©2007. **Масюта Е.А.**

МНОГООБРАЗИЕ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ, ОБЛАДАЮЩИХ ИЗОЛИРОВАННЫМ СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ

В статье рассматривается подмножество самосопряженных операторов, у которых определенные собственные значения обладают фиксированной кратностью. С помощью метода, предложенного D.Fujiwara, M.Tanikawa, Sh. Yukita, показывается, что исследуемое подмножество является банаховым подмногообразием, коразмерность которого зависит только от кратности отслеживаемых собственных значений и вычисляется по формуле, предложенной В.И.Арнольдом.

Ключевые слова: кратность собственного значения, многообразие самосопряженных операторов
MSC (2000): 35З05

Введение.

В своей работе [1] В.И.Арнольд обратил внимание на то, что самосопряженные конечномерные операторы, у которых определенное собственное значение имеет определенную кратность, образуют подмногообразие в пространстве всех операторов, причем коразмерность этого подмногообразия зависит только от кратности собственного значения и не зависит ни от номера собственного значения, ни от размерности объемлющего пространства. Также им была выведена формула коразмерности таких подмногообразий. Гипотеза В.И.Арнольда состоит в том, что это наблюдение справедливо для естественных семейств самосопряженных операторов.

Для случая компактных операторов гипотеза рассматривалась в работах группы японских математиков D.Fujiwara, M.Tanikawa, Sh.Yukita [2], итальянских - D.Lupo и A.M.Micheletti [3], а также в работах Я.М.Дымарского (например, в [4]).

В настоящей работе исследуется случай ограниченных самосопряженных операторов, имеющих изолированное собственное значение фиксированной кратности. С помощью метода работы [2] подтверждается гипотеза Арнольда – рассматриваемые операторы образуют многообразие, коразмерность которогозависит только от кратности отслеживаемого собственного значения. Также получен подобный результат и для случая самосопряженных операторов, имеющих счетное число изолированных собственных значений.

Автор выражает благодарность Я.М.Дымарскому за постановку проблемы и подробное обсуждение.

1. Вспомогательная лемма.

Здесь пойдет речь о диффеоморфизме, введенном в работе [2]. Мы дадим основные определения, сформулируем и докажем вспомогательную лемму.

Итак, пусть H – вещественное гильбертово сепарабельное пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. L_s – банахово пространство ограниченных самосопряженных операторов. Пусть A^0 – фиксированный оператор из L_s, $V_\varepsilon(A^0) = \{A : \|A - A^0\| < \varepsilon\}$, λ^0 – изолированная точка спектра оператора A^0. Тогда [6] λ^0 – это изолированное собственное значение (и только) оператора A^0 некоторой кратности $m \leq \infty$. Обозначим через $L_s(A^0, \varepsilon, m) \subset L_s$ множество всех таких операторов A, что:

1. $A \subset V_\varepsilon(A^0)$;
2. $\exists\ \lambda \in (\lambda^0 - \varepsilon; \lambda^0 + \varepsilon)$ – изолированное в указанной окрестности собственное значение для оператора A.

Ниже будет показано, что при малом ε кратность отслеживаемого собственного значения $\lambda(A) \in (\lambda^0 - \varepsilon; \lambda^0 + \varepsilon)$ равна m. Поэтому в обозначении $L_s(A^0, \varepsilon, m)$ мы поставили m.

Определим локальный диффеоморфизм в окрестности $V_\varepsilon(A^0)$. Пусть $H_1 \subset H$ – собственное подпространство A^0, порожденное собственными векторами, которые отвечают собственному значению λ_0; $\{u_1^0, u_2^0, \ldots\}$ – ортонормированный базис в H_1. Пусть $H_\perp$ – ортогональное дополнение к H_1 в H. Обозначим через ν_1 и $\nu_\perp$ ортогональные проекторы на H_1 и $H_\perp$ соответственно. Понятно, что оператор B представим в виде $B = B_{11} + B_{1\perp} + B_{\perp 1} + B_{\perp\perp}$ или блочном виде

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{1\perp} \\ B_{\perp 1} & B_{\perp\perp} \end{pmatrix}.$$

Определим антисимметрический оператор $Ant(B) = -B_{1\perp} + B_{\perp 1}$ и самосопряженный блочно-диагональный оператор $Diag(B) = B_{11} + B_{\perp\perp}$.

