



УДК 620.9.603.13:681.51

**С.Е. Саух**, д-р техн. наук

Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины  
(Украина, 03164, Киев-164, ул. Генерала Наумова, 15,  
e-mail: ssaukh@gmail.com)

### **Метод смещения малых элементов в обобщенных якобианах Кларка для обеспечения численной устойчивости квазиньютоновских методов решения вариационных неравенств**

Проведен анализ бесконечно малых элементов матричных компонент обобщенного якобиана Кларка функции Фишера — Бурмейстера и определены условия возникновения сингулярности таких матричных компонент. Аналогичный анализ проведен в условиях конечно-разрядных вычислений малых элементов тех же матричных компонент. Исследованы условия возникновения плохо обусловленных и сингулярных матричных компонент обобщенных якобианов Кларка для негладких систем нелинейных алгебраических уравнений, которые формируются специальными методами преобразования задач на вариационные неравенства. Разработан метод смещения малых элементов матричных компонент обобщенного якобиана Кларка, обеспечивающий численную устойчивость квазиньютоновских методов итерационного решения вариационных неравенств.

Проведено аналіз нескінченно малих елементів матричних компонентів узагальненого якобіана Кларка функції Фішера — Бурмейстера і визначено умови виникнення сингулярності таких матричних компонентів. Аналогічний аналіз проведено за умов кінцево-розрядних обчислень малих елементів тих же матричних компонентів. Досліджено умови виникнення погано обумовлених і сингулярних матричних компонентів узагальнених якобіанів Кларка для негладких систем нелінійних алгебраїчних рівнянь, які формуються спеціальними методами перетворення задач на варіаційні нерівності. Розроблено метод зсуву малих елементів матричних компонентів узагальненого якобіана Кларка, який забезпечує чисельну стійкість квазиньютонівських методів ітераційного розв'язку варіаційних нерівностей.

*К л ю ч е в ы е с л о в а:* обобщенный якобиан Кларка, квазиньютоновские методы, численная устойчивость, метод смещения, малые величины.

Необходимость решения вариационных неравенств возникает в технических науках, экономике, теории игр, теории оптимизации и во многих других областях научных исследований [1].

© С.Е. Саух, 2015

Задача на вариационные неравенства вида  $VI(\mathbb{R}_C^n, \mathbf{F})$  состоит в нахождении вектора  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}_C^n$  такого, что

$$\langle \mathbf{F}(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_C^n, \quad (1)$$

где  $\mathbb{R}_C^n$  — непустое замкнутое выпуклое множество в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ ;  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  — скалярное произведение векторов  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  и  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ;  $\mathbf{F}$  — непрерывно дифференцируемая вектор-функция,  $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Обычно форма представления допустимого множества  $\mathbb{R}_C^n$  имеет вид

$$\mathbb{R}_C^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{G}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}\}, \quad (2)$$

где дважды непрерывно дифференцируемые вектор-функции  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{G}$  такие, что  $\mathbf{H}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_H}$  и  $\mathbf{G}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_G}$  [1—4].

Известно, что решение задачи  $VI(\mathbb{R}_C^n, \mathbf{F})$  удовлетворяет условиям оптимальности Каруша—Куна—Таккера (ККТ) [1], представляющим собой систему равенств и комплементарных неравенств вида

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) &= 0, \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}) &= 0, \\ \mathbf{0} \leq \boldsymbol{\mu} \perp \mathbf{G}(\mathbf{x}) &\geq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где вектор-функция Лагранжа вариационного неравенства  $VI(\mathbb{R}_C^n, \mathbf{F})$ ,

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \left( \frac{d\mathbf{H}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} - \left( \frac{d\mathbf{G}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right)^T \boldsymbol{\mu},$$

есть функция  $\mathbf{L}(\mathbf{w})$  трех векторных неизвестных  $\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ , среди которых множители  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{n_H}$ ,  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^{n_G}$ . Следовательно, задача в виде ККТ-системы (3) является задачей на вариационные неравенства  $VI(\mathbb{R}^{n+n_H} \times \mathbb{R}^{n_G}, \mathbf{Q})$  с допустимой областью в форме многогранника  $\mathbb{R}^{n+n_H} \times \mathbb{R}^{n_G}$ , где

$$\mathbf{Q}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \partial \mathbf{L}(\mathbf{w}) / \partial \mathbf{x} \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Ее решением есть ККТ-вектор  $\mathbf{w}^* = (\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \in \mathbb{R}^{n+n_H} \times \mathbb{R}^{n_G}$ , содержащий ККТ-точку  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}_C^n$  решения задачи (1), (2) [1—3].

Современные подходы к решению ККТ-системы (3) основаны на ее тождественном преобразовании в систему негладких уравнений [1—7]. Такое преобразование осуществляется с помощью  $C$ -функций [1, 7], из

которых наиболее часто используют функцию Фишера—Бурмейстера  $\varphi_{\text{FB}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  вида  $\varphi_{\text{FB}}(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - a - b$ , являющуюся выпуклой. С ее помощью подсистема комплементарных неравенств  $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{\mu} \perp \mathbf{G}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$  преобразуется в эквивалентную подсистему негладких уравнений вида  $\varphi_{\text{FB}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{G}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ , где  $\forall i \in \overline{1, n_G}, \varphi_{\text{FB}}(\mu_i, g_i(\mathbf{x})) = \sqrt{\mu_i^2 + g_i^2(\mathbf{x})} - \mu_i - g_i(\mathbf{x}) = 0$ , что обеспечивает соблюдение условий комплементарности  $\mu_i g_i(\mathbf{x}) = 0, \mu_i \geq 0, g_i(\mathbf{x}) \geq 0$  или  $\mathbf{0} \leq \mu_i \perp g_i(\mathbf{x}) \geq 0$ . Таким образом, поиск решения  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}_C^n$  задачи VI  $(\mathbb{R}_C^n, \mathbf{F})$  вида (1), (2) сводится к поиску решения  $\mathbf{w}^* = (\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \in \mathbb{R}^{n+n_H+n_G}$  нелинейной негладкой системы уравнений вида

$$\Phi(\mathbf{w}) = \mathbf{0}, \quad (4)$$

где

$$\Phi(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \mathbf{L}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}) \\ \varphi(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{G}(\mathbf{x})) \end{pmatrix}.$$

