1) - a_0(x, v_2, \nabla v_2) \big) \widetilde{\varphi} \Big\} \, dx = 0. \quad (13)$$

Нехай $\widetilde{v}_1 = R(w_1)$, $\widetilde{v}_2 = R(w_2)$. Покладемо в (13) $\widetilde{\varphi} = (v_1 - v_2) - (\widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2)$.

, після простих перетворень, отримаємо

$$\begin{gathered} \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n \big(a_i(x, v_1, \nabla v_1) - a_i(x, v_2, \nabla v_2) \big) (v_{1,x_i} - v_{2,x_i}) + \\ + \big(a_0(x, v_1, \nabla v_1) - a_0(x, v_2, \nabla v_2) \big) (v_1 - v_2) \Big\} \, dx = \\ = \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n \big(a_i(x, v_1, \nabla v_1) - a_i(x, v_2, \nabla v_2) \big) (\widetilde{v}_{1,x_i} - \widetilde{v}_{2,x_i}) + \\ + \big(a_0(x, v_1, \nabla v_1) - a_0(x, v_2, \nabla v_2) \big) (\widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2) \Big\} \, dx. \end{gathered} \quad (14)$$

Оцінюючи відповідним чином ліву і праву частину (14) на підставі умов **2)**, **5)**, та використовуючи нерівність Гельдера, здобудемо

$$\begin{gathered} K_2 \int\limits_\Omega \Big\{ |v_1 - v_2|^p + |\nabla v_1 - \nabla v_2|^p \Big\} \, dx \leqslant \\ \leqslant \int\limits_\Omega \Big\{ \Big(A\big(|v_1|^{p-1} + |v_2|^{p-1} + |\nabla v_1|^{p-1} + |\nabla v_2|^{p-1}\big) + 2|q_a(x)| \Big) \times \\ \times \Big(\sum_{i=1}^n \big| \widetilde{v}_{1,x_i} - \widetilde{v}_{2,x_i} \big| + \big| \widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2 \big| \Big) \Big\} \, dx \leqslant \end{gathered} \quad (15)$$

$$\leqslant C_4 \Big(\|v_1\|^p_{W_p^1(\Omega)} + \|v_2\|^p_{W_p^1(\Omega)} + \|q_a(x)\|^{p'}_{L_{p'}(\Omega)} \Big)^{1/p'} \|\widetilde{v}_1 - \widetilde{v}_2\|_{W_p^1(\Omega)},$$

де C_4 — деяка додатна стала, яка не залежна від v_1, v_2, $\widetilde{v}_1$, $\widetilde{v}_2$.

З (15), після простих перетворень, матимемо

$$\|v_1-v_2\|^p_{W^1_p(\Omega)}\leqslant$$

$$\leqslant C_5\Big(\|v_1\|^p_{W^1_p(\Omega)}+\|v_2\|^p_{W^1_p(\Omega)}+\|q_a(x)\|^{p'}_{L_{p'}(\Omega)}\Big)^{1/p'}\|\widetilde{v}_1-\widetilde{v}_2\|_{W^1_p(\Omega)},$$

де $C_5>0$ — деяка стала.

Звідси та з леми і того, що оператор R є лінійним та неперервним, здобудемо (12). $\square$

Відмітимо, що для довільного елемента $v\in V_a$ і будь-яких $w,\widetilde{w}\in W^1_p(\Omega)$ таких, що $w-\widetilde{w}\in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ (тобто $w\big|_\Gamma=\widetilde{w}\big|_\Gamma$) маємо $g_a(v,w)=g_a(v,\widetilde{w})$, оскільки $g_a(v,w-\widetilde{w})=0$. Звідси випливає, що для довільного $v\in V_a$ функціонал

$$W^{1/p'}_p(\Gamma)\ni\varphi\to g_a(v,\widetilde{\varphi})\in\mathbb{R},\quad \text{де } \widetilde{\varphi}\in W^1_p(\Omega),\quad \widetilde{\varphi}\big|_\Gamma=\varphi$$

$\big($зокрема, $\widetilde{\varphi}=R(\varphi)\big)$, є коректно визначеним.

Легко показати, що цей функціонал лінійний. Доведемо, що він неперервний. Справді, з означення (див. (6)) та властивостей форми g_a і оператора R, використовуючи нерівність Гельдера, маємо

$$\begin{aligned}&|g_a(v,\widetilde{\varphi})|=|g_a(v,R(\varphi))|\leqslant\\ &\leqslant\Big(\int\limits_\Omega\sum_{i=0}^n\big|a_i(x,v,\nabla v)\big|^{p'}dx\Big)^{1/p'}\|R(\varphi)\|_{W^1_p(\Omega)}\leqslant\\ &\leqslant\|R\|\Big(\int\limits_\Omega\sum_{i=0}^n\big|a_i(x,v,\nabla v)\big|^{p'}dx\Big)^{1/p'}\|\varphi\|_{W^{1/p'}_p(\Gamma)},\forall\varphi\in W^{1/p'}_p(\Gamma).\end{aligned}\tag{16}$$

Звідси випливає неперервність даного функціоналу.

