©2007. **Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю.**

УЗАГАЛЬНЕНІ КРАЙОВІ ЗНАЧЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ПІВЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ ТА ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Стаття присвячена актуальній проблемі дослідження властивостей узагальнених крайових значень розв'язків півлінійних еліптичних та параболічних рівнянь. Одержано умови щодо нелінійної частини, за яких регулярні всередині області та із певного вагового L^1-простору розв'язки півлінійних еліптичних та параболічних рівнянь порядку $2m$ набувають крайових значень із простору узагальнених функцій.

Ключові слова: напівлінійне еліптичне рівняння, напівлінійне параболічне рівняння, узагальнені крайові значення розв'язку,узагальнені початкові значення розв'язку, узагальнена функція,ваговий L^1-простір.
MSC (2000): 35J67, 35K35

1. Узагальнені крайові значення розв'язків півлінійних еліптичних рівнянь.

1.1. Основні позначення та допоміжні твердження.

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею S класу C^∞.
Використовуватимемо позначення:

- α – мультиіндекс з компонентами $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = \overline{1,n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ – довжина мультиіндексу α,
- $A(x, D_x) = \sum\limits_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$ – еліптичний диференціальний вираз порядку $2m$, $a_\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $D^\alpha \equiv D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\partial x_n^{\alpha_n}}$;
- на S задані крайові диференціальні вирази

$$B_j(x, D_x) = \sum_{|\alpha|\le m_j}, \; b_{j\alpha}(x) D^\alpha, \; b_{j\alpha} \in C^\infty(S), \; j = \overline{1,m},$$

  система $\{B_j(x, D_x)\}_{j=1}^m$ нормальна і задовольняє умову Лопатинського для $A(x, D_x)$,

- $T_j, \widehat{B}_j, \widehat{T}_j$ – такі нормальні системи крайових диференціальних виразів відповідно порядків $\widehat{m}_j$, $2m-\widehat{m}_j-1$, $2m-m_j-1$, $j=\overline{1,m}$, що правильна (див., напр., [1]) формула Гріна

$$\int\limits_{\Omega}(vAu-uA^*v)\,dx = \\ = \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{S}(\widehat{B}_j vT_j u-\widehat{T}_j vB_j u)\,dS, \quad u,v\in C^\infty(\overline{\Omega}), \tag{1}$$

де A^* – формально спряжений до A диференціальний оператор.

Нехай ε_0 – фіксоване мале число. Відомо, що паралельні до поверхні S класу C^∞ поверхні S_ε при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ також є класу C^∞. Між точками S та S_ε є взаємооднозначна відповідність: $x_\varepsilon=x+\varepsilon\nu(x)=\psi(x,\varepsilon)$, $x\in S$, $x=\psi^{-1}(x_\varepsilon,\varepsilon)$ з якобіаном $W_\varepsilon(x)$, де $\nu(x)$ – орт внутрішньої нормалі до S у точці $x\in S$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}W_\varepsilon(x)=1$. Гомеоморфізми ψ та ψ^{-1} є нескінченно диференційовними та обмеженими разом з усіма похідними (див. [1]). Нехай Ω_ε – підобласть Ω з межею S_ε.

Для φ із простору гладких функцій $D(S)=C^\infty(S)$ визначимо їх значення $\psi^*\varphi$ на поверхнях S_ε: $(\psi^*\varphi)(x_\varepsilon)=\varphi(\psi(x,\varepsilon))=\varphi(x)$ для $\varepsilon\in[0,\frac{\varepsilon_0}{2}]$ та $(\psi^*\varphi)(x_\varepsilon)=0$ для $\varepsilon>\varepsilon_0$.

Якщо $\tilde{B}_j(x,D_x)=\sum\limits_{|\alpha|\le j}\tilde{b}_{j\alpha}(x)D^\alpha$, $j=\overline{0,2m-1}$ – система Діріхле порядку $2m$ на S [1], то продовжуючи із S всередину Ω коефіцієнти $\tilde{b}_{j\alpha}$ операторів $\tilde{B}_j(x,D_x)$, на S_ε визначаємо

$$\tilde{B}_j(x_\varepsilon,D_{x_\varepsilon})v=\sum_{|\alpha|\le j}(\psi^*\tilde{b}_{j\alpha})(x_\varepsilon)D^\alpha_{x_\varepsilon}v(x_\varepsilon),\ v\in D(\overline{\Omega}).$$

Так визначені оператори $\tilde{B}_j(x_\varepsilon,D_{x_\varepsilon})$, $j=\overline{0,2m-1}$ також утворюють систему Діріхле на S_ε (див. [2, ч. 111]). У [3] на прикладі задачі Діріхле для системи рівнянь другого порядку показано, що при досить малих ε ці оператори також задовольняють умову Лопатинського.

За продовженими на S_ε виразами $\{B_j,T_j\}_{j=1}^m$ визначаються однозначно такі $\widehat{B}_j,\widehat{T}_j$ на S_ε, при яких правильна формула (1) для області Ω_ε, при цьому $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\widehat{B}_i v)(x_\varepsilon)=(\widehat{B}_i v)(x)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\widehat{T}_i v)(x_\varepsilon)=(\widehat{T}_i v)(x)$, $i=\overline{1,m}$.