Присутствие негладкой вектор-функции  $\varphi_{\text{FB}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{G}(\mathbf{x}))$  в составе вектор-функции  $\Phi(\mathbf{w})$  определяет необходимость применения методов негладкого анализа в алгоритмах поиска решения системы уравнений (4). В настоящее время разработан ряд итерационных методов решения подобных систем уравнений, обладающих свойством глобальной сходимости [1, 2]. В основе таких методов лежит представление негладкой вектор-функции  $\Phi(\mathbf{w})$  множеством линейных вектор-функций

$$\{\Phi_k(\mathbf{w}) = \Phi(\mathbf{w}_k) + \Phi_{\mathbf{w}} \Delta \mathbf{w}_k | k = 0, 1, \dots\} \quad (5)$$

в окрестностях итерационной последовательности точек  $\{\mathbf{w}_k | k = 0, 1, \dots\}$ . При этом дифференцирование негладких вектор-функций  $\varphi_{\text{FB}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{G}(\mathbf{x}))$  и  $\Phi(\mathbf{w})$  с построением обобщенных якобианов Кларка  $\partial_B \varphi_{\text{FB}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{G}(\mathbf{x}))$  и  $\partial_B \Phi(\mathbf{w})$ , а также выбором их представителей  $\varphi_G \in \partial_B \varphi_{\text{FB}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{G}(\mathbf{x}))$ ,  $\varphi_{\boldsymbol{\mu}} \in \partial_B \varphi_{\text{FB}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{G}(\mathbf{x}))$  и  $\Phi_{\mathbf{w}} \in \partial_B \Phi(\mathbf{w})$ , осуществляется с помощью субдифференциала Булигана ( $B$ -субдифференциала) [1—3, 5]. Здесь

$$\Phi(\mathbf{w}_k) = \begin{pmatrix} \mathbf{L}(\mathbf{w}_k) \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}_k) \\ \varphi_{\text{FB}}(\boldsymbol{\mu}_k, \mathbf{G}(\mathbf{x}_k)) \end{pmatrix}, \quad \Delta \mathbf{w}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_k \\ \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_k \end{pmatrix}, \quad \Phi_{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{x}} & -H_{\mathbf{x}}^T & -G_{\mathbf{x}}^T \\ H_{\mathbf{x}} & 0 & 0 \\ \varphi_G G_{\mathbf{x}} & 0 & \varphi_{\boldsymbol{\mu}} \end{bmatrix},$$

$$\varphi_G = \text{diag} \left\{ \left( \frac{g_i(\mathbf{x})}{\sqrt{\mu_i^2 + [g_i(\mathbf{x})]^2}} - 1, \mu_i g_i(\mathbf{x}) \neq 0 \right), i = \overline{1, n_G} \right\} \left( \begin{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_k \end{pmatrix} \right), \quad (6)$$

$$\Phi_{\boldsymbol{\mu}} = \text{diag} \left\{ \left( \begin{array}{cc} \frac{\mu_i}{\sqrt{\mu_i^2 + [g_i(\mathbf{x})]^2}} - 1, \mu_i g_i(\mathbf{x}) \neq 0 \\ -1, \mu_i g_i(\mathbf{x}) = 0 \end{array} \right), i \in \overline{1, n_G} \right\} \left( \begin{array}{c} \mathbf{x} = \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_k \end{array} \right), \quad (7)$$

где

$$H_{\mathbf{x}} = \left. \frac{d\mathbf{H}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k}; \quad G_{\mathbf{x}} = \left. \frac{d\mathbf{G}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k};$$

$$L_{\mathbf{x}} = \left( \begin{array}{cc} \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} & -\frac{d^2\mathbf{H}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}^T d\mathbf{x}} \boldsymbol{\lambda} - \frac{d^2\mathbf{G}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}^T d\mathbf{x}} \boldsymbol{\mu} \end{array} \right) \Big|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}_k}.$$

С помощью множества линейных функций вида (5) систему уравнений (4) можно аппроксимировать множеством систем линейных алгебраических уравнений вида

$$\{\Phi_{\mathbf{w}} \Delta \mathbf{w}_k = -\Phi(\mathbf{w}_k) | k=0, 1, \dots\}. \quad (8)$$

Существующие алгоритмы поиска решения  $\mathbf{w}^*$  негладкой системы уравнений (4) основаны на методах ньютоновского типа или методе Левенберга—Марквардта [1—2, 4], которые позволяют находить последовательность векторов  $\{\mathbf{w}_k | k=0, 1, \dots\}$  по направляющим векторам  $\{\Delta \mathbf{w}_k | k=0, 1, \dots\}$ , получаемым в результате решения систем уравнений вида (6) или, соответственно, вида

$$\{\Phi_{\mathbf{w}}^T \Phi_{\mathbf{w}} \Delta \mathbf{w}_k = -\Phi_{\mathbf{w}}^T \Phi(\mathbf{w}_k) | k=0, 1, \dots\}. \quad (9)$$

Если метод Левенберга—Марквардта обеспечивает глобальную сходимость последовательности  $\{\mathbf{w}_k | k=0, 1, \dots\}$  к искомому решению  $\mathbf{w}^* = (\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \in \mathbb{R}^{n+n_H+n_G}$ , то методы ньютоновского типа обладают свойством локальной сходимости. Поэтому для достижения глобальной сходимости методов ньютоновского типа применяются специальные оценочные функции, например гладкая функция вида  $\Psi(\mathbf{w}) = 1/2 \|\Phi(\mathbf{w})\|^2$ . По этим функциям осуществляется контроль за выполнением условий сходимости итерационного процесса и находятся верхние границы перемещений вдоль направляющих векторов  $\{\Delta \mathbf{w}_k | k=0, 1, \dots\}$ . В случае плохой обусловленности матриц  $\Phi_{\mathbf{w}}$ , когда их числа обусловленности велики,  $\text{cond}(\Phi_{\mathbf{w}}) \gg 1$ , получаем  $\text{cond}(\Phi_{\mathbf{w}}^T \Phi_{\mathbf{w}}) \gg \text{cond}(\Phi_{\mathbf{w}})$ . Это означает, что численные решения систем уравнений (9) подвержены влиянию ошибок конечноразрядных вычислений в значительно большей степени, чем аналогичные решения систем уравнений (8).

Нахождение направляющих векторов  $\{\Delta \mathbf{w}_k | k=0, 1, \dots\}$  методами прямого решения соответствующих систем линейных алгебраических урав-

нений большой размерности  $n_w = n + h_H + n_G$  сопряжено с ограничением использования вычислительных ресурсов [3, 9]. Заметим, что в широко применяемом приложении РАТН направляющие векторы  $\{\Delta \mathbf{w}_k | k=0, 1, \dots\}$  вычисляются методом полной  $LU$ -факторизации матриц систем линейных алгебраических уравнений, формируемых по оригинальному алгоритму [8]. При этом используются технологии разреженных матриц.