Рассмотрим отображение

$$\Psi : L_s \to L_s \quad \Psi(B) = \exp(Ant(B))(A^0 + Diag(B))(\exp(-Ant(B)),$$

где операторная экспонента $\exp(C) = E + C + \frac{1}{2!}C^2 + \ldots$.

Лемма 1. *Существует такое $\varepsilon > 0$, что отображение Ψ диффеоморфно отображает некоторую окрестность $V(0) \subset L_s$ нуля пространства L_s на ε-окрестность $V_\varepsilon(A^0) \subset L_s$ точки A^0.*

Доказательство. Сначала покажем, что отображение Ψ действует из L_s в L_s. Рассмотрим экспоненту $\exp(Ant(B)) = U$ от антисимметрического оператора. Известно [7], что это изометрический изоморфизм. Следовательно, операторы $A^0 + Diag(B)$ и $\Psi(B)$ ортогонально эквивалентны. Так как $A^0 + Diag(B) \in L_s$, то и $\Psi(B) \in L_s$. Убедимся в том, что $\Psi(0) = A^0$:

$$\Psi(0) = \exp(Ant(0))(A^0 + Diag(0)) \exp(-Ant(0)) = E(A^0 + 0)E = A^0.$$

Отображение Ψ, в силу определения, бесконечно дифференцируемо. Найдем производную $D\Psi(0)$ в точке $0 \in L_s$ и докажем что она является линейным изоморфизмом. Тогда утверждение леммы непосредственно будет следовать из теоремы о существовании обратного отображения. Чтобы найти производную оператора Ψ, разложим операторную экспоненту в ряд, а затем выделим линейную часть:

$$\Psi(0 + \Delta B) - \Psi(0) =$$

$$= \exp(Ant(\Delta B))(A^0 + Diag(\Delta B)) \exp(-Ant(\Delta B)) - A^0 =$$

$$= (E + Ant(\Delta B) + \tfrac{1}{2!}(Ant(\Delta B))^2 + \ldots)(A^0 + Diag(\Delta B))\times$$

$$\times(E - Ant(\Delta B) + \tfrac{1}{2!}(Ant(\Delta B))^2 - \ldots) - A^0 =$$

$$= Diag(\Delta B) + Ant(\Delta B) \cdot A^0 - A^0 \cdot Ant(\Delta B) + o(\Delta B),$$

где $\lim_{\Delta B \to 0} \frac{\|o(\Delta B)\|}{\|\Delta B\|} = 0$.

Следовательно

$$D\Psi(0)\Delta B =$$

$$= Diag(\Delta B) + (Ant(\Delta B) \cdot A^0 - A^0 \cdot Ant(\Delta B)) =$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta B_{11} & 0 \\ 0 & \Delta B_{\perp\perp} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\Delta B_{1\perp} \cdot A^0_{\perp\perp} \\ \Delta B_{\perp 1} \cdot A^0_{11} & 0 \end{pmatrix} - \tag{1}$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & -A^0_{11} \cdot \Delta B_{1\perp} \\ A^0_{\perp\perp} \cdot \Delta B_{\perp 1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $D\Psi(0)$ является биекцией. Поскольку произвольные операторы $\Delta B, C \in L_s$ единственным образом представимы в виде:

$$\Delta B = Diag(\Delta B) + \Delta B_{1\perp} + \Delta B_{\perp 1},$$
$$C = Diag(C) + C_{1\perp} + C_{\perp 1},$$