Отож, можна визначити оператор $G_a:V_a\to W^{-1/p'}_{p'}(\Gamma)$ за правилом: для будь-якого $v\in V_a$ значення $G_a(v)$ таке, що

$$\langle G_a(v),\varphi\rangle=g_a(v,\widetilde{\varphi})\quad\forall\ \varphi\in W^{1/p'}_p(\Gamma),\ \widetilde{\varphi}\in W^1_p(\Omega),\ \widetilde{\varphi}\big|_\Gamma=\varphi.\tag{17}$$

Згідно з (16) і (17) на підставі умови **2)** маємо

$$\big\|G_a(v)\big\|_{W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)} \leqslant \big\|R\big\| \Big(\int\limits_\Omega \sum_{i=0}^n \big|a_i(x,v,\nabla v)\big|^{p'}\,dx\Big)^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant (n+1)^{1/p'}\big\|R\big\|\,\big\|A\big(|v|^{p-1}+|\nabla v|^{p-1}\big)+q_a\big\|_{L_{p'}(\Omega)} \leqslant \tag{18}$$

$$\leqslant C_6\big(\big\|v\big\|^{p-1}_{W_p^1(\Omega)}+\big\|q_a\big\|_{L_{p'}(\Omega)}\big),$$

де $C_6>0$ — стала, яка від v не залежить.

Зауваження 2. Якщо $a_i\big(\cdot,v(\cdot),\nabla v(\cdot)\big)\in W_{p'}^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, $i=\overline{1,n}$, для деякого $v\in V_a$, то

$$G_a\big(v\big)(x)=\sum_{i=1}^n a_i\big(x,v(x),\nabla v(x)\big)\cos\big(\nu(x),x_i\big),\quad x\in\Gamma, \tag{19}$$

тобто, $G_a(v)$ є похідною v по конормалі. Справді, з (6) і (17), використовуючи формулу Гріна, маємо

$$\big\langle G_a(v),\varphi\big\rangle=\int\limits_\Omega\Big\{\sum_{i=1}^n a_i\big(x,v(x),\nabla v(x)\big)\widetilde{\varphi}_{x_i}(x)+$$

$$+a_0\big(x,v(x),\nabla v(x)\big)\widetilde{\varphi}(x)\Big\}\,dx=$$

$$=\int\limits_\Gamma\sum_{i=1}^n a_i\big(x,v(x),\nabla v(x)\big)\cdot\cos\big(\nu(x),x_i\big)\cdot\varphi(x)\,d\Gamma+ \tag{20}$$

$$+\int\limits_\Omega\Big\{-\sum_{i=1}^n\tfrac{d}{dx_i}a_i\big(x,v(x),\nabla v(x)\big)+$$

$$+a_0\big(x,v(x),\nabla v(x)\big)\Big\}\widetilde{\varphi}(x)\,dx.$$

Оскільки $v\in V_a$, то (див. (7)) з (20) в силу довільності $\varphi\in W_p^{1/p'}(\Gamma)$ маємо (19).

Під $\mathbb{B}_p$, де $p\in\mathbb{P}$, розумітимемо множину функцій, будь-який елемент b якої визначений на $\Gamma\times\mathbb{R}$, приймає значення в $\mathbb{R}$ та задовольняє умови:

6) функція b є каратеодорівською, тобто для м.в. (в сенсі $(n-1)$-вимірної міри) $x \in \Gamma$ функція $b(x,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервною і для будь-якого $\xi \in \mathbb{R}$ функція $b(\cdot,\xi) : \Gamma \to \mathbb{R}$ — вимірна;

7) для м. в. $x \in \Gamma$ і довільних $s \in \mathbb{R}$

$$|b(x,s)| \leqslant B|s|^{p-1} + q_b(x),$$

де $B = \mathrm{const} \geqslant 0$, $q_b \in L_{p'}(\Gamma)$;

8) існують стала $K_4 \geqslant 0$ та функція $h_b \geqslant 0$ з $L_1(\Gamma)$ такі, що для м. в. $x \in \Gamma$

$$b(x,s)s \geqslant K_4|s|^p - h_b(x) \qquad \forall s \in \mathbb{R};$$

9) для м. в. $x \in \Gamma$ і будь-яких $s, s' \in \mathbb{R}$

$$\big(b(x,s) - b(x,s')\big)(s - s') \geqslant 0.$$

Нехай b — який-небудь елемент простору $\mathbb{B}_p$. Для кожного $\varphi \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$ визначимо оператор $B_b : W_p^{1/p'}(\Gamma) \to W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)$ за правилом:

$$\big\langle B_b(\varphi), \psi \big\rangle = \int\limits_\Gamma b(x,\varphi)\psi \, d\Gamma \qquad \forall \psi \in W_p^{1/p'}(\Gamma). \tag{21}$$

2. Формулювання задачі і основного результату.