Рационально использовать вычислительные ресурсы позволяют алгоритмы, построенные на основе методов неточного итерационного решения систем уравнений (8) и методов ньютоновского типа итерационного решения задачи (4). Рассмотрим один из таких алгоритмов [3—5].

**Алгоритм 1.** Решение полугладкой нелинейной системы уравнений (4) приближенным методом Ньютона.

**Шаг 1.** Устанавливаем начальное приближение  $\mathbf{w}_0$  и выбираем значения параметров  $\rho > 0, \beta \in (0, 1), \sigma \in (0, 1), q > 2, \gamma_0 \geq 0, \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$ .

**Шаг 2.** Контролируем критерий остановки:

а) номер итерации  $k$  достиг установленной величины  $k_{\max}$ ;

б)  $\|\Phi(\mathbf{w}_k)\| < \tau_1$ ;

в)  $\|\Phi(\mathbf{w}_k)\| - \|\Phi(\mathbf{w}_{k-1})\| < \tau_2$ .

**Шаг 3.** Выбираем элемент  $\Phi_w \in \partial_B \Phi(\mathbf{w}_k)$  и вычисляем направление  $\Delta \mathbf{w}_k$ . Находим решение  $\Delta \mathbf{w}_k$  системы уравнений  $\Phi_w \Delta \mathbf{w}_k = -\Phi(\mathbf{w}_k) + \boldsymbol{\varepsilon}_k$  такой, что  $\|\boldsymbol{\varepsilon}_k\| \leq \gamma_k \|\Phi(\mathbf{w}_k)\|$ . Если это невозможно или если не выполняется условие  $\nabla \Psi(\mathbf{w}_k)^T \Delta \mathbf{w}_k \leq -\rho \|\Delta \mathbf{w}_k\|^q$ , то устанавливаем  $\Delta \mathbf{w}_k = -\nabla \Psi(\mathbf{w}_k) = -\Phi_w^T \Phi(\mathbf{w}_k)^T$ .

**Шаг 4.** Выбираем стратегию линейного поиска (правило Армихо), т.е. вычисляем минимальное целое  $l$  такое, чтобы для  $d_k = \beta^l$  выполнялось условие  $\Psi(\mathbf{w}_k + d_k \Delta \mathbf{w}_k) \leq \Psi(\mathbf{w}_k) + \sigma d_k \nabla \Psi(\mathbf{w}_k)^T \Delta \mathbf{w}_k$ .

**Шаг 5.** Вычисляем  $\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k + d_k \Delta \mathbf{w}_k$  и  $k = k + 1$ . Выбираем  $\gamma_k \geq 0$  и возвращаемся к шагу 2.

Для поиска приближенного решения систем уравнений  $\Phi_w \Delta \mathbf{w}_k = -\Phi(\mathbf{w}_k) + \boldsymbol{\varepsilon}_k$  с контролем невязок  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  на шаге 3 этого алгоритма в работе [5] использованы различные методы подпространств Крылова: квази-минимизации невязки (QMR и TFQMR), сопряженных градиентов квадратичный (CGS), бисопряженных градиентов стабилизированный (BiCGSTAB), минимизации невязок обобщенный (GMRES (m)). Методы подпространств Крылова оказались эффективными для решения систем алгебраических уравнений с хорошо обусловленными матрицами  $\Phi_w$  и практически непригодными в случае их плохой обусловленности. Поэтому в работе [3] был применен метод наименьших квадратов с QR-разложением (LSQR), а также согласованный с ним алгоритм MINOS формирования предобус-

ловливателей, реализующий неполное  $LU$ -разложение матриц  $\Phi_{\mathbf{w}}$  с частичным выбором ведущего элемента и пороговым методом отсечения малозначимых элементов в образующихся факторных матрицах  $\tilde{L}$  и  $\tilde{U}$  [9].

Поскольку среди матриц  $\{\Phi_{\mathbf{w}} | k=0, 1, \dots\}$  встречаются плохо обусловленные, формирование предобусловливателей традиционно осуществляется для матриц  $\{\Phi_{\mathbf{w}} + \alpha E | k=0, 1, \dots\}$  со смещенными на величину  $\alpha$  диагональными элементами, т.е. со смещенными спектрами собственных чисел и уменьшенными числами обусловленности. Однако, применение предобусловливателей матриц  $\Phi_{\mathbf{w}} + \alpha E$  существенно замедляет сходимость итерационных алгоритмов решения уравнений вида (8). Поэтому величину смещения  $\alpha$  выбирают, с одной стороны, как можно меньшей, пытаясь сохранить свойства матриц  $\Phi_{\mathbf{w}}$  в матрицах  $\Phi_{\mathbf{w}} + \alpha E$ , а с другой стороны, — не настолько малой, чтобы потерять устойчивость алгоритма неполной факторизации матриц  $\Phi_{\mathbf{w}} + \alpha E$  при отсечении малозначимых элементов в факторных матрицах  $\tilde{L}$  и  $\tilde{U}$  таких, что  $\Phi_{\mathbf{w}} + \alpha E \approx \tilde{L}\tilde{U}$ .

Причины образования плохо обусловленных матриц из множества  $\{\Phi_{\mathbf{w}} | k=0, 1, \dots\}$  до настоящего времени не исследованы. Предлагаемый анализ особых свойств обобщенных якобианов Кларка, представленных матрицами  $\varphi_{\mathbf{G}} \in \partial_B \Phi_{\text{FB}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{G}(\mathbf{x}))$ ,  $\varphi_{\boldsymbol{\mu}} \in \partial_B \Phi_{\text{FB}}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{G}(\mathbf{x}))$  и  $\Phi_{\mathbf{w}} \in \partial_B \Phi(\mathbf{w})$ , позволяет установить эти причины и найти подход к их устранению.