то решение относительно ΔB уравнения $D\Psi(0)\Delta B = C$ равносильно системе:

$$Diag(\Delta B) = Diag(C); \tag{2}$$

$$\begin{aligned} C_{1\perp} &= A^0_{11} \cdot \Delta B_{1\perp} - \Delta B_{1\perp} \cdot A^0_{\perp\perp}, \\ C_{\perp 1} &= \Delta B_{\perp 1} \cdot A^0_{11} - A^0_{\perp\perp} \cdot \Delta B_{\perp 1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Первое уравнение полученной системы тривиально разрешимо относительно $Diag(\Delta B)$. Уравнения (3) очевидно сопряжены, поэтому достаточно исследовать первое. Учитывая, что

$$A^0 = Diag(A^0) = \lambda^0 E_{11} + A^0_{\perp\perp},$$

получаем

$$A^0_{11} \cdot \Delta B_{1\perp} - \Delta B_{1\perp} \cdot A^0_{\perp\perp} =$$

$$= \lambda^0 \Delta B_{1\perp} - \Delta B_{1\perp} \cdot A^0_{\perp\perp} = \Delta B_{1\perp}(\lambda^0 E_{\perp\perp} - A^0_{\perp\perp}).$$

Поэтому уравнение (3) равносильно уравнению

$$C_{1\perp} = \Delta B_{1\perp}(\lambda^0 E_{\perp\perp} - A^0_{\perp\perp}).$$

Поскольку λ^0 не является точкой спектра оператора $A^0_{\perp\perp}$, то оператор $(\lambda^0 E_{\perp\perp} - A^0_{\perp\perp})$ является изоморфизмом. Следовательно, существует обратный оператор $(\lambda^0 E_{\perp\perp} - A^0_{\perp\perp})^{-1}$, поэтому

$$\Delta B_{1\perp} = C_{1\perp} \cdot (\lambda^0 E_{\perp\perp} - A^0_{\perp\perp})^{-1}, \; \Delta B_{\perp 1} = (\lambda^0 E_{\perp\perp} - A^0_{\perp\perp})^{-1} \cdot C_{\perp 1}.$$

Итак, $D\Psi(0)\Delta B$ – биекция. И, следовательно, лемма доказана. □

2. Основная теорема.

Мы будем следить за одним изолированным собственным значением фиксированной кратности. Определим линейные функционалы

$$l_{ij} : L_s \to \mathbf{R}, \quad l_{ij}(B) := \langle Bu_i, u_j\rangle - \delta_{ij}\langle Bu_1, u_1\rangle, \tag{4}$$

где $1 \le i \le j \le m$, если m конечно, и $1 \le i \le j < \infty$, если m бесконечно, $i \cdot j > 1$, δ_{ij} – символ Кронекера.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Существует такое малое $\varepsilon > 0$, что $L_s(A^0, \varepsilon, m) \subset L_s$ является C^∞-подмногообразием.*

2. *Кратность собственного значения λ оператора $A \in L_s(A^0, \varepsilon, m)$ равна m.*

3. *Если $m < \infty$, то коразмерность $L_s(A^0, \varepsilon, m)$ вычисляется по формуле Арнольда:*

$$co\dim L_s(A^0, \varepsilon, m) = \frac{(m-1)(m+2)}{2}.$$

4. *Если $m = \infty$, то $co\dim L_s(A^0, \varepsilon, \infty) = \infty$.*

5. *Подмногообразие $L_s(A^0, \varepsilon, m)$ определяется следующим образом:*

$$L_s(A^0, \varepsilon, m) =$$
$$= \{C \in V_\varepsilon(A^0) : \langle \Psi^{-1}(C)u_i, u_j\rangle - \delta_{ij}\langle \Psi^{-1}(C)u_1, u_1\rangle = 0\},$$

где $1 \le i \le j \le m$, если m конечно, и $1 \le i \le j < \infty$, если m бесконечно, $i \cdot j > 1$.

