 И.Д. Пукальский

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЯМИ

При помощи принципа максимума и априорных оценок изучаются первая краевая задача, задача с косой производной и односторонняя краевая задача с интегральным нелокальным условием по временной переменной для параболических уравнений со степенными особенностями в коэффициентах по временной и пространственным переменным. В гельдеровых пространствах со степенным весом установлено существование и единственность решений поставленных задач.

Ключевые слова: принцип максимума, краевая задача, априорная оценка, функция Грина, нелокальное условие
MSC (2000): 35K35

Постановка задачи и основной результат. Пусть t_0, T - фиксированные положительные числа, $t_0 < T$, D - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей ∂D. В области $Q = (0,T] \times D$ рассмотрим задачу нахождения функций (u,p), на которых функционал

$$I(p) = \int\limits_0^T dt \int\limits_D \mathcal{F}(t,x,u,p)dx \tag{1}$$

достигает минимального значения в классе функций $p \in V = \{p \,|\, p \in C^\alpha(Q), \psi_1 \leq p \leq \psi_2\}$, где $u(t,x,p)$ удовлетворяет при $t > 0$, $t \neq t_0$ уравнению

$$\begin{aligned} Lu \equiv \Bigg[\partial_t - \sum_{ij=1}^n A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \\ - \sum_{i=1}^n A_i(t,x)\partial_{x_i} - A_0(t,x)\Bigg] u(t,x,p) = f(t,x,p) \end{aligned} \tag{2}$$

и нелокальному условию

$$u(0,x,p) + \int\limits_0^T q(\tau,x)u(\tau,x,p)d\tau = \varphi(x), \tag{3}$$

а на боковой поверхности $\Gamma = (0,T] \times \partial D$ краевому условию

$$[u(t,x,p) - \psi(t,x)]\,|_{\Gamma} = 0; \tag{4}$$

Пусть l_1, l_2 - произвольные действительные числа, $\rho(x,\partial D)$ расстояние от точки $x \in D$ до границы ∂D. Характер особенности коэффициентов дифференциального выражения L будут характеризовать функции: $s_1(l_1,t) = |t-t_0|^{l_1}$ при $|t-t_0| \le 1$, $s_1(l_1,t) = 1$, если $|t-t_0| \ge 1$; $s_2(l_2,x) = \rho^{l_2}(x,\partial D)$ при $\rho(x,\partial D) \le 1$, $s_2(l_2,x) = 1$, если $\rho(x,\partial D) \ge 1$; $s(l;P) = s_1(l_1,t)s_2(l_2,x)$.

Обозначим через r, $\beta_k^{(\nu)}$, $\gamma^{(\nu)}$, $\mu_i^{(\nu)}$, α – вещественные числа, $\nu \in \{1,2\}$, $\beta_k^{(\nu)} \in (-\infty,\infty)$, $\mu_i^{(\nu)} \ge 0$, $i \in \{0,\dots,n\}$, $\gamma^{(\nu)} \ge 0$, $\alpha \in (0,1)$, $[r]$ – целая часть r, $Q^{(0)} = Q \setminus \{(t,x) \in Q \,\big|\, t = t_0, x \in D\}$.

Определим функциональные пространства, в которых исследуется задача (1)-(4).

$C^r(\gamma,\beta;l;Q)$ – пространство функций u, $(t,x) \in \overline{Q}$, имеющих частные производные в $Q^{(0)}$ вида $\partial_t^j \partial_x^k u$, $2j + |k| \le [r]$ и конечное значение нормы $\|u;\gamma,\beta;l;Q\|_r$, где, например,

$$\|u;\gamma,\beta;0;Q\|_0 = \sup_{P\in\overline{Q}} |u(P)| = \|u;Q\|_0,$$

$$\|u;\gamma,\beta;l;Q\|_2 = \sup_{P\in\overline{Q}}[s(l;P)|u(P)|] + \sum_{i=1}^{n} \sup_{P\in\overline{Q}}[s(l+\gamma-\beta_i;P)|\partial_{x_i}u(P)| +$$

$$+ \sum_{ij=1}^{n} \sup_{P\in\overline{Q}}[s(l+2\gamma-\beta_i-\beta_j;P)|\partial_{x_i}\partial_{x_j}u(P)] + \sup_{P\in\overline{Q}}[s(l+2\gamma;P)|\partial_t u(P)|].$$