Исследуем поведение содержащихся в выражениях (6), (7) функций в особых точках:

$$\begin{aligned} &\text{для } \mu_i g_i(\mathbf{x}) \neq 0 \text{ и } \frac{\mu_i}{g_i(\mathbf{x})} \rightarrow 0 \\ &\left( \left( \frac{g_i(\mathbf{x})}{\sqrt{\mu_i^2 + [g_i(\mathbf{x})]^2}} - 1 \right) \rightarrow 0, \left( \frac{\mu_i}{\sqrt{\mu_i^2 + [g_i(\mathbf{x})]^2}} - 1 \right) \rightarrow -1 \right); \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &\text{для } \mu_i g_i(\mathbf{x}) \neq 0 \text{ и } \frac{g_i(\mathbf{x})}{\mu_i} \rightarrow 0 \\ &\left( \left( \frac{g_i(\mathbf{x})}{\sqrt{\mu_i^2 + [g_i(\mathbf{x})]^2}} - 1 \right) \rightarrow -1, \left( \frac{\mu_i}{\sqrt{\mu_i^2 + [g_i(\mathbf{x})]^2}} - 1 \right) \rightarrow 0 \right). \end{aligned} \quad (11)$$

С одной стороны, если для  $\forall i \in \overline{1, n_{\mathbf{G}}}$  справедливы выражения (10), то обобщенные якобианы Кларка аппроксимируются матрицами  $\varphi_{\mathbf{G}} \rightarrow 0$ ,  $\varphi_{\boldsymbol{\mu}} \rightarrow (-E_{\varphi})$  и

$$\Phi_{\mathbf{w}} \rightarrow \begin{bmatrix} L_{\mathbf{x}} & -H_{\mathbf{x}}^T & -G_{\mathbf{x}}^T \\ H_{\mathbf{x}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_{\varphi} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где  $E_\varphi$  — единичная матрица размерностью  $n_G \times n_G$ . Следовательно, при корректной постановке задачи (1), (2), когда  $n_H < n$ ,  $\text{rank}(L_x) = n$  и  $\text{rank}(H_x) = n_H$ , матрица  $\Phi_w$  вида (12) всегда может быть разложена на факторные множители:

$$L = \begin{bmatrix} L_x & 0 & 0 \\ H_x & H_x L_x^{-1} H_x^T & 0 \\ 0 & 0 & E_\varphi \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} E_x & -L_x^{-1} H_x^T & -L_x^{-1} G_x^T \\ 0 & E_\lambda & (H_x L_x^{-1} H_x^T)^{-1} H_x L_x^{-1} G_x^T \\ 0 & 0 & E_\varphi \end{bmatrix}.$$

С другой стороны, если для  $\forall i \in \overline{1, n_G}$  справедливы выражения (11), то обобщенные якобианы Кларка аппроксимируются матрицами  $\Phi_G \rightarrow (-E_\varphi)$ ,  $\Phi_\mu \rightarrow 0$  и

$$\Phi_w \rightarrow \begin{bmatrix} L_x & -H_x^T & -G_x^T \\ H_x & 0 & 0 \\ -G_x & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Такие матрицы  $\Phi_w$  становятся сингулярными при условиях  $n_H < n$ ,  $\text{rank}(G_x) \leq \min(n, n_G)$  и  $\text{rank}(L_x) + \text{rank}(H_x) + \text{rank}(G_x) < n + n_H + n_G$ , где  $n_G$  — число неравенств в (2);  $\text{rank}(L_x) = 0$ ;  $\text{rank}(H_x) = n_H$ .

Заметим, что выявленные свойства сингулярности обобщенного якобиана Кларка функции  $\varphi_{FB}$  и сингулярности матриц  $\Phi_w$  исследованы в рамках представлений о бесконечно малых величинах. Очевидно, при конечно-разрядных вычислениях выражения (10), (11) следует представлять приближенно в нестрогой оценочной форме:

для  $\mu_i g_i(\mathbf{x}) \neq 0$  и  $\frac{\mu_i}{g_i(\mathbf{x})} = \delta_i \ll 1$

$$\left( \left( \frac{g_i(\mathbf{x})}{\sqrt{\mu_i^2 + [g_i(\mathbf{x})]^2}} - 1 \right) \cong -\delta_i^2, \left( \frac{\mu_i}{\sqrt{\mu_i^2 + [g_i(\mathbf{x})]^2}} - 1 \right) \cong -1 + \delta_i \right);$$

для  $\mu_i g_i(\mathbf{x}) \neq 0$  и  $\frac{g_i(\mathbf{x})}{\mu_i} = \delta_i \ll 1$

$$\left( \left( \frac{g_i(\mathbf{x})}{\sqrt{\mu_i^2 + [g_i(\mathbf{x})]^2}} - 1 \right) \cong -1 + \delta_i, \left( \frac{\mu_i}{\sqrt{\mu_i^2 + [g_i(\mathbf{x})]^2}} - 1 \right) \cong -\delta_i^2 \right).$$

При таких взаимоисключающих условиях  $i_G$ -й и  $i_\mu$ -й элементы диагональных матриц  $\Phi_G$  и  $\Phi_\mu$  имеют малые значения в случае, когда соответствующие им  $i_G$ -й или  $i_\mu$ -й элементы диагональных матриц  $\Phi_\mu$  и  $\Phi_G$  принимают значения близкие к  $-1$ . Наличие в матрицах  $\Phi_G$  и  $\Phi_\mu$  определенного числа  $n_{\varphi} \leq n_G$  малых диагональных элементов может создавать непреодолимые трудности для использования алгоритмов факторизации матрицы  $\Phi_w$  и формирования ее предобусловливателей по факторным множителям  $L$  и  $U$  вида

$$L = \begin{bmatrix} L_x & 0 & 0 \\ H_x & H_x L_x^{-1} H_x^T & 0 \\ \Phi_G G_x & \Phi_G G_x L_x^{-1} H_x^T & \Phi_\mu + \xi_\mu \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} E_x & -L_x^{-1} H_x^T & -L_x^{-1} G_x^T \\ 0 & E_\lambda & (H_x L_x^{-1} H_x^T)^{-1} H_x L_x^{-1} G_x^T \\ 0 & 0 & E_\varphi \end{bmatrix},$$

где

$$\xi_\mu = \Phi_G (G_x L_x^{-1} G_x^T - G_x L_x^{-1} H_x^T (H_x L_x^{-1} H_x^T)^{-1} H_x L_x^{-1} G_x^T). \quad (13)$$

Действительно, процесс формирования  $i_\mu$ -го диагонального элемента матрицы  $\Phi_\mu + \xi_\mu$ , находящейся в составе блочной матрицы  $L$ , реализуется посредством многократного прибавления к  $i_\mu$ -му диагональному элементу матрицы  $\Phi_\mu$  слагаемых  $i_\mu$ -го диагонального элемента матрицы  $\xi_\mu$ . Если результаты выполнения операций суммирования с накоплением оказываются нечувствительными к несопоставимо меньшим значениям некоторых диагональных элементов матрицы  $\Phi_\mu$ , то такие элементы, в количестве  $n_{\varphi\mu}$ , можно полагать равными нулю, а ранг матрицы  $\Phi_\mu$  оценивать величиной  $\text{rank}(\Phi_\mu, \delta) = n_G - n_{\varphi\mu}$ , где  $\delta$  — априори устанавливаемое пороговое значение оценки малости элементов,  $\delta_i^2 \leq \delta$ . Следовательно, при  $\text{rank}(L_x) = n$ ,  $\text{rank}(H_x) = n_H$ ,  $\text{rank}(\Phi_\mu, \varepsilon) < n_G$  матрица  $\Phi_w$  является плохо обусловленной или сингулярной.