6. *Касательное пространство $T_{A^0}L_s(A^0, \varepsilon, m)$ в точке A^0 определяется условиями:*

$$T_{A^0}L_s(A^0, \varepsilon, m) = \{B \in L_s : l_{ij}(B) = 0\} \tag{5}$$

где $1 \le i \le j \le m$, если m конечно, и $1 \le i \le j < \infty$, если m бесконечно, $i \cdot j > 1$.

Доказательство. Итак, есть оператор $A^0 = \lambda^0 E_{11} + A^0_{\perp\perp}$. Если m конечномерно, то блок $(\lambda^0 E_{11})$ – конечен, а если $m = \infty$ – бесконечен. Возьмем произвольный оператор вида

$$B = \begin{pmatrix} \delta E_{11} & B_{1\perp} \\ B_{\perp 1} & B_{\perp\perp} \end{pmatrix} \in L_s$$

и применим к нему отображение Ψ. Полученный оператор

$$\begin{aligned} &A := \Psi(B) = \\ &= \exp\begin{pmatrix} 0 & -B_{1\perp} \\ B_{\perp 1} & 0 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} (\lambda^0 + \delta)E_{11} & 0 \\ 0 & A^0_{\perp\perp} + B_{\perp\perp} \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & B_{1\perp} \\ -B_{\perp 1} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Оператор A и оператор

$$\begin{pmatrix} (\lambda^0 + \delta)E_{11} & 0 \\ 0 & A^0_{\perp\perp} + B_{\perp\perp} \end{pmatrix} \in L_s(A^0, \varepsilon, m)$$

ортогонально эквивалентны. Поэтому и $A \in L_s(A^0, \varepsilon, m)$.

Покажем, что с помощью Ψ мы получим все операторы $A \in L_s(A^0, \varepsilon, m)$. Возьмем малый оператор B, у которого $B_{11} \neq \delta E_{11}$. Тогда спектр оператора $(\lambda^0 E_{11} + B_{11} + A^0_{\perp\perp} + B_{\perp\perp})$ в ε-окрестности точки λ^0 отличен от изолированной точки. Поэтому спектр унитарно-изоморфного ему оператора $A = \Psi(B)$ обладает тем же свойством. Последнее противоречит определению множества $L_s(A^0, \varepsilon, m)$.

Итак, операторы $A \in L_s(A^0, \varepsilon, m)$ являются образом при диффеоморфизме Ψ операторов, вида $\begin{pmatrix} \delta E_{11} & B_{1\perp} \\ B_{\perp 1} & B_{\perp\perp} \end{pmatrix}$, которые образуют окрестность нуля в замкнутом подпространстве $T_{A^0} \subset L_s$, определяемом условием: блок $B_{11} = \delta E_{11}$ состоит из скалярных операторов и только из них.

Прямым дополнением к подпространству T_{A^0} является замкнутое подпространство T'_{A^0} операторов, удовлетворяющих условию $B = \nu_1 B \nu_1 = G_{11}$, где G_{11} – произвольный оператор, удовлетворяющий условию: $\langle G_{11} u_1^0, u_1^0 \rangle = 0$. Очевидно, что $T'_{A^0} \cap T_{A^0} = 0 \in L_s$ и для любого $B \in L_s$ верно $B = B_1 + B_2$, где

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \langle B u_1^0, u_1^0 \rangle \cdot E_{11} + B_{1\perp} + B_{\perp 1} + B_{\perp\perp} \in T_{A^0}, \\
B_2 &= (B_{11} - \langle B u_1^0, u_1^0 \rangle \cdot E_{11}) + 0_{1\perp} + 0_{\perp 1} + 0_{\perp\perp} \in T'_{A^0}.
\end{aligned}
$$

Следовательно, подпространство $T_{A^0} \subset L_s$ разлагает пространство L_s. Поэтому [8], образ $\Psi(T_{A^0} \cap V(0)) = L_s(A^0, \varepsilon, m)$ является банаховым подмногообразием.