$C^r(\mu_j;Q)$ - множество функций u_j, $(t,x) \in \overline{Q}$, имеющих частные производные в $Q^{(0)}$ вида $\partial_x^{\lambda} u_j$, $|\lambda| \le [r]$, для которых конечна норма $\|u_j;\mu_j;Q\|_r$, где, например,

$$\|u_j;\mu_j;Q\|_{[r]} = \sum_{|k|\le[r]} \sup_{P\in\overline{Q}}[s(\mu_j + |k|;P)|\partial_x^k u_j(P)|].$$

Относительно задачи $(1)-(4)$ предполагаем выполнение условий:

a) коэффициенты $A_{ij} \in C^{\alpha}(\beta_i + \beta_j, Q)$, $A_i \in C^{\alpha}(\mu_i, Q)$, $i \in \{0,\dots,n\}$, $A_0 < 0$, и для произвольного вектора $\xi = (\xi_1,..,\xi_n)$

выполняется неравенство

$$\pi_1|\xi|^2 \leq \sum_{kj=1}^{n} s(\beta_i+\beta_j;P)A_{ij}(P)\xi_i\xi_j \leq \pi_2|\xi|^2,$$

где π_1, π_2 – положительные константы;

б) функции $\varphi \in C^{2+\alpha}(\tilde{\gamma},\tilde{\beta};0;D)$, $\psi \in C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;Q)$, $\gamma^{(\nu)} = \max\left(\max\big(1+\beta_i^{(\nu)}\big);\, \max(\mu_i^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)});\, \dfrac{\mu_0^{(\nu)}}{2}\right)$, $\nu \in \{1,2\}$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\tilde{\gamma} = (0,\gamma^{(2)})$, $\tilde{\beta} = (\beta^{(1)},\beta^{(2)})$, $\beta^{(\nu)} = (\beta_1^{(\nu)},\cdot,\beta_n^{(\nu)})$, $\partial D \in C^{2+\alpha}$, $q(t,x) \in C^{2+\alpha}(Q)$, $\sup\limits_{\overline{D}} \displaystyle\int_0^T |q(\tau,x)|d\tau \leq \lambda_0 < 1$,

$$\left[\psi(0,x)+\int_0^T |q(\tau,x)\psi(\tau,x)|d\tau-\varphi(x)\right]_{\partial D} = 0.$$

в) функции $\psi_\nu \in C^\alpha(Q)$, $f(t,x,p(t,x)) \equiv \Phi(t,x) \in C^\alpha(\gamma,\beta;0;Q)$, $f(t,x,p)$, $\mathcal{F}(t,x,u,p)$ определены соответственно в областях $M_1 = Q \times [\psi_1,\psi_2]$, $M_2 = Q \times \mathbb{R}^n \times [\psi_1,\psi_2]$, имеют гельдеровские производные второго порядка по переменным u, p,которые как функции (t,x) принадлежат $C^\alpha(Q)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для задачи (2) – (4) выполнены условия а)–в). Тогда существует единственное решение задачи (2) – (4) в пространстве $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;Q)$ и для него справедлива оценка*

$$\|u;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \leq C\Big(\|\Phi;\gamma,\beta;0;Q\|_\alpha + \\ +\|\varphi;\tilde{\gamma},\tilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha}+\|\varphi;\gamma,\beta;0;D\|_{2+\alpha}\Big). \tag{5}$$

Теорема 1 доказывается по схеме теоремы 1 из [2].

Для исследования задачи (1)-(4) построим последовательность решений краевых задач с гладкими коэффициентами, предельные значения которых будут решениями задачи (1)-(4).