Неконтролируемое возрастание числа ошибок в конечно-разрядных вычислениях также обусловлено вычислением обратных матриц  $L_x^{-1}$  и  $(H_x L_x^{-1} H_x^T)^{-1}$ , входящих в (13). Действительно, если числа обусловленности матриц  $L_x$  и  $(H_x L_x^{-1} H_x^T)^{-1}$  велики, т.е.  $\text{cond}(L_x) \gg 1$  и (или)  $\text{cond}(H_x L_x^{-1} H_x^T) \gg 1$ , то формирование элементов матрицы  $\xi_\mu$  будет сопровождаться мультиплицированием ошибок обращения матриц  $L_x$  и  $H_x L_x^{-1} H_x^T$  элементами диагональной матрицы  $\Phi_G$ . Следовательно, те значения  $-\delta_i^2$



диагональных элементов матрицы  $\Phi_G$ , которые по абсолютной величине не превышают некоторого априори задаваемого уровня  $\delta$  оценки их малости, целесообразно устанавливать равными нулю, блокируя тем самым распространение ошибок конечно-разрядных вычислений на соответствующие диагональные элементы матрицы  $\Phi_\mu$ , мало отличающиеся от  $-1$ .

Таким образом, для обеспечения вычислительной устойчивости алгоритмов построения предобусловливателей матриц  $\{\Phi_w | k=0, 1, \dots\}$  необходимо осуществлять коррекцию значений соответствующих им диагональных элементов субматриц  $\Phi_\mu$  и  $\Phi_G$ , чьи абсолютные значения не превышают априори устанавливаемого порогового уровня значения  $\delta$ . Предобусловливатели матриц  $\tilde{\Phi}_w$ , формируемых алгоритмом 2 селективным смещением диагональных элементов в субматрицах  $\Phi_\mu$  и  $\Phi_G$  матрицы  $\Phi_w$ , обладают более высокими аппроксимационными свойствами по сравнению с теми предобусловливателями, которые традиционно формируются на основе матриц со смещенными диагональными элементами вида  $\{\Phi_w + \alpha E | k=0, 1, \dots\}$ . Результаты экспериментальных исследований подтверждают этот вывод.

Алгоритм 2. Смещение малых элементов матричных компонентов обобщенных якобианов Кларка.

Шаг 1. Выбираем значение порогового параметра  $\delta > 0$ .

Шаг 2. Для заданных  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_k$ ,  $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_k$  формируем матрицы  $L_x$ ,  $H_x$ ,  $G_x$ ,  $\Phi_G \in \partial_B \Phi_{FB}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{G}(\mathbf{x}))$ ,  $\Phi_\mu \in \partial_B \Phi_{FB}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{G}(\mathbf{x}))$  и  $\Phi_w \in \partial_B \Phi(\mathbf{w})$ .

Шаг 3. Смещаем малые диагональные элементы субматрицы  $\Phi_\mu$  и образуем субматрицу  $\tilde{\Phi}_\mu$  с элементами

$$\tilde{\Phi}_{\mu i} = \begin{pmatrix} \Phi_{\mu i}, & |\Phi_{\mu i}| > \delta \\ \Phi_{\mu i} - \delta, & |\Phi_{\mu i}| \leq \delta \end{pmatrix} \forall i \in \overline{1, n_G}.$$

Шаг 4. Смещаем малые диагональные элементы субматрицы  $\Phi_G$  и образуем субматрицу  $\tilde{\Phi}_G$  с элементами

$$\tilde{\Phi}_{Gi} = \begin{pmatrix} \Phi_{Gi}, & |\Phi_{Gi}| > \delta \\ 0, & |\Phi_{Gi}| \leq \delta \end{pmatrix} \forall i \in \overline{1, n_G}.$$

Шаг 5. В матрице  $\Phi_w$  субматрицы  $\Phi_G$  и  $\Phi_\mu$  замещаем субматрицами  $\tilde{\Phi}_G$  и  $\tilde{\Phi}_\mu$ , в результате чего получаем матрицу

$$\tilde{\Phi}_w = \begin{bmatrix} L_x & -H_x^T & -G_x^T \\ H_x & 0 & 0 \\ \tilde{\Phi}_G G_x & 0 & \tilde{\Phi}_\mu \end{bmatrix}.$$

**Результаты экспериментальных исследований.** Алгоритм 2 применен в составе алгоритма 1 для решения тестовой задачи моделирования равновесного состояния объединенного рынка электроэнергии стран Бенилюкса, Франции и ФРГ. Обобщенная схема энергосистемы этих стран представлена на рис. 1 (см. вклейку).

Исходные данные для вычислительных экспериментов [10] дополнены данными об обратных функциях спроса на электроэнергию, а также предположениями об отсутствии таможенных пошлин на торговлю электроэнергией между странами, функционировании единого арбитражного торговца и отсутствии фиксированных тарифов на электроэнергию, отпускаемую компаниями-производителями. Кроме того, учтено требование к объему горячего резервирования мощностей, которое не должно быть меньше 7,5 % объема общей нагрузки энергосистемы. Основные технические и экономические характеристики объектов представлены в табл. 1, 2.