Заметим, что выполнение условий, определяющих подпространство T_{A^0}, есть выполнение условий (5). Если m конечно, то количество условий подсчитать не трудно – их будет $\frac{(m-1)(m+2)}{2}$ штук. Следовательно, $co\dim L_s(A^0, \varepsilon, m) = \frac{(m-1)(m+2)}{2}$. Если же m бесконечно, то и количество условий бесконечно, следовательно $co\dim L_s(A^0, \varepsilon, \infty) = \infty$.

Покажем, что условия (5) определяют именно касательное пространство к подмногообразию $L_s(A^0, \varepsilon, m)$, то есть $T_{A^0} L_s(A^0, \varepsilon, m) = T_{A^0}$. Так как $L_s(A^0, \varepsilon, m) = Im\Psi(T_{A^0} \cap V(0))$, то $T_{A^0} L_s(A^0, \varepsilon, m) = Im D\Psi(0)(T_{A^0})$. Пусть $\Delta B \in T_{A^0}$. Мы знаем, что $D\Psi(0)\Delta B = Diag(\Delta B) + (Ant(\Delta B) \cdot A^0 - A^0 \cdot Ant(\Delta B))$. Из (1) следует, что $D\Psi(0)$ не меняет диагональные компоненты. Следовательно $D\Psi(0)(T_{A^0}) \subset T_{A^0}$. С другой стороны, $D\Psi(0)$ – линейный изоморфизм, поэтому $D\Psi(0)(T_{A^0}) = T_{A^0}$. Итак, $T_{A^0} L_s(A^0, \varepsilon, m) = T_{A^0}$.

Теорема полностью доказана. $\square$

3. Случай нескольких собственных значений.

Будем отслеживать конечное число собственных значений конечной или бесконечной кратности.

Пусть A^0 – фиксированный оператор из L_s, у которого имеются изолированные точки спектра $\lambda_1^0, .., \lambda_k^0, .., \lambda_n^0$ $(k = 1, .., n)$, которые являются [6] собственными значениями кратности $m_1 \leq \infty, \ldots, m_k \leq \infty, \ldots, m_n \leq \infty$ соответственно. Заметим, что $k = 1, \ldots, n$ это не номер собственного значения, а внутренняя нумерация выбранных нами изолированных точек спектра оператора A^0. Понятно, что у оператора A^0 могут быть и другие изолированные собственные значения. Обозначим через $\zeta_n = (m_1, \ldots, m_k, \ldots, m_n)$ набор из кратностей выбранных собственных значений оператора A^0.

Обозначим через $L_s(A^0, \varepsilon, \zeta_n)$ множество таких операторов A, что:

1. $A \subset V_\varepsilon(A^0) \subset L_s$;

2. $\exists\ \lambda_k \in (\lambda_k^0 - \varepsilon; \lambda_k^0 + \varepsilon)$ – изолированные в указанных окрестностях собственные значения оператора A.

Определим, как и в пункте I, локальный диффеоморфизм в окрестности $V_\varepsilon(A^0)$, согласованный с отслеживаемыми собственными подпространствами. Пусть $H_k \subset H$ – m_k-мерное векторное подпространство порожденное ортонормированными собственными векторами $u_{k,1}, \ldots, u_{k,m_k}$, которые отвечают m_k-кратному собственному значению λ_k^0, где $k = 1, \ldots, n$. Пусть $H_\perp$ – ортогональное дополнение к $H_1 \oplus \ldots \oplus H_n$ в H. Понятно, что оператор A^0 имеет следующий блочный вид:

$$A^0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 E_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & 0 & \lambda_n^0 E_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^0_{\perp\perp} \end{pmatrix}.$$

Представим произвольный оператор B в блочном виде, согласованным с разложением на блоки оператора A^0:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} & B_{1\perp} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{nn} & B_{n\perp} \\ B_{\perp 1} & \cdots & B_{\perp n} & B_{\perp\perp} \end{pmatrix}.$$