Пусть $Q_m = Q \setminus \{(t,x) \in Q \,\big|\, s_1(1,t) \geq m_1^{-1},\ s_2(1,x) \geq m_2^{-1}\}$ – последовательность областей, сходящаяся к области Q при $m_1 \to$

∞, $m_2 \to \infty$, $m = (m_1, m_2)$, m_1, m_2 - натуральные числа, $m_1 > 1$, $m_2 > 1$.

Рассмотрим в области Q задачу нахождения решения уравнения

$$(L_1 u_m) = \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} - a_0(t,x)\right] u_m(t,x) = f_m(t,x), \tag{6}$$

$$u_m(0,x) + \int_0^T q(\tau,x)u_m(\tau,x)d\tau = \varphi_m(x), \tag{7}$$

$$\left[u_m(t,x) - \psi_m(t,x)\right]|_\Gamma = 0; \tag{8}$$

Коэффициенты a_{ij}, a_i, a_0, функции f_m, φ_m, ψ_m есть непрерывное продолжение коэффициентов A_{ij}, A_i, A_0, функций Φ, ψ_m, φ из области Q_m в область $\overline{Q} \setminus Q_m$ [8]. Например, коэффициенты

$$a_i = \min\left(A_i t, x, A_i(m_1^{-1}, x)\right) \text{ при } t_0 \le m_1^{-1}$$

и

$$a_i = \min\left(A_i t, x, \tfrac{m_1(t_0 - t)+1}{2} A_i(t_0 - m_1^{-1}, x) + \tfrac{m_1(t_0 - t)+1}{2} A_i(t_0 + m_1^{-1}, x)\right)$$

при $t_0 \ge m_1^{-1}, (t,x) \in (0;T] \times \{x \in D |\, s_2(1,x) \ge m_2^{-1}\}$, $i = \{0, 1, \cdot, n\}$. Для $(t,x) \in Q \setminus \{(t,x) \in Q |\, t \in (0,T], s_2(1,x) \ge m_2^{-1}\}$ коэффициенты $a_i(t,x)$ являются решениями внешней задачи

$$\partial_t \omega_i = \Delta \omega_i, \quad , \omega_i(0,x) = 0, \quad \omega_i|_{\Gamma_m} = a_i|_{\Gamma_m},$$

$\Gamma_m = (0;T] \times \{x \in D |\, s_2(1,x) = m_2^{-1}$.

Теорема 2. *Если $u_m(t,x)$ решение задачи (6)-(8) в области Q и выполнены условия а), б), $f_m(t,x) \in C(Q)$, то для $u_m(t,x)$ справедлива оценка*

$$|u_m| \le \max\left\{\|f_m a_0^{-1}; Q\|_0, \|\psi_m; Q\|_0, \left\|\varphi\left(1 - \int_0^T |q(\tau,x)| d\tau\right)^{-1}; D\right\|_0\right\}. \tag{9}$$

Доказательство оценки (9) проводится по схеме доказательства теоремы 2.1 из [3, с.22]. Отличие только в случае, когда $0 < \max\limits_{\overline{Q}} u_m = \max\limits_{D} u_m(0,x) = u_m(0,x^{(1)})$. Тогда, используя нелокальное условие (7), находим

$$u_m(0,x^{(1)}) \leq \max_{D}\left(\varphi_m(x)\left[1-\int\limits_0^T |q(\tau,x)|e^{-\lambda\tau}d\tau\right]^{-1}\right).$$