Математическое описание задачи моделирования равновесного состояния энергорынка представлено в виде смешанной задачи комплементарности [11], которая тождественна задаче (4). Ее решение осуществлялось по алгоритму 1 с использованием следующих значений параметров:  $\rho = 10^{-16}$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\sigma = 10^{-4}$ ,  $q = 2,1$ ,  $l < 30$ ,  $\{\gamma_k = 0 | k \in 0, k_{\max}\}$ ,  $\tau_1 = 10^{-16}$ ,  $\tau_2 = 10^{-18}$ ,  $k_{\max} = 1500$ . Расчеты выполнены с использованием алгоритма полной CR-факторизации матриц  $\{\Phi_w | k = 0, 1, \dots\}$  и смещенных по алгоритму 2

**Таблица 1. Реактивные сопротивления  $\{X_m\}$  и допустимые нагрузки  $\{Y_m^{\max}\}$  высоковольтных линий электропередачи**

$m$	Линия	$X_m, \text{Om}$	$Y_m^{\max}, \text{MW}$	$m$	Линия	$X_m, \text{Om}$	$Y_m^{\max}, \text{MW}$
1	AVEL LONN	22,23	2 762	15	KRIM-MERC	34,19	936
2	D-DIEL	45,90	20 000	16	LONN-MOUL	27,13	1 842
3	D-EICH	45,90	20 000	17	MAAS-GRAM	41,82	641
4	D-ROMM	45,90	20 000	18	MAAS-KRIM	29,10	1 842
5	D-UCHT	45,90	20 000	19	MAAS-MERC	61,03	641
6	DIEL-ROMM	69,23	1 842	20	MERC-AVEL	55,38	898
7	DIEL-ZWOL	12,21	2 971	21	MERC-GRAM	31,08	1 842
8	EICH-UCHT	41,31	3 329	22	MOUL-MUHL	38,25	3 329
9	F-AVEL	45,90	20 000	23	MUHL-EICH	11,47	1 282
10	F-LONN	45,90	20 000	24	ROMM-MAAS	28,26	896
11	F-MOUL	45,90	20 000	25	ROMM-UCHT	42,95	1 842
12	F-MUHL	45,90	20 000	26	UCHT-MOUL	25,43	1 326
13	GRAM-LONN	45,21	1 207	27	ZWOL-KRIM	33,06	1 842
14	GRAM-MOUL	156,48	267	28	ZWOL-MAAS	50,01	1 842

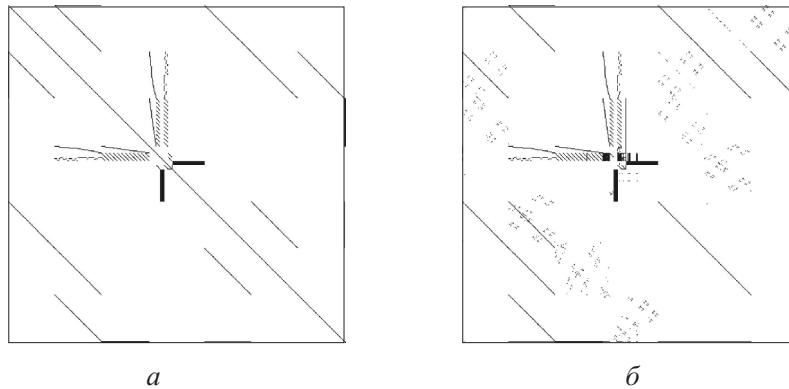


Рис. 2. Структура матрицы  $\Phi_w$  (а) и ее совмещенных факторных множителей  $(C_k, R_k)$  (б) на шаге  $k=0$  итерационного алгоритма 1

матриц  $\{\tilde{\Phi}_w | k=0,1,\dots\}$  [12]. Факторные множители  $\{(C_k, R_k) | k=0,1,\dots\}$  или  $\{(\tilde{C}_k, \tilde{R}_k) | k=0,1,\dots\}$  использованы либо непосредственно прямым методом решения линейных систем уравнений  $\{C_k R_k \Delta w_k = -\Phi(w_k) | k=0,1,\dots\}$ , или  $\{\tilde{C}_k \tilde{R}_k \Delta w_k = -\Phi(w_k) | k=0,1,\dots\}$ , либо в качестве предобуславливателей в составе итерационных методов GMRES(3) и BiCGStab, где сходимость итерационных процедур была ограничена 20-ю итерациями, а условием завершения итераций было снижение нормы невязок системы до значений меньших величины  $10^{-16}$ .

Коэффициенты обратных функций спроса на электроэнергию  $\{N_j = 330 - \beta_j p_j\}$  при ценах  $\{p_j\}$  на нее в узлах  $\{j\}$  энергосистемы следующие:

$j$	D	F	GRAM	KRIM	MAAS	MERC	ZWOL
$\beta_j$	0,00392	0,00445	0,07960	0,03824	0,17900	0,03824	0,10512

Расположение ненулевых элементов в матрице  $\Phi_w | k=0$  и в факторных матрицах  $(C_k, R_k) | k=0$  указано на рис. 2. Размерность матриц составляет  $n_w = n + n_H + n_G = 594$  с числом ненулевых элементов  $n_{NZ}(\Phi_w | k=0) = 3736$ ,  $n_{NZ}(C_0) = 2916$ ,  $n_{NZ}(R_0) = 2526$ .

В табл. 3 приведены результаты вычислительных экспериментов, позволяющие оценить скорость сходимости итерационного алгоритма 1 с использованием матричных компонентов обобщенных якобианов Кларка в виде несмещенных обычных и смещенных по предложенному алгоритму 2 матриц соответственно  $\Phi_w$  и  $\tilde{\Phi}_w$ . Экспериментальные результаты получены средствами компьютерного моделирования равновесного состояния энергорынка, которое осуществлялось для двух условий: несовершенной олигополистической конкуренции (задача Курно) и совершенной конкуренции (задача Бертрана) [10]. При этом удельным маржинальным затра-

Таблица 2. Мощности  $P$  генерирующих компаний, их размещение по узлам энергосистемы и удельные маржинальные затраты  $M$ 

Компания	Узел	$P$ , MW	$M$ , €/MWh	Компания	Узел	$P$ , MW	$M$ , €/MWh
Co. Belgium	GRAM	414,75	6,722		GRAM	36,96	82,160
	GRAM	24,83	18,080		MERC	2748,84	6,733
	GRAM	493,51	41,368		MERC	900,54	13,465
	GRAM	118,56	51,708		MERC	1994,18	42,718
	MERC	0,18	0,000		MERC	148,01	63,049
	MERC	274,03	13,335		MERC	113,76	83,751
	MERC	551,99	37,444		KRIM	16,06	9,762
	MERC	67,39	55,403		KRIM	15,33	10,359
Co. France	GRAM	8,57	42,064	KRIM	62,93	26,819	
	F	4571,75	0,559	ZWOL	549,09	16,792	
	F	2748,09	11,977	ZWOL	2688,18	26,057	
	F	2308,64	41,689	EnBW	F	48,90	$\chi$
	F	578,24	57,147	D	3312,52	6,166	
Co. Netherlands	F	154,34	96,776	D	3435,08	14,706	
	GRAM	27,74	47,673	D	719,03	40,392	
	MAAS	22,36	3,616	D	186,04	60,735	
	MAAS	235,28	14,279	D	209,78	88,439	
	MAAS	171,61	35,371	Co. Germany	D	7827,50	4,953
	KRIM	385,16	6,358	D	18179,85	14,523	
	KRIM	457,01	15,568	D	8264,79	40,687	
	KRIM	1170,83	35,807	D	682,93	55,947	
	KRIM	12,92	52,541	D	783,10	88,433	
	ZWOL	40,08	6,926	E.ON	D	8408,85	6,385
Electrabel	ZWOL	110,71	14,397	D	8454,13	14,768	
	ZWOL	906,17	29,938	D	5843,88	43,253	
	GRAM	3451,44	7,508	D	309,57	60,085	
	GRAM	678,54	12,973	D	230,39	92,938	
	GRAM	133,84	47,673	KRIM	75,92	9,229	
	GRAM	19,20	74,151	KRIM	873,30	16,073	