Определим самосопряженный блочно-диагональный оператор

$$Diag(B) = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_{\perp\perp} \end{pmatrix}$$

и антисимметрический оператор

$$Ant(B) = \begin{pmatrix} 0 & -B_{12} & -B_{13} & \cdots & -B_{1n} & -B_{1\perp} \\ B_{21} & 0 & -B_{23} & \cdots & -B_{2n} & -B_{2\perp} \\ B_{31} & B_{32} & 0 & \cdots & -B_{3n} & -B_{3\perp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & B_{n3} & \cdots & 0 & -B_{n\perp} \\ B_{\perp 1} & B_{\perp 2} & B_{\perp 3} & \cdots & B_{\perp n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим отображение

$$\Psi : L_s \to L_s,$$

$$\Psi(B) = \exp(Ant(B))(A^0 + Diag(B))(\exp(-Ant(B)).$$

Лемма 2. *Существует такое $\varepsilon > 0$, что отображение Ψ диффеоморфно отображает некоторую окрестность $V(0) \subset L_s$ нуля пространства L_s на ε-окрестность $V_\varepsilon(A^0) \subset L_s$ точки A^0.*

Доказательство леммы 2 осуществляется аналогично доказательству леммы 1.

Так, для случая двух собственных значений, решение относительно ΔB уравнения

$D\Psi(0)\Delta B = C$ равносильно системе, аналогичной (2) и (3) :

$$Diag(\Delta B) = Diag(C),$$
$$C_{12} = -\Delta B_{12}A^0_{22} + A^0_{11}B_{12}, \quad C_{21} = \Delta B_{21}A^0_{11} - A^0_{22}\Delta B_{21},$$
$$C_{13} = -\Delta B_{13}A^0_{33} + A^0_{11}\Delta B_{13}, \quad C_{31} = \Delta B_{31}A^0_{11} - A^0_{33}\Delta B_{31},$$
$$C_{23} = -\Delta B_{23}A^0_{33} + A^0_{22}\Delta B_{23}, \quad C_{32} = \Delta B_{32}A^0_{22} - A^0_{33}\Delta B_{32}.$$

Дальнейшие рассуждения в точности повторяют доказательство леммы 1. □

Аналогично (4), определим линейные функционалы

$$l^k_{ij} : L_s \to \mathbf{R}, \quad l^k_{ij}(B) := \langle Bu_{k,i}, u_{k,j}\rangle - \delta_{ij}\langle Bu_{k,1}, u_{k,1}\rangle, \tag{6}$$

где $1 \leq i \leq j \leq m_k$, если $m_k < \infty$, и $1 \leq i \leq j < \infty$, если $m = \infty$, $i \cdot j > 1$, $k = 1, \dots, n$, δ_{ij} – символ Кронекера.

Имеет место

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Существует* $\varepsilon > 0$, *что* $L_s(A^0, \varepsilon, \zeta_n) \subset L_s$ – C^∞*-подмногообразие коразмерности*

$$co\dim L_s(A^0, \varepsilon, \zeta_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(m_i - 1)(m_i + 2)}{2}.$$

2. *Кратность собственного значения* λ_k *оператора* $A \in L_s(A^0, \varepsilon, \zeta_n)$ *равна* m_k, *где* $k = 1, \dots, n$.

3. *Подмногообразие* $L_s(A^0, \varepsilon, \zeta_n)$ *определяется следующим образом:*

$$L_s(A^0, \varepsilon, \zeta_n) = \{C \in V_\varepsilon(A^0) : \langle \Psi^{-1}(C)u_{k,i}, u_{k,j}\rangle - \\ -\delta_{ij}\langle \Psi^{-1}(C)u_{k,1}, u_{k,1}\rangle = 0\},$$

где $1 \leq i \leq j \leq m_k$, *если* $m_k < \infty$, *и* $1 \leq i \leq j < \infty$, *если* $m = \infty$, $i \cdot j > 1$, $k = 1, \dots, n$.