Аналогично получаем оценку в случае

$$0 \geq \min_{\overline{Q}} u_m(t,x) = \min_{\overline{D}} u_m(0,x).$$

В задаче (6)-(8) сделаем замену

$$u_m(t,x) = v_m(t,x) + \varphi_m(t,x). \tag{10}$$

Тогда $v_m(t,x)$ будет решением краевой задачи

$$(L_1 v_m)(t,x) = f_m(t,x) - (L_1\psi_m)(t,x) \equiv F_m(t,x), \tag{11}$$

$$\begin{gathered} v_m(0,x) + \int\limits_0^T q(\tau,x)v_m(\tau,x)d\tau = \\ = \varphi_m(x) - \psi_m(0,x) - \int\limits_0^T q(\tau,x)\psi_m(\tau,x)d\tau \equiv \Phi(x), \end{gathered} \tag{12}$$

$$v_m|_\Gamma = 0. \tag{13}$$

Теорема 3. *Если выполнены условия Теоремы 1, то существует единственное решение задачи (11) - (13) в пространстве* $C^{2+\alpha}(Q)$.

Доказательство. Рассмотрим однородную задачу Дирихле

$$(L_1 v_m)(t,x) = F_m(t,x), \quad v_m(0,x) = \Phi(x), \quad v_m|_\Gamma = 0. \tag{14}$$

Обозначим через $E_m(t,x,\tau,\xi)$ – функция Грина задачи (14) из [3, с. 469]

Тогда решение задачи (11) – (13) ищем в виде

$$v_m(t,x) = \int\limits_D E_m(t,x,0,\xi) v_m(0,\xi) d\xi + v_m^{(1)}(t,x), \qquad (15)$$

где $v_m^{(1)}(t,x)$ – решение задачи (14)[4,7].

Согласно теореме 2, для $v_m^{(1)}(t,x)$ справедлива оценка

$$|v_m^{(1)}| \le \max\left(\|\Phi_m\|_{C(D)}, \|F_m\, a_0^{-1}\|_{C(Q)}\right)$$

и $E_m(t,x,\tau,\xi) \ge 0$, $0 \le \int\limits_D E_m(t,x,0,\xi) d\xi \le 1$.

Удовлетворяя нелокальное условие (12), имеем

$$v_m(0,x) + \int\limits_0^T q(\tau,x) d\tau \int\limits_D E_m(\tau,x,0,\xi) v_m(0,\xi) d\xi =$$

$$= -\int\limits_0^T q(\tau,x) v_m^{(1)}(\tau,x) d\tau \equiv F(x). \qquad (16)$$

Решение интегрального уравнения (16) находится методом последовательных приближений. Поскольку

$$\left\| \int\limits_0^T q(\tau,x) d\tau \int\limits_D E_m(\tau,x,0,\xi) d\xi| \right\| \le \int\limits_0^T |q(\tau,x)| d\tau \le \lambda_0 < 1,$$

то для решения уравнения (16) справедлива оценка

$$|v_m(0,x)| \le \frac{\lambda_0)}{1-\lambda_0} \|F\|_{C(D)}.$$

Запишем равенство (16) в виде

$$v_m(0,x) = F(x) - \int\limits_0^T q(\tau,x) d\tau \int\limits_D E_m(\tau,x,0,\xi) v_m(0,\xi) d\xi.$$

Учитывая оценку (17) и ограничения на функции $q(\tau,x)$, $\varphi_m(x)$, $\psi(x)$, $f_m(x)$, получим, что $v_m(0,x) \in C^{2+\alpha}(D)$. Поэтому, в силу формулы (15) получаем, что $v_m(t,x) \in C^{2+\alpha}(Q)$.

Поскольку $\lambda_0 < 1$, то решение интегрального уравнения (16) представим в виде

$$v_m(0,x) = F(x) + \int\limits_D G(x,y)F(y)dy, \tag{18}$$

где $G(x,y)$- резольвента, удовлетворяющая интегральному уравнению

$$G(x,\xi) = \int\limits_0^T q(\tau,x)E_m(\tau,x,0,\xi)d\tau + \\ + \int\limits_0^T q(\tau,x)d\tau \int\limits_D E_m(\tau,x,0,\xi)G(y,\xi)dy,$$