Введемо ще деякі позначення. Під $L_{q,\mathrm{loc}}\big((-\infty,T];X\big)$, де X — банахів простір, $q \in [1,+\infty)$, $T \in \mathbb{R}$, розумітимемо простір визначених на $(-\infty,T)$ зі значеннями в X функцій, звуження яких на будь-який скінченний інтервал $(t_1,t_2) \subset (-\infty,T)$ належить $L_q\big(t_1,t_2;X\big)$.

Покладемо

- $\mathbb{F}_p \overset{\mathrm{def}}{=} L_{p',\,\mathrm{loc}}\big((-\infty,T];\ W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)\big)$;
- $\mathbb{U}_p \overset{\mathrm{def}}{=} \big\{u :\ u \in L_{p,\,\mathrm{loc}}\big((-\infty,T];\ W_p^1(\Omega)\big), u\big|_\Gamma \in C\big((-\infty,T];L_2(\Gamma)\big)\big\}$;

- $\mathbb{V}_p \overset{\text{def}}{=} \big\{ v :\ v \in L_{p,\,\mathrm{loc}}\big((-\infty, T];\ W_p^{1/p'}(\Gamma)\big) \cap C\big((-\infty, T]; L_2(\Gamma)\big),$
  $v_t \in L_{p',\,\mathrm{loc}}\big((-\infty, T];\ W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)\big), \mathrm{supp}\ v \subset (-\infty, T)$ — компакт$\big\}$.

Сформулюємо задачу, яку будемо досліджувати. Нехай $\widetilde{\mathbb{P}} \subset \mathbb{P}$ і для кожного $p \in \widetilde{\mathbb{P}}$ маємо деякі підмножини $\widetilde{\mathbb{D}}_p$, $\widetilde{\mathbb{U}}_p$ відповідно множин $\mathbb{D}_p \overset{\text{def}}{=} \mathbb{A}_p \times \mathbb{B}_p \times \mathbb{F}_p$ та $\mathbb{U}_p$.

Задача

$$\boldsymbol{DP}(\widetilde{\mathbb{D}}_p, \widetilde{\mathbb{U}}_p : p \in \widetilde{\mathbb{P}})$$

(a **d**ynamical **p**roblem) полягає в такому: для кожних $(a, b, f) \in \widetilde{\mathbb{D}}_p$ знайти множину

$$\boldsymbol{SDP}(a, b, f)$$

(a set of **s**olutions of the **d**ynamical **p**roblem) елементів u з $\widetilde{\mathbb{U}}_p$ таких, що

- $u(\cdot\,, t) \in V_a$ для м. в. $t \in (-\infty, T)$;
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{T} \Big\{ -\big\langle v_t, u\big|_\Gamma \big\rangle_\Gamma + \big\langle G_a(u) + B_b(u\big|_\Gamma) - f,\ v \big\rangle_\Gamma \Big\}\, dt = 0$ для довільних $v \in \mathbb{V}_p$.

Скажемо, що задача $\boldsymbol{DP}(\widetilde{\mathbb{D}}_p, \widetilde{\mathbb{U}}_p : p \in \widetilde{\mathbb{P}})$ *однозначна (розв'язна, однозначно розв'язна)*, якщо для кожних $(a, b, f) \in \widetilde{\mathbb{D}}_p$ множина $\boldsymbol{SDP}(a, b, f)$ має *не більше одного елемента (не порожня, складається тільки з одного елемента)*.

Задача $\boldsymbol{DP}(\widetilde{\mathbb{D}}_p, \widetilde{\mathbb{U}}_p : p \in \widetilde{\mathbb{P}})$ називається *коректною*, якщо $\widetilde{\mathbb{D}}_p$, $\widetilde{\mathbb{U}}_p$ є просторами зі збіжністю і ця задача *однозначно розв'язна та для будь-якого елемента (a, b, f) класу $\widetilde{\mathbb{D}}_p$ і довільної послідовності $\big\{(a^k, b^k, f_k)\big\}_{k=1}^{\infty}$ елементів $\widetilde{\mathbb{D}}_p$ такої, що*

$$(a^k, b^k, f_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (a, b, f) \quad \text{в} \quad \widetilde{\mathbb{D}}_p,$$

маємо

$$u_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в} \quad \widetilde{\mathbb{U}}_p,$$

де $u \in \boldsymbol{SDP}(a, b, f)$, $u_k \in \boldsymbol{SDP}(a^k, b^k, f_k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Покладемо $\mathbb{D}_p^* \overset{\text{def}}{=} \mathbb{A}_p^* \times \mathbb{B}_p \times \mathbb{F}_p$. Скажемо, що послідовність елементів з $\mathbb{D}_p^*$ збіжна, якщо збіжні послідовності їх компонент відповідно в $\mathbb{A}_p^*$, $\mathbb{B}_p$ та $\mathbb{F}_p$. Збіжність послідовностей в просторі $\mathbb{F}_p$

визначається стандартно. Пояснимо, що означає збіжність послідовностей в просторах $\mathbb{A}_p^*$ та $\mathbb{B}_p$.