4. *Касательное пространство* $T_{A^0}L_s(A^0, \varepsilon, \zeta_n)$ *в точке* A^0 *определяется условиями:*

$$T_{A^0}L_s(A^0, \varepsilon, \zeta_n) = \{B \in L_s : l^k_{ij}(B) = 0\},$$

где $1 \leq i \leq j \leq m_k$, *если* $m_k < \infty$, *и* $1 \leq i \leq j < \infty$, *если* $m = \infty$, $i \cdot j > 1$, $k = 1, \dots, n$.

Доказательство этой теоремы осуществляется аналогично доказательству теоремы 1. □

Рассмотрим теперь самый общий случай счетного числа собственных значений произвольной кратности.

Пусть A^0 – фиксированный оператор из L_s, у которого имеются изолированные точки спектра λ_k^0 $(k = 1, 2, \ldots)$, которые являются собственными значениями кратности $m_k \leq \infty$ соответственно. Обозначим через $\zeta_\infty = (m_1, \ldots, m_k, \ldots)$ счетный набор кратностей собственных значений. Пусть $L_s(A^0, \varepsilon, \zeta_\infty)$ – множество таких операторов A, что:

1. $A \subset V_\varepsilon(A^0) \subset L_s$;
2. $\exists\, \lambda_k \in (\lambda_k^0 - \varepsilon; \lambda_k^0 + \varepsilon)$ – изолированные в указанных окрестностях собственные значения оператора A.

Аналогично рассуждениям, приведенным выше, введем блочное разбиение операторов $B \in L_s$ (в этом случае количество блоков бесконечно), определим самосопряженный блочно-диагональный $Diag(B)$ и антисимметрический $Ant(B)$ операторы, локальный диффеоморфизм Ψ в окрестности $V_\varepsilon(A^0)$, линейные функционалы (6), где $1 \leq i \leq j \leq m_k$, если $m_k < \infty$, и $1 \leq i \leq j < \infty$, если $m = \infty$, $i \cdot j > 1$, $k = 1, 2, \ldots$.

Справедлива

Лемма 3. *Существует такое $\varepsilon > 0$, что отображение Ψ диффеоморфно отображает некоторую окрестность $V(0) \subset L_s$ нуля пространства L_s на ε-окрестность $V_\varepsilon(A^0) \subset L_s$ точки A^0.*

Имеет место

Теорема 3. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Существует $\varepsilon > 0$, что $L_s(A^0, \varepsilon, \zeta_\infty) \subset L_s$ – C^∞-подмногообразие коразмерности ∞.*
2. *Кратность собственного значения λ_k оператора $A \in L_s(A^0, \varepsilon, \zeta_\infty)$ равна m_k, где $k = 1, 2, \ldots$.*
3. *Подмногообразие $L_s(A^0, \varepsilon, \zeta_\infty)$ определяется следующим образом:*

$$L_s(A^0, \varepsilon, \zeta_\infty) = \{C \in V_\varepsilon(A^0) : \langle \Psi^{-1}(C) u_{k,i}, u_{k,j} \rangle - \\ - \delta_{ij} \langle \Psi^{-1}(C) u_{k,1}, u_{k,1} \rangle = 0\},$$

где $1 \le i \le j \le m_k$, *если* $m_k < \infty$, *и* $1 \le i \le j < \infty$, *если* $m = \infty$, $i \cdot j > 1$, $k = 1, 2, \dots$.