решая которое, находим

$$\left| \int\limits_D G(\tau,\xi)d\xi \right| \leq \frac{1}{1-\lambda_0}.$$

Подставляя в (18) вместо $F(x)$ значение

$$F(x) = -\int\limits_0^T q(\tau,x) \left(\int\limits_D E_m(\tau,x,0,\xi)\Phi(\xi)d\xi + \right. \\ \left. + \int\limits_0^\tau d\beta \int\limits_D E_m(\tau,x,\beta,\xi)F_m(\beta,\xi) \right) d\tau$$

и меняя порядок интегрирования, получим

$$v_m(0,x) = \int\limits_D G_m(T,0,x,\xi)\Phi_m(\xi)d\xi + \\ + \int\limits_0^T d\beta \int\limits_D G_m(T,\beta,x,\xi)F_m(\beta,\xi)d\xi, \tag{19}$$

где

$$G_m(T,x,\beta,\xi) = \int\limits_{\beta}^{T} q(\tau,x)E_m(\tau,x,\beta,\xi)\Phi(\xi)d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\beta}^{T} d\tau \int\limits_{D} G(x,y)q(\tau,y)E_m(\tau,y,\beta,\xi)dy.$$

Подставляя (19) в (15) и меняя порядок интегрирования, находим

$$\begin{aligned} v_m(t,x) &= \int\limits_D \Gamma_m(t,x,0,\xi)\Phi_m(\xi)d\xi + \\ &+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D \Gamma_m(t,x,\tau,\xi)F_m(\tau,\xi)d\xi, \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\Gamma_m(t,x,\tau,\xi) + \int\limits_D E_m(t,x,0,y)G_m(T,y,\tau,\xi)dy.$$

Введем в пространстве $C^{2+\alpha}(Q)$ норму $\|u_m;\gamma,\beta,l;Q\|_{2+\alpha}$, эквивалентную при каждом фиксированном m_1, m_2 гельдеровой норме, которая определяется так же, как норма $\|u_m;\gamma,\beta,l;Q\|_{2+\alpha}$, только вместо функций $s_1(l_1,t)$, $s_2(l_2,t)$ берем соответственно $d_1(l_1,t) = |t-t_0|^{l_1}$, если $|t-t_0| \geq m_1^{-1}$, $d_1(l_1,t) = m_1^{-1}$, если $|t-t_0| \leq m_1^{-1}$ и $d_2(l_2,x) = s_2(l_2,x)$, если $\rho(x,\partial D) \geq m_2^{-1}$, $d_2(l_2,x) = m_2^{-l_2}$, если $\rho(x,\partial D) \leq m_2^{-1}$, $d(l;P) = d_1(l_1,t)d_2(l_2,x)$

При налагаемых условиях на гладкость коэффициентов дифференциального выражения L_1 существует единственное решение задачи (6)-(8), которое принадлежит $C^{2+\alpha}(Q)$ и имеет при каждом m_1, m_2 конечную норму $\|u_m;\gamma,\beta,l;Q\|_{2+\alpha}$. Оценку для этой нормы устанавливает теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для* *решения задачи (6)-(8) справедлива оценка*

$$\|u_m;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le C\left(\|\Phi;\gamma,\beta;0;Q\|_{\alpha} + \right.$$
$$\left. + \left\|\varphi;\widetilde{\gamma},\widetilde{\beta};0;D\right\|_{2+\alpha} + \|\psi;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\right). \tag{21}$$

Неравенство (21) получается по методике работы [1, теорема 11]. Установим оценку (5) Правая часть неравенства (21) не зависит от m_1, m_2 и последовательности $\{V_m^{(0)}\} = \{|u_m(P)|\}$, $\{V_m^{(1)}\} = \{d(\gamma-\beta_i;P)|\partial_{x_i}u_m(P)|\}$, $\{V_m^{(2)}\} = \{d(2\gamma-\beta_i-\beta_j;P)|\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m(P)|\}$, $\{V_m^{(3)}\} = \{d(2\gamma;P)|\partial_t u_m(P)|\}$, $P \in Q$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. По теореме Арчела существуют последовательности $\{V_{m(j)}^{(k)}\}$, $k \in \{0,1,2,3\}$, равномерно сходящиеся в Q. Переходя к пределу при $j \to \infty$ получим единственное решение задачи (2)-(4) $u \in C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;Q)$ и справедлива оценка (5).