Скажемо, що послідовність $\{a^k\}_{k=1}^{\infty}$ збіжна до a в $\mathbb{A}_p^*$, якщо елементи a^k $(k \in \mathbb{N})$ і елемент a задовольняють умову **5)** з одними і тими ж сталими K_2 і K_3, а також

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \sup_{(s,\xi)\in\mathbb{R}^{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\big|a_i^k(x,s,\xi) - a_i(x,s,\xi)\big|}{|s|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + 1} = 0.$$

Послідовність $\{b^k\}_{k=1}^{\infty}$ збігається до b в $\mathbb{B}_p$, якщо для елементів b^k $(k \in \mathbb{N})$ і елемента b виконується рівність

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Gamma} \sup_{s\in\mathbb{R}} \frac{\big|b^k(x,s) - b(x,s)\big|}{|s|^{p-1} + 1} = 0.$$

Теорема 1. *Задача* $\boldsymbol{DP}(\mathbb{D}_p^*, \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*)$ *— коректна.*

Доведення. Нехай $p \in \mathbb{P}^*$ і $(a,b,f) \in \mathbb{D}_p^*$. Зведемо задачу на відшукання множини $\boldsymbol{SDP}(a,b,f)$ до знаходження розв'язків задачі без початкової умови для деякого операторного диференціального рівняння.

Визначимо оператор $A_{a,b} : W_p^{1/p'}(\Gamma) \to W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)$ за правилом

$$A_{a,b} \stackrel{\text{def}}{=} G_a \circ J_a + B_b. \tag{22}$$

Розглянемо задачу: знайти функцію

$$w \in L_{p,\,\mathrm{loc}}\big((-\infty,T];\ W_p^{1/p'}(\Gamma)\big) \cap C\big((-\infty,T]; L_2(\Gamma)\big),$$

яка задовольняє рівняння

$$w' + A_{a,b} w = f \quad \text{в} \quad D'\big((-\infty,T); W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)\big). \tag{23}$$

Відзначимо, що в (23) оператор $A_{a,b}$ діє на функції з

$$L_{p,\,\mathrm{loc}}\big((-\infty,T];\ W_p^{1/p'}(\Gamma)\big)$$

і приймає значення в $L_{p',\,\mathrm{loc}}\big((-\infty,T];\ W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)\big)$. Цю задачу далі коротко називатимемо задачею (23), а функцію w — її розв'язком.

Легко переконатися, використовуючи лему 2 та лему 4.1 глави III монографії [16], що коли $w(x,t)$, $(x,t) \in \Omega \times (0;T)$, — розв'язок задачі (23), то функція

$$u(x,t) \overset{\text{def}}{=} \big(J_a w\big)(x,t), \ (x,t) \in \Omega \times (-\infty, T),$$

належить $\boldsymbol{SDP}(a,b,f)$.

Доведемо існування єдиного розв'язку задачі (23), використавши теореми 3.1 і 3.2 роботи [21]. Для цього покажемо, що оператор $A_{a,b} : W_p^{1/p'}(\Gamma) \to W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)$ є рівномірно монотонним, коерцитивним, обмеженим і семінеперервним.

Зауважимо, що згідно з [18] для довільної функції $\widetilde{w} \in W_p^1(\Omega)$ такої, що $w = \widetilde{w}\big|_\Gamma$, правильною є така нерівність

$$\big\|\widetilde{w}\big\|_{W_p^1(\Omega)} \geqslant C_7 \big\|w\big\|_{W_p^{1/p'}(\Gamma)}, \tag{24}$$

де $C_7 > 0$ — деяка стала, яка не залежить від $\widetilde{w}$.

Доведемо спочатку, що оператор $A_{a,b}$ — рівномірно монотонний. Нехай $w_1, w_2 \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$. На підставі (6), (17), (21), (24) і умов **5)** та **9)** маємо

$$\begin{gathered}
\big\langle A_{a,b} w_1 - A_{a,b} w_2, w_1 - w_2 \big\rangle_\Gamma = \\
= \big\langle G_a\big(J_a w_1\big) - G_a\big(J_a w_2\big), w_1 - w_2 \big\rangle_\Gamma + \\
+ \big\langle B_b w_1 - B_b w_2, w_1 - w_2 \big\rangle_\Gamma = \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n \big(a_i(x, J_a w_1, \nabla J_a w_1) - \\
- a_i(x, J_a w_2, \nabla J_a w_2)\big) \big(J_a w_1 - J_a w_2\big)_{x_i} + \\
+ \big(a_0(x, J_a w_1, \nabla J_a w_1) - a_0(x, J_a w_2, \nabla J_a w_2)\big) \times \\
\times \big(J_a w_1 - J_a w_2\big) \Big\} \, dx + \int\limits_\Gamma \big(b(x, w_1) - b(x, w_2)\big)(w_1 - w_2) \, d\Gamma \geqslant \\
\geqslant C_8 \big\|J_a w_1 - J_a w_2\big\|^p_{W_p^1(\Omega)} \geqslant C_9 \big\|w_1 - w_2\big\|^p_{W_p^{1/p'}(\Gamma)},
\end{gathered} \tag{25}$$

де C_8 і C_9 — деякі додатні сталі.