Окончание таблицы 2

Компания	Узел	$P, MW$	$M, €/MWh$	Компания	Узел	$P, MW$	$M, €/MWh$
RWE	KRIM	384,74	32,571	Nuon	MAAS	1072,38	31,323
	D	5207,75	6,165		KRIM	1070,91	15,508
	D	11639,15	13,525		KRIM	229,60	30,015
	D	3383,34	38,924		KRIM	123,37	9,487
	D	76,98	51,785		KRIM	567,94	15,623
Vattenfall	D	70,02	83,914	EDF	KRIM	1729,21	28,023
	D	2099,58	7,284		F	68601,86	4,212
	D	6040,94	13,046		F	6666,80	12,119
	D	681,18	42,752		F	6701,01	44,866
	D	350,12	62,761		F	530,49	57,152
Essent	D	135,78	92,575	F	408,96	97,510	
	MAAS	65,70	9,229	D	54,00	$\chi$	

Таблица 3. Число итераций алгоритма 1 при решении задач Курно и Бертрана различными методами

$\chi$	Факторизованная матрица					
	$\tilde{\Phi}_w = \tilde{C}_k \tilde{R}_k$ по алгоритму 2			$\Phi_w = C_k R_k$		
	$d \tilde{C} \tilde{R}$	GMRES(3)	BiCGStab	$dCR$	GMRES(3)	BiCGStab
<i>Задача Курно</i>						
0,0	74	74	74	—	54	77
1,0e-06	74	74	74	66	563	—
1,0e-05	74	74	74	134	563	—
1,0e-04	74	74	74	134	611	69
1,0e-03	74	74	74	54	434	—
<i>Задача Бертрана</i>						
0,0	106	106	106	206	171	163
1,0e-06	108	108	108	—	158	—
1,0e-05	104	104	104	—	171	—
1,0e-04	104	104	104	164	160	158
1,0e-03	111	112	111	763	156	581

там двух генерирующих мощностей  $\chi$  синхронно и намеренно придавались значения близкие к нулю и равные нулю.

Как видно из табл. 3, при малых значениях маржинальных затрат  $\chi$  ухудшалась обусловленность матриц  $\Phi_w$ , что увеличивало погрешности вычисления факторных матриц  $(C_k, R_k)$  и направляющих векторов  $\Delta w_k$ , получаемых либо прямым методом решения уравнений  $dCR, \{C_k R_k \Delta w_k = -\Phi(w_k) | k=0, 1, \dots\}$ , либо одним из итерационных методов, GMRES(3), BiCGStab, решения уравнений  $\{\Phi_w \Delta w_k = -\Phi(w_k) | k=0, 1, \dots\}$  с применением предобусловливателей  $\{(C_k, R_k) | k=0, 1, \dots\}$ .

Из полученных результатов следует, что традиционно используемые методы формирования и решения систем уравнений с матрицами вида  $\Phi_w$  не обеспечивают численной устойчивости итерационного алгоритма 1. Неустойчивость алгоритма подтверждается значительным разбросом числа итераций, необходимых для получения решений однотипных задач. Более того, прочерки в табл. 3 свидетельствуют о невозможности в некоторых случаях получения желаемых решений и прерывания итерационных процессов на итерации  $k=k_{\max}$  с априори установленным граничным номером  $k_{\max}=1500$ . Напротив, применение алгоритма 2 формирования матриц  $\tilde{\Phi}_w$ , аппроксимирующих матрицы  $\Phi_w$ , позволяет достичь численной устойчивости алгоритма 1 независимо от используемых методов решения формируемых систем уравнений  $\{C_k R_k \Delta w_k = -\Phi(w_k) | k=0, 1, \dots\}$  или вида  $\{\tilde{\Phi}_w \Delta w_k = -\Phi(w_k) | k=0, 1, \dots\}$  с предобусловливателями  $\{\tilde{C}_k, \tilde{R}_k | k=0, 1, \dots\}$ .

## Выводы

В результате исследований особых свойств матричных компонентов обобщенных якобианов Кларка негладких систем нелинейных алгебраических уравнений определены причины возникновения численной неустойчивости квазиньютоновских методов решения вариационных неравенств с применением функции Фишера—Бурмейстера.

Предложенный метод смещения малых элементов матричных компонентов обобщенных якобианов Кларка обеспечивает численную устойчивость квазиньютоновских методов.

Результаты вычислительных экспериментов подтвердили эффективность предложенного метода при решении плохо обусловленных задач на вариационные неравенства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Facchinei F., Pang J.-S.* Finite-dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems. — Vol. I. — N-Y : Springer, 2003. — 728 p.
2. *Facchinei F., Pang J.-S.* Finite-dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems. — Vol. II. — N-Y : Springer, 2003. — 728 p.
3. *Ruggiero V., Tinti F.* A preconditioner for solving large scale variational inequality problems by a semismooth inexact approach // Intern. Journal of Computer Mathematics. — 2006. — N 10. — P. 723—739.
4. *Petra S.* Semismooth Least Squares Methods for Complementarity Problems: Ph.D. Thesis. — Wurzburg, 2008. — 162 p. — [http://www.opus-bayern.de/uni-wuerzburg/volltexte/2006/1866/pdf/dissertation\\_petra.pdf](http://www.opus-bayern.de/uni-wuerzburg/volltexte/2006/1866/pdf/dissertation_petra.pdf).
5. *Kanzow C.* Inexact Semismooth Newton Methods for Large-Scale Complementarity Problems. — Wurzburg: Institute of Applied Mathematics and Statistics, 2003. — 22 p. — <http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~kanzow/paper/InSemiP.pdf>.
6. *Billups S. C., Dirkse S. P., Ferris M. C.* A comparison of large scale mixed complementarity problem solvers // Computational Optimization and Applications. — 1997. — № 7. — P. 3—25.
7. *Fischer A. A.* Special Newton-type optimization method // Optimization. — 1992. — Vol. 24. — № 3—4. — P. 269—284.
8. *Dirkse S.P., Ferris M.C.* The PATH solver: A non-monotone stabilization scheme for mixed complementarity problems // Optimization Methods and Software. — 1995. — № 5. — P. 123—156.
9. *Saad Y.* Iterative Methods for Sparse Linear Systems. — Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003. — 548 p.
10. *Energy Research Centre of the Netherlands.* COMPETES input data [Internet]. Available from: <http://www.ecn.nl/fileadmin/ecn/units/bs/COMPETES/flowgate-information.xls> [accessed 2015 June 17], [cost-functions.xls](http://www.ecn.nl/fileadmin/ecn/units/bs/COMPETES/cost-functions.xls) [accessed 2015 June 17].
11. *Саух С.Е.* Методы компьютерного моделирования конкурентного равновесия на рынках электроэнергии // Электрон. моделирование. — 2013. — 35, № 5. — С. 11—26.
12. *Саух С.Е.* Метод CR-факторизации матриц большой размерности // Там же. — 2007. — 29, № 6. — С. 3—22.