Задача оптимального управления. Для разрешимости задачи (1)-(4) построим последовательность решений задач, предельное значение которой будет решением задачи (1)-(4).

Рассмотрим в области Q задачу нахождения функций (u_m,p), на которых функционал

$$I(p) = \int\limits_0^T dt \int\limits_D \mathcal{F}(t,x,u,p)dx \tag{22}$$

достигает минимального значения в классе функций $p \in V$, где u_m является решением краевой задачи

$$(L_1 u_m)(t,x) = f_m(t,x),$$
$$u_m(0,x,p) + \int\limits_0^T q(\tau,x)u_m(\tau,x)d\tau = \varphi_m(x) \tag{23}$$
$$[u_m(t,x,p) - \psi(t,x)]\,|_{\Gamma} = 0.$$

Введем обозначения

$$\mu(t,x) = \int\limits_t^T d\tau \int\limits_D \Gamma_m(\tau,\xi,t,x)\partial_{u_m}\mathcal{F}(t,x,u_m,p)d\xi$$

$$H(u_m,\mu,p)\equiv\mathcal{F}(t,x,u_m,p)+\mu(t,x)f(t,x,p).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Если функция $H(u_m,\mu,p)$ по аргументу p монотонно возрастающая для $p\in V$, то оптимальным управлением будет $p^{(0)}(t,x)=\psi_1(t,x)$, а оптимальным решением задачи (22), (23) будет $u_m(t,x,p^{(0)})=u_m(t,x,\psi_1(t,x))$*

Если функция $H(u_m,\mu,p)$ по аргументу p монотонно убывающая для $p\in V$, то оптимальным управлением будет $p^{(0)}(t,x)=\psi_2(t,x)$, а оптимальным решением задачи (22), (23) будет $u_m(t,x,p^{(0)})=u_m(t,x,\psi_2(t,x))$.

Доказательство. Пусть Δp произвольное приращение управления $p(t,x)$, $p+\Delta p\in V$. Обозначим через Δu_m соответствующее приращение функции $u_m(t,x,p)$. Тогда Δu_m в области Q будет решением краевой задачи

$$(L_1\Delta u_m)(t,x)=f_m(t,x,p+\Delta p)-f_m(t,x,p)\equiv\Delta f(t,x,p),$$

$$\Delta u_m(0,x,p)+\int\limits_0^T q(\tau,x)\Delta u_m(\tau,x,p)d\tau=0,\qquad \Delta u_m|_\Gamma=0. \quad (24)$$

Разложим приращение функционала $I(p)$ по формуле Тейлора

$$\Delta I=\int\limits_0^T dt\int\limits_D\left[\partial_{u_m}\mathcal{F}(t,x,u_m,p)\Delta u_m+\partial_p\mathcal{F}(t,x,u_m,p)\Delta p+\right.$$
$$\left.+O\left(|\Delta u_m|^2\right)+O\left(|\Delta p|^2\right)\right]d\xi. \quad (25)$$

Заметим, что Δu_m- решение задачи (24). Поэтому, используя формулу (20), получим

$$\Delta u_m(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_D\Gamma_m(t,x,\tau,\xi)\Delta f(\tau,\xi)d\xi, \quad (26)$$

Подставляя (26) в (25) и изменяя при этом порядок интегрирования, находим

$$\Delta I=\int\limits_0^T dt\int\limits_D\left[\partial_p H(u_m,\mu,p)\Delta p+O\left(|\Delta u_m|^2\right)+O\left(|\Delta p|^2\right)\right]d\xi. \quad (27)$$

Если $p = p^{(0)}(t,x)$ и $H(u_m,\mu,p)$ удовлетворяет условиям теоремы 5, то при достаточно малом Δp имеем $\Delta I > 0$.