Коерцитивність оператора $A_{a,b}$, врахувавши зауваження 1.4 глави III монографії [20], випливає з його рівномірної монотонності.

Доведемо обмеженість оператора $A_{a,b}$. Врахувавши лему 1, (18), (21) і (22), на підставі умови **7)** отримаємо

$$\begin{aligned}\big\|A_{a,b}w\big\|_{W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)} &= \big\|G_a\big(J_a w\big)+B_b w\big\|_{W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)} \leqslant \\ &\leqslant \big\|G_a\big(J_a w\big)\big\|_{W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)} + \big\|B_b w\big\|_{W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)} \leqslant \\ &\leqslant C_{10}\big\|w\big\|^{p-1}_{W_p^{1/p'}(\Gamma)} + C_{11}, \qquad \forall w \in W_p^{1/p'}(\Gamma),\end{aligned}$$

де $C_{10} > 0$, $C_{11} \geqslant 0$ — деякі сталі.

Тепер покажемо, що оператор $A_{a,b}$ — семінеперервний, тобто функція

$$[0;1] \ni s \xrightarrow{\Psi} \big\langle A_{a,b}(v+sw), w\big\rangle_\Gamma \in \mathbb{R}$$

є неперервною для будь-яких $v, w \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$.

Нехай $v, w \in W_p^{1/p'}(\Gamma)$ — довільні фіксовані елементи. Покладемо $w^s \overset{\text{def}}{=} v + sw$, $s \in [0;1]$. Очевидно, що $w^s \xrightarrow{s\to 0} w^0 = v$ в $W_p^{1/p'}(\Gamma)$ та майже скрізь на Γ і множина $\big\{w^s \,:\, s \in [0;1]\big\}$ — обмежена. Використовуючи це, на підставі умов **6)** та **7)** і теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла маємо

$$\Big|\int\limits_\Gamma \big\{b(x,w^s) - b(x,w^0)\big\} w\,dS\Big| \xrightarrow{s\to 0} 0. \tag{26}$$

Покладемо $\widetilde{w} \overset{\text{def}}{=} R(w)$ і $\widetilde{w}^s \overset{\text{def}}{=} J_a(w^s)$ для довільного $s \in [0,1]$. З леми 2 випливає, що $\widetilde{w}^s \xrightarrow{s\to 0} \widetilde{w}^0$ в $W_p^1(\Omega)$, коли $w^s \xrightarrow{s\to 0} w^0$ в $W_p^{1/p'}(\Gamma)$. А тому, використовуючи **1)**, **2)** та теорему Лебега про мажоруючу збіжність, дістанемо

$$\begin{aligned}&\big|\big\langle G_a\big(J_a w^s\big) - G_a\big(J_a w^0\big), w\big\rangle_\Gamma\big| = \\ &\quad= \Big|\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{i=1}^n \big(a_i(x,\widetilde{w}^s,\nabla\widetilde{w}^s) - a_i(x,\widetilde{w}^0,\nabla\widetilde{w}^0)\big)\widetilde{w}_{x_i} + \\ &\qquad+ \big(a_0(x,\widetilde{w}^s,\nabla\widetilde{w}^s) - a_0(x,\widetilde{w}^0,\nabla\widetilde{w}^0)\big)\widetilde{w}\Big\}\,dx\Big| \xrightarrow{s\to 0} 0.\end{aligned} \tag{27}$$

З (26) і (27) легко випливає, що $\Psi(s) \to \Psi(0)$ при $s \to 0$, що і треба було показати.

Отже, задача (23) має єдиний розв'язок, а тому задача $\boldsymbol{DP}(\mathbb{D}_p^*, \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*)$ є однозначно розв'язною.