*S.E. Saukh*

METHOD OF SMALL ELEMENTS DISPLACEMENT IN GENERALIZED CLARK JACOBIANS TO ENSURE NUMERICAL STABILITY OF QUASI-NEWTON METHODS FOR SOLUTION OF VARIATION INEQUALITIES

Infinitesimal elements of matrix components of generalized Fischer-Burmeister have been analyzed, conditions of singularity initiation of such matrix components have been determined. An analogous analysis has been made in conditions of finite-digit calculations of small elements of the same matrix components. The conditions of initiation of badly determined and singular matrix components of generalized Clark Jacobians for non-smooth systems of nonlinear algebraic equation, which are formed using special methods of problems transformation into variation inequalities, have been studied. A method of displacement of small elements of matrix components of generalized Clark Jacobian ensuring numerical stability of quasi-Newton methods for iteration solution of variation equations has been developed.

*Keywords:* generalize Clark Jacobian, quasi-Newton methods, numerical stability, displacement method, small quantities.

REFERENCES

1. Facchinei, F. and Pang, J.-S. (2003), Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems, Vol. I, New York, Springer, USA.
2. Facchinei, F. and Pang, J.-S. (2003), Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems, Vol. II, New York, Springer, USA.
3. Ruggiero, V. and Tinti, F. (2006), "A preconditioner for solving large scale variational inequality problems by a semismooth inexact approach", *Intern. Journal of Computer Mathematics*, no. 10, pp. 723-739.
4. Petra, S. (2008), "Semismooth least squares methods for complementarity problems", Ph.D. Thesis, Wurzburg, available at: [http://www.opus-bayern.de/uni-wuerzburg/volltexte/2006/1866/pdf/dissertation\\_petra.pdf](http://www.opus-bayern.de/uni-wuerzburg/volltexte/2006/1866/pdf/dissertation_petra.pdf).
5. Kanzow, C. (2003), "Inexact semismooth Newton methods for large-scale complementarity problems", Wurzburg, Institute of Applied Mathematics and Statistics, available at: <http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~kanzow/paper/InSemiP.pdf>.
6. Billups, S.C., Dirkse, S.P. and Ferris, M.C. (1997), "A comparison of large scale mixed complementarity problem solvers", *Computational Optimization and Applications*, no. 7, pp. 3-25.
7. Fischer, A. (1992), "A special Newton-type optimization method", *Optimization*, Vol. 24, no. 3-4, pp. 269-284.
8. Dirkse, S.P. and Ferris, M.C. (1995), "The PATH solver: A non-monotone stabilization scheme for mixed complementarity problems", *Optimization Methods and Software*, no. 5, pp. 125-156.
9. Saad, Y. (2003), Iterative methods for sparse linear systems, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA.
10. "Energy Research Centre of the Netherlands" (2015), COMPETES input data, available at: <http://www.ecn.nl/fileadmin/ecn/units/bs/COMPETES/flowgate-information.xls> (accessed June 17, 2015), cost-functions.xls (accessed June 17, 2015).
11. Saukh, S.E. (2013), "Methods of computer modeling of competitive equilibrium in electric power markets", *Electronnoe modelirovanie*, Vol. 35, no. 5, pp. 11-26.
12. Saukh, S.E. (2007), "Method of CR-factorization of great dimension matrices", *Electronnoe modelirovanie*, Vol 29, no. 6, pp. 3-22.

Поступила 27.05.15

*САУХ Сергей Евгеньевич, д-р техн. наук, гл. науч. сотр. Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1978 г. окончил Киевский ин-т инженеров гражданской авиации. Область научных исследований — численные операторные методы решения дифференциальных уравнений, декомпозиционные и итерационные методы решения линейных систем большой мерности, математическое моделирование технологических процессов в энергетике и газотранспортных системах, экономико-математические методы моделирования финансовых и макроэкономических процессов.*



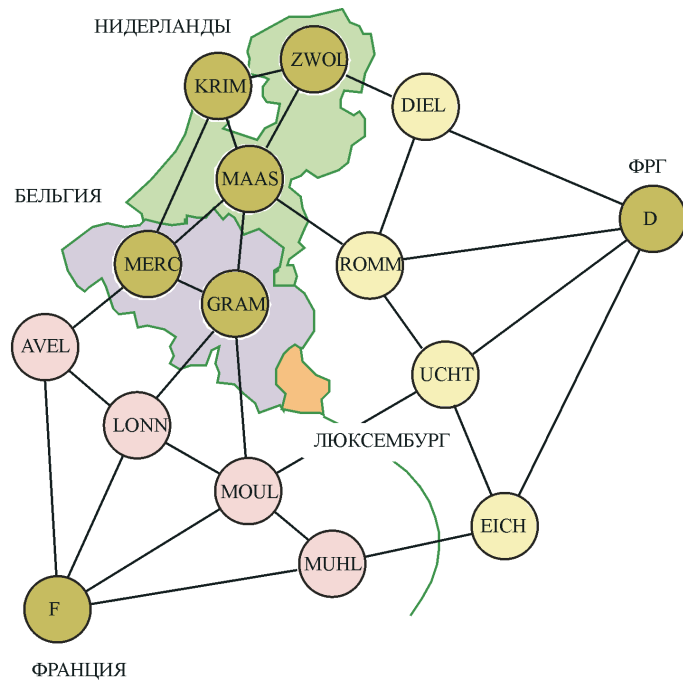


Рис. 1