Если $H(u_m,\mu,p)$ по аргументу p не является монотонной, то $\partial_p H(u_m,\mu,p)\Delta p$ знакопеременная величина то есть $\partial_p H(u_m,\mu,p)$ в $Q^+ \subset Q$ и $\partial_p H(u_m,\mu,p)$ в $Q^- = Q\setminus Q^+$.

Используя теорему о среднем значении, находим, что

$$\Delta I = \partial_p H(u_m^+,\mu^+,p^+)\iint\limits_{Q^+}\Delta p dxdt-$$

$$-\left|\partial_p H(u_m^+,\mu^-,p^-)\right|\iint\limits_{Q^-}\Delta p dxdt + \partial_p H(u_m^+,\mu^+,p^+)\int\limits_0^T\!\!\int\Delta p dxdt+$$

$$+\iint\limits_{Q}\left[O\left(|\Delta u_m|^2\right)+O\left(|\Delta p|^2\right)\right]dxdt.$$

При достаточно малом Δp знак ΔI определяется первыми слагаемыми в зависимости от величин $mesQ^+$, $mesQ^-$, Δp. Следовательно функционал не достигает своего минимального значения.

Теорема 6. *Пусть $H(u_m,\mu,p)$ по аргументу p не является монотонной. Для того, чтобы управление $p^{(0)}(x,t)$ и соответствующее решение $u_m(x,t,p^{(0)})$ задачи (23) были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) *функция $H(u_m,\mu,p)$ по аргументу p принимает минимальное значение при $p = p^{(0)}$.*

2) *для произвольного вектора (e_1,e_2) и $(t,x)\in\overline{Q}$ выполняется неравенство*

$$\mathcal{K}(e_1,e_2)\equiv\partial^2_{u_m}\mathcal{F}(t,x,u_m,p^{(0)})e_1^2+2\partial^2_{pu_m}\mathcal{F}(t,x,u_m,p^{(0)})e_1e_2-$$

$$-\mu(t,x)\partial^2_p f(t,x,p^{(0)})e_2^2>0.$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $p^{(0)}$ удовлетворяет условиям теоремы 6, покажем его оптимальность. При помощи формулы Тейлора запишем приращение функционала $I(p)$

$$\Delta I=\int\limits_0^T dt\int\limits_D \left[\partial_{u_m}\mathcal{F}(t,x,u_m,p)\Delta u_m+\partial_p\mathcal{F}(t,x,u_m,p)\Delta p+\right.$$
$$+\tfrac{1}{2}\partial^2_{u_m}\mathcal{F}(t,x,u_m,p^{(0)})(\Delta u_m)^2+\partial^2_{pu_m}\mathcal{F}(t,x,u_m,p^{(0)})\Delta u_m\Delta p+ \tag{28}$$
$$\left.+\tfrac{1}{2}\partial^2_{p}\mathcal{F}(t,x,u_m,p^{(0)})(\Delta p)^2+O(|\Delta u_m|^{2+\alpha})+O(|\Delta p|^{2+\alpha})\right]d\xi.$$

Подставляя (26) в (25) и изменяя при этом порядок интегрирования, получим

$$\Delta I=\int\limits_0^T dt\int\limits_D \left[\partial_p H(u_m,\mu,p^{(0)})\Delta p+\mathcal{K}(\Delta u_m,\Delta p)+\right.$$
$$\left.+\,O\left(|\Delta u_m|^{2+\alpha}\right)+O\left(|\Delta p|^{2+\alpha}\right)\right]dx.$$

обозначим $\delta_1=\inf\limits_{|\xi|=1}\mathcal{K}(\xi_1,\xi_2)$. В силу условия 1) $\partial_p H(u_m,\mu,p^{(0)})=0$. Поэтому, учитывая условие 2), имеем $\delta_1>0$ для $(t,x)\in\overline{Q}$. Следовательно,

$$\mathcal{K}(\Delta u_m,\Delta p)=\delta_1\left(|\Delta u_m|^2+|\Delta p|^2\right).$$