Нехай $(a^k, b^k, f_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (a, b, f)$ в $\mathbb{D}_p^*$, де $u \in \boldsymbol{SDP}(a, b, f)$, $u_k \in \boldsymbol{SDP}(a^k, b^k, f_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді, очевидно, $w(t) \overset{\text{def}}{=} u\big|_\Gamma(\cdot, t)$ та $w_k(t) \overset{\text{def}}{=} u_k\big|_\Gamma(\cdot, t)$, $t \in (-\infty, T)$, $(k \in \mathbb{N})$ є розв'язками відповідних задач типу (23). На підставі (22) з (23) маємо

$$\begin{gathered}\big\langle w' - w_k', w - w_k\big\rangle_\Gamma + \big\langle \big(G_{a^k} \circ J_a\big) w -\\ -\big(G_{a^k} \circ J_{a^k}\big) w_k, w - w_k\big\rangle_\Gamma + \big\langle B_{b^k} w - B_{b^k} w_k, w - w_k\big\rangle_\Gamma =\\ = \big\langle \big(G_{a^k} \circ J_a\big) w - \big(G_a \circ J_a\big) w, w - w_k\big\rangle_\Gamma +\\ + \big\langle B_{b^k} w - B_b w, w - w_k\big\rangle_\Gamma + \big\langle f - f_k, w - w_k\big\rangle_\Gamma\end{gathered} \tag{28}$$

майже скрізь на $(-\infty, T)$.

Аналогічно, як при доведенні (25), можна показати, що існує стала $C_{12} > 0$ така, що

$$\begin{gathered}\big\langle \big(G_{a^k} \circ J_a\big) w - \big(G_{a^k} \circ J_{a^k}\big) w_k, w - w_k\big\rangle_\Gamma +\\ + \big\langle B_{b^k} w - B_{b^k} w_k, w - w_k\big\rangle_\Gamma \geqslant C_{12} \big\|w - w_k\big\|^p_{W_p^{1/p'}(\Gamma)}\end{gathered} \tag{29}$$

майже скрізь на $(-\infty, T)$.

Тепер, використовуючи нерівність Гельдера, зробимо таку оцінку

$$\begin{gathered}\big\langle \big(G_{a^k} \circ J_a\big) w - \big(G_a \circ J_a\big) w, w - w_k\big\rangle_\Gamma +\\ + \big\langle B_{b^k} w - B_b w, w - w_k\big\rangle_\Gamma =\\ = \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{i=1}^n \big(a_i^k(x, J_a w, \nabla J_a w) - a_i(x, J_a w, \nabla J_a w)\big) \times\\ \times \big(Rw - Rw_k\big)_{x_i} + \big(a_0^k(x, J_a w, \nabla J_a w) -\\ - a_0(x, J_a w, \nabla J_a w)\big)\big(Rw - Rw_k\big)\Big\}\, dx +\end{gathered} \tag{30}$$

$$
\begin{gathered}
+\int\limits_{\Gamma}\big(b^k(x,w)-b(x,w)\big)(w-w_k)\,d\Gamma \leqslant \\
\leqslant \bigg(\int\limits_{\Omega}\sum_{i=0}^{n}\Big|a_i^k(x,J_aw,\nabla J_aw)-a_i(x,J_aw,\nabla J_aw)\Big|^{p'}dx\bigg)^{1/p'}\times \\
\times\big\|Rw-Rw_k\big\|_{W_p^1(\Omega)}+\bigg(\int\limits_{\Gamma}\Big|b^k(x,w)-b(x,w)\Big|^{p'}d\Gamma\bigg)^{1/p'}\big\|w-w_k\big\|_{L_p(\Gamma)}
\end{gathered}
$$

майже скрізь на $(-\infty,T)$.

З (30), використовуючи спочатку лінійність та неперервність оператора R, а тоді нерівність Юнга, дістанемо

$$
\begin{gathered}
\Big\langle\big(G_{a^k}\circ J_a\big)w-\big(G_a\circ J_a\big)w,w-w_k\Big\rangle_{\Gamma}+ \\
+\Big\langle B_{b^k}w-B_bw,w-w_k\Big\rangle_{\Gamma}\leqslant \\
\leqslant C_{13}(\varepsilon)\bigg(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\sup_{(s,\xi)\in\mathbb{R}^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\big|a_i^k(x,s,\xi)-a_i(x,s,\xi)\big|}{|s|^{p-1}+|\xi|^{p-1}+1}\bigg)^{p'}\times \\
\times\int\limits_{\Omega}\Big(\big|J_aw\big|^p+\big|\nabla J_aw\big|^p+1\Big)\,dx+ \\
+C_{14}(\varepsilon)\bigg(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Gamma}\sup_{s\in\mathbb{R}}\frac{\big|b^k(x,s)-b(x,s)\big|}{|s|^{p-1}+1}\bigg)^{p'}\cdot\int\limits_{\Gamma}\Big(\big|w\big|^p+1\Big)\,d\Gamma+ \\
+\varepsilon\big\|w-w_k\big\|^p_{W_p^{1/p'}(\Gamma)},
\end{gathered}
\tag{31}
$$

де $\varepsilon>0$ — довільне число, $C_{13}(\varepsilon)>0$, $C_{14}(\varepsilon)>0$ — сталі, які залежать від ε і не залежать від a, a^k, b, b^k, w і w_k.