4. *Касательное пространство* $T_{A^0} L_s(A^0, \varepsilon, \zeta_\infty)$ *в точке* A^0 *определяется условиями:*

$$T_{A^0} L_s(A^0, \varepsilon, \zeta_\infty) = \{B \in L_s : l_{ij}^k(B) = 0\}, \tag{7}$$

где $1 \le i \le j \le m_k$, *если* $m_k < \infty$, *и* $1 \le i \le j < \infty$, *если* $m = \infty$, $i \cdot j > 1$, $k = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 1, можно показать, что операторы $A \in L_s(A^0, \varepsilon, \zeta_\infty)$ являются образом при диффеоморфизме Ψ операторов, близких к нулю, вида

$$B = \begin{pmatrix} \delta_1 E_{11} & B_{12} & B_{13} & \cdots & B_{1\perp} \\ B_{21} & \delta_2 E_{22} & B_{23} & \cdots & B_{2\perp} \\ B_{31} & B_{32} & \delta_3 E_{33} & \cdots & B_{3\perp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{\perp 1} & B_{\perp 2} & B_{\perp 3} & \cdots & B_{\perp\perp} \end{pmatrix},$$

имеющих бесконечное количество блоков. Эти операторы B образуют окрестность нуля в замкнутом подпространстве $T_{A^0} \subset L_s$, определяемом условием: блоки $B_{kk} = \delta_k E_{kk}$, $(k = 1, 2, \dots)$ состоят из скалярных операторов и только из них.

Прямым дополнением к подпространству T_{A^0} является замкнутое подпространство T'_{A^0} операторов, имеющих вид

$$B = \nu_1 B \nu_1 + \nu_2 B \nu_2 + \ldots = \begin{pmatrix} G_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

где G_{kk} – произвольный оператор, удовлетворяющий условиям: $\langle G_{kk} u_{k,1}^0, u_{k,1}^0 \rangle = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Очевидно, что $T'_{A^0} \cap T_{A^0} = 0 \in L_s$. Следовательно, подпространство $T_{A^0} \subset L_s$ разлагает пространство L_s. Поэтому, образ $\Psi(T_{A^0} \cap V(0)) = L_s(A^0, \varepsilon, \zeta_\infty)$ является банаховым подмногообразием.

Выполнение условий, определяющих подпространство T_{A^0}, есть выполнение условий (7) и, очевидно, их будет бесконечное количество. Следовательно, $co\dim L_s(A^0, \varepsilon, \zeta_\infty) = \infty$.

Далее, проводя рассуждения, аналогичные соответствующим рассуждениям в доказательстве теоремы 1, можно показать, что касательное пространство к подмногообразию $L_s(A^0, \varepsilon, \zeta_\infty)$ в точке A^0 есть в точности T_{A^0}.

Теорема доказана. □

1. *Арнольд В.И.* Моды и квазимоды // Функциональный анализ и его приложения. - 1972. - 6, №2. - с.94-101.
2. *Fujiwara D., Tanikawa M., Yukita Sh.* The spectrum of Laplacian and boundary perturbation. I // Proc. Jap. Acad. Ser. A. - 1978. - 54, № 4.- p. 87-91.
3. *Lupo D, Micheletti A.M.* On multiple egenvalues of selfadjoint compact operators. // J. Math. Anal. and Appl. -1993. - 172. - p.106-116.
4. *Dymarskii Ya.M.* On manifolds of self-adjoint elliptic operators with multiple eigenvalues // Methods Funct.Anal.Topol. - 2001. - vol. 7 , № 2. - p.68-74.
5. *Дымарский Я.М.* Многообразия самосопряженных операторов с кратными собственными значениями // Матем.физика, анализ, геометрия - 2001. - 8, №2. - с. 148-157.
6. *Хелемский А.Я.* Лекции по функциональному анализу. - М.:МЦНМО, 2004. - 552 с.
7. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: методы и приложения. - М.:Наука, 1986. - 760 с.
8. *Ленг С.*Введение в теорию дифференцируемых многообразий. - М.:Мир, 1967. - 204 с.

Кафедра математического анализа и алгебры
Луганский национальный педагогический
университет им. Тараса Шевченко,
ул.Оборонная, 2,
91011 г.Луганск, Украина
cegec@yandex.ru

Получено 20.03.07