Таким образом

$$\Delta I\geq\delta_1\int\limits_0^T dt\int\limits_D\left[(1-0(|\Delta u_m|^\alpha))+|\Delta p|^2\left(1-0(|\Delta p|^\alpha)\right)\right]dx.$$

В силу соотношения (26) получаем, что $\Delta u_m\to 0$ при $\Delta p\to 0$. Поэтому, при достаточно малых $\Delta p\to 0$ таких, что

$$1-0(|\Delta u_m|^\alpha)\geq\frac{1}{2},\qquad 1-0(|\Delta p|^\alpha)\geq\frac{1}{2},$$

имеем

$$\Delta I\geq\frac{\delta_1}{2}\int\limits_0^T dt\int\limits_D\left(|\Delta u_m|^2+|\Delta p|^2\right)dx\geq 0.$$

Необходимость доказывается по схеме доказательства теоремы 2 из [6].

Существование $(u_m, p^{(0)})$ устанавливается по следующей схеме. Если $p^{(0)}$- оптимальное, то

$$\partial_p H(u_m, \mu, p^{(0)}) = 0 \text{ и } \partial_p^2 H(u_m, \mu, p^{(0)}) > 0.$$

Применяя теорему о неявных функциях из [5] к уравнению

$$\partial_p H(u_m, \mu, p^{(0)}) = 0,$$

получим

$$p^{(0)} = W(u_m, \mu),$$

где $W(u_m, \mu)$- дифференцируемая функция по аргументам u_m и μ.

Используя функцию Грина $\Gamma_m(t, x, \tau, \xi)$, в соответствие задаче (22), (23) поставим систему интегральных уравнений

$$\begin{gathered} u_m = \int\limits_t^T dt \int\limits_D \Gamma_m(t, x, \tau, \xi) f_m(\tau, \xi, W(u_m, \mu)) d\xi + \omega_1, \\ \mu(t, x) = \int\limits_t^T dt \int\limits_D \Gamma_m(\tau, \xi, t, x) \partial_{u_m} \mathcal{F}(\tau, \xi, u_m, W(u_m, \mu)) d\xi, \end{gathered} \tag{29}$$

где ω_1- решение краевой задачи

$$(L_1 \omega_1)(t, x) = 0, \qquad \omega_1(0, x) + \int\limits_0^T q(\tau, x) \omega_1(\tau, x) d\tau = \varphi_m(x),$$

$$[\omega_1 t, x) - \psi_m t, x)] \,|_\Gamma = 0.$$

Решение системы (29) находим методом последовательных приближений, учитывая при этом теорему 2 и неравенства

$$0 \le \int\limits_D \Gamma_m(t, x, \tau, \xi) d\xi \le \frac{1}{1 - \lambda_0},$$

Переходя к пределу в задаче (22), (23) при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$ получим решение задачи (1)-(4).

1. *Пукальсъкий И.Д.* Краевые задачи для параболических уравнений с вырождениями // Нелинейные граничные задачи. – 2006. – вып.16. – С. 213 – 221.

2. *Пукальсъкий И.Д.* Нелокальные краевые задачи для неравномерно параболических уравнений // Дифф. ур. – 2003. – Т. 39, N 6. – С. 777 – 787.
3. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
4. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – К.: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
5. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. – М: Наука, 1979. – 429 с.
6. *Пукальсъкий И.Д.* Функція Гріна параболічної крайової задачі і задача оптімізації// Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, N 4. – С. 567– 571.
7. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М: Мир, 1968. – 428 с.
8. *Пукальсъкий И.Д.* Краевая задача для линейных параболических уравнений с вырождениями // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, N 3. – С. 377 – 387.

Кафедра дифференциальных уравнений,
Черновецкий национальный университет
им. Ю.Федьковича,
ул.Коцюбинского 2,
58012, г. Черновцы, Украина

Получено 21.09.2006