Відмітимо, що майже скрізь на $(-\infty,T)$ (див. [21]) виконується така рівність

$$
\Big\langle w'(t)-w_k'(t),w(t)-w_k(t)\Big\rangle_{\Gamma}=\frac{1}{2}\Big(\big\|w(t)-w_k(t)\big\|^2_{L_2(\Gamma)}\Big)' \tag{32}
$$

і нерівність

$$
\Big\langle f-f_k,w-w_k\Big\rangle_{\Gamma}\leqslant C_{15}(\varepsilon)\big\|f-f_k\big\|^{p'}_{W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)}+\varepsilon\big\|w-w_k\big\|^p_{W_p^{1/p'}(\Gamma)}, \tag{33}
$$

де $\varepsilon > 0$ — будь-яке число, $C_{15}(\varepsilon) > 0$ — стала, яка залежать від ε.

Нехай t_0 — яке-небудь число з проміжку $(-\infty, T)$, $r > p/(p-2)$ — довільне число. Розглянемо функцію $\theta(t)$ визначену за правилом: $\theta(t) \overset{\text{def}}{=} (t-t_0)^r$, якщо $t \in [t_0, T]$, і $\theta(t) = 0$ при $t \in (-\infty, t_0)$.

Домножимо ліву і праву частину рівності (28) на $\theta(t)$, а тоді проінтегруємо її по t від t_0 до $\tau \in (t_0, T]$, використовуючи при цьому рівність (32) і "формулу інтегрування частинами". З отриманої рівності, використавши оцінки (29), (31), (33) та вибравши значення ε досить малим, матимемо

$$\begin{gathered}
\theta(\tau) \int\limits_{\Gamma} \left| w(x,\tau) - w_k(x,\tau) \right|^2 d\Gamma + \\
+ C_{16} \int\limits_{t_0}^{\tau} \left\| w(t) - w_k(t) \right\|^p_{W_p^{1/p'}(\Gamma)} \theta(t)\, dt \leqslant \\
\leqslant C_{17} \left(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \sup_{(s,\xi)\in\mathbb{R}^{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\left| a_i^k(x,s,\xi) - a_i(x,s,\xi) \right|}{|s|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + 1} \right)^{p'} \times \\
\times \int\limits_{t_0}^{\tau} \left(\left\| J_a w(t) \right\|^p_{W_p^1(\Omega)} + 1 \right) \theta(t)\, dt + C_{18} \left(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Gamma} \sup_{s\in\mathbb{R}} \frac{\left| b^k(x,s) - b(x,s) \right|}{|s|^{p-1} + 1} \right)^{p'} \times \\
\times \int\limits_{t_0}^{\tau} \left(\left\| w(t) \right\|^p_{W_p^{1/p'}(\Gamma)} + 1 \right) \theta(t)\, dt + \\
+ C_{19} \int\limits_{t_0}^{\tau} \left\| f(t) - f_k(t) \right\|^{p'}_{W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)} \theta(t)\, dt + \\
+ \int\limits_{t_0}^{\tau} \int\limits_{\Gamma} \left| w(x,t) - w_k(x,t) \right|^2 \theta'(t)\, d\Gamma\, dt
\end{gathered} \tag{34}$$

для деяких додатних сталих C_{16}, C_{17} C_{18} і C_{19}.

Оцінимо тепер останній доданок в (34), використовуючи нерівність Юнга

$$\begin{gathered}
\int\limits_{t_0}^{\tau} \int\limits_{\Gamma} \left| w(x,t) - w_k(x,t) \right|^2 \theta'(t)\, d\Gamma\, dt \leqslant \\
\leqslant \varepsilon \int\limits_{t_0}^{\tau} \left\| w(t) - w_k(t) \right\|^p_{W_p^{1/p'}(\Gamma)} \theta(t)\, dt + C_{20}(\varepsilon)(\tau - t_0)^{r - 2/(p-2)},
\end{gathered} \tag{35}$$

де $\varepsilon > 0$ -деяке число, $C_{20}(\varepsilon)$ -додатна стала, яка залежить від ε.

З (34), використовуючи при цьому (35) з достатньо малим ε, для довільного $t_1 \in (t_0, T)$ матимемо

$$\max_{\tau\in[t_1,T]} \int_\Gamma \bigl|w(x,\tau) - w_k(x,\tau)\bigr|^2 \, d\Gamma + \int_{t_1}^{T} \bigl\|w(t) - w_k(t)\bigr\|^p_{W_p^{1/p'}(\Gamma)} dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{T-t_0}{t_1-t_0}\right)^r \Biggl\{ C_{21} \left(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \sup_{(s,\xi)\in\mathbb{R}^{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\bigl|a_i^k(x,s,\xi) - a_i(x,s,\xi)\bigr|}{|s|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + 1} \right)^{p'} \times$$

$$\times \int_{t_0}^{T} \Bigl(\bigl\|J_a w(t)\bigr\|^p_{W_p^1(\Omega)} + 1 \Bigr) \, dt + \tag{36}$$

$$+ C_{22} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Gamma} \sup_{s\in\mathbb{R}} \int_{t_0}^{\tau} \Bigl(\bigl\|w(t)\bigr\|^p_{W_p^{1/p'}(\Gamma)} + 1 \Bigr) \, dt +$$

$$+ C_{23} \int_{t_0}^{T} \bigl\|f(t) - f_k(t)\bigr\|^{p'}_{W_{p'}^{-1/p'}(\Gamma)} \, dt + C_{24}(T - t_0)^{-2/(p-2)} \Biggr\},$$

де C_{21}, C_{22}, C_{23} і C_{24} — деякі додатні сталі.

На підставі (36), з довільності t_0 і t_1, та того, що $2/(p-2) > 0$ і $(a^k, b^k, f_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} (a, b, f)$ в $\mathbb{D}_p^*$, випливає збіжність w_k до w в просторі $L_{p,\mathrm{loc}}\bigl((-\infty, T];\, W_p^{1/p'}(\Gamma)\bigr) \cap C\bigl((-\infty, T]; L_2(\Gamma)\bigr)$, а згідно з лемою 2 і збіжність u_k до u в $L_{p,\mathrm{loc}}\bigl((-\infty, T];\, W_p^1(\Omega)\bigr)$. Отже, ми показали, що $u_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} u$ в просторі $\mathbb{U}_p$, а це і завершує доведення коректності задачі $\boldsymbol{DP}(\mathbb{D}_p^*, \mathbb{U}_p : p \in \mathbb{P}^*)$. $\square$

1. *Friedman A., Shinbort M.* The initial value problem for the lianerized equations of water-waves // J. Math. Mech. - 1967. - **17**. - P. 107-180.
2. *Garipov R. M.* On the linear theory of gravity waves: the theorem of existence and uniqueness // Archive Rat. Mech. Anal. -1967. - **14**. - P. 352-362.
3. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Е.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. - М.: Мир, 1967. - 372 с.
4. *Bejenaru I., Diaz J. I. and Vrabie I. I.* An abstract approximate controllability result and applications to elliptic and parabolic systems with dynamic boundary conditions // Electron. J. Differential Equations. -2001. - No. **50**. - P. 1-19.
5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. - М.: Мир, 1972. - 588 с.
6. *Fila M., Quittner P.* Global solutions of the Laplace equation with a nonlinear dynamical boundary condition // Math. Methods Appl. Sci. - 1997. - **20**. - P. 1325-1333.

7. *Igbida N., Kirane M.* A degenerate diffusion problem with dynamical boundary conditions // Math. Ann. - 2002. - **323**. - P. 377-396.
8. *Vitillaro E.* On the Laplace equation with nonlinear dynamical boundary conditions // Proc. London Math. Soc. (3) - 2006. - **93**. - P. 418-446.
9. *Vitillaro E.* Global existence for the heat equation with nonlinear dynamical boundary conditions // Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A. - 2005. - **135**. - P. 1-33.
10. *Grobbelarr-Van Dalsen M.* On B-evolution theory and dynamic boundary conditions on a partion of the boundary // Appl. Anal. -1991. - **40**. - P. 151-172.
11. *Arrieta J. M., Quittner P. and Rodriguez-Bernaul A.* Parabolic problems with nonlinear dynamical boundary conditions and singular initial data // Differential Integral Equations. - 2001. - **14**. - P. 1487-1510.
12. *Escher J.* Nonlinear elliptic systems with dynamic boundary conditions // Math. Z. -1992. - **210**. - P. 413-439.
13. *Hintermann T.* Evolution equations with dynamic boundary conditions // Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A. - 1989. - **113**. - P. 43-60.
14. *Amann H., Fila M.* A Fujita-type theorem for the Laplace equation with a dynamical boundary condition // Acta. Math. Univ. Comenianae Vol. LXVI - 1997. - **2**. - P. 321-328.
15. *Kirane M., Nabana E. and Pohozaev S. I.* Nonexistence of global solutions to an elliptic equation with a dynamical boundary condition // Bol. Soc. Paran. Mat. - 2004. - **22**. - P. 9-16.
16. *Showalter R. E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. vol 49, Amer. Math. Soc., Providence, 1997. - 278 p.
17. *Andreu F., Igbida N., Mazon J. M., Toledo J.* A degenerate elliptic-parabolic problem with nonlinear dynamical boundary conditions // Interfaces Free Bound. 8 - 2006. - **4**. - P. 447-479.
18. *Adams R. A.* Sobolev spaces. New York; San Francisco; London, 1975. - 278 p.
19. *Gagliardo E.* Caratterizzazione delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili // Rend. Sem Mat. Padova. - 1957. - **27**. - p. 284—305.
20. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. - М.: Мир, 1978. - 336 с.
21. *Бокало Н. М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных нараболических уравнений // Труды семинара им. И. Г. Петровского. - 1989. - Вып. **14**. - С. 3-44.

Львівський національний університет
імені Івана Франка
вул. Університетська, 1,
79000, Львів, Україна
`mm_bokalo@franko.lviv.ua`

Отримано 1.03.07