Нехай $\bigcup\limits_{l=1}^{l_1} U_l$ – покриття S обмеженими множинами із $\mathbb{R}^n$, $V_l = U_l \cap S$, $l = \overline{1, l_1}$. В кожному околі U_l введемо розпрямляючу локальну систему координат $\xi^{(l)} = (\xi'^{(l)}, \xi_n^{(l)}) = (\xi_1^{(l)}, ..., \xi_{n-1}^{(l)}, \xi_n^{(l)})$ з початком у деякій точці S та віссю ξ_n у напрямі внутрішньої нормалі до S у цій точці.

Лема 1. *Для довільних основних функцій $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{2m-1}$ з носіями в координатному околі $V \subset S$ і для довільного натурального числа s існують основні функції $\varphi_{2m}, \dots, \varphi_{2m+s-1}$ з носіями у V такі, що $A\left(\sum\limits_{i=0}^{2m+s-1} \xi_n^i \varphi_i(\xi')\right) = \xi_n^s \varphi(\xi', \xi_n)$, де $\varphi(\xi', \xi_n)$ – нескінченно диференційовна і обмежена функція у крайовому координатному околі U, що відповідає координатному околу V (див. [4, с. 13]).*

Доведення. Перерахуємо у локальній розпрямляючій системі координат оператор

$$A(x, D_x) : D_{x_l} = \sum_{j=1}^{n-1} r_{lj}(\xi', \xi_n) D_{\xi_j} + r_l(\xi', \xi_n) D_{\xi_n},$$

$$D_x^\beta = r_1^{\beta_1}(\xi) \cdot \dots \cdot r_n^{\beta_n} D_{\xi_n}^\beta + Q_\beta(\xi, D_\xi), r_l,\ r_{lj} \in C^\infty(U_l),$$

$$Q_\beta(\xi, D_\xi) = Q_{\beta,1}(\xi, D_{\xi'}) D_{\xi_n}^{\beta-1} + \dots + Q_{\beta,|\beta|}(\xi, D_{\xi'}),$$

де другий індекс вказує на найбільший порядок похідних за змінними $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ оператора. Тепер

$$\begin{aligned} A(x, D_x) = &\sum_{|\beta|=2m} a_\beta(x) \left[r_1^{\beta_1}(\xi) \cdot \dots \cdot r_n^{\beta_n}(\xi) D_{\xi_n}^{2m} + Q_\beta(\xi, D_\xi)\right] + \\ &+ \sum_{|\beta| \le 2m-1} a_\beta(x) \left[r_1^{\beta_1}(\xi) \cdot \dots \cdot r_n^{\beta_n}(\xi) D_{\xi_n}^{\beta} + Q_\beta(\xi, D_\xi)\right] = \\ &= \tilde{Q}_0(\xi) D_{\xi_n}^{2m} + \sum_{t=1}^{2m} \tilde{Q}_t(\xi, D_{\xi'}) D_{\xi_n}^{2m-t}, \end{aligned}$$

де $\tilde{Q}_0(\xi) = \sum\limits_{|\beta|=2m} a_\beta(x) r_1^{\beta_1}(\xi) \cdot \dots \cdot r_n^{\beta_n}(\xi), \quad x = x(\xi), \quad \tilde{Q}_0(\xi) \neq 0$ за еліптичністю оператора, $\tilde{Q}_t(\xi, D_{\xi'})$ $(t = \overline{1, 2m})$ – дотичні диференціальні оператори з похідними за змінними $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ до порядку t. Тоді

$$
\begin{aligned}
&A(x,D_x)\left[\sum_{i=0}^{2m+s-1}\xi_n^i\varphi_i(\xi')\right]=\\
&=\tilde{Q}_0(\xi)\sum_{i=2m}^{2m+s-1}i(i-1)\dots(i-2m+1)\xi_n^{i-2m}\varphi_i(\xi')+\\
&+\sum_{t=1}^{2m}\tilde{Q}_t(\xi,D_{\xi'})\times\\
&\times\left(\sum_{i=2m-t}^{2m+s-1}i(i-1)\dots(i-2m+t+1)\xi_n^{i-2m+t}\varphi_i(\xi')\right)=\\
&=\sum_{j=0}^{s-1}\xi_n^j\Big[\tilde{Q}_0(\xi)(j+2m)\dots(j+1)\varphi_{j+2m}(\xi')+\\
&+\sum_{t=1}^{2m}\tilde{Q}_t(j+2m-t)\dots(j+1)\varphi_{j+2m-t}(\xi')\Big].
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Оскільки $\tilde{Q}_0(\xi)=Q_0(\xi')+\xi_nQ_0^{(1)}(\xi')+\xi_n^2Q_0^{(2)}(\xi')+\dots+\xi_n^s\tilde{R}_0(\xi',\xi_n)$, $\tilde{Q}_t(\xi,D_{\xi'})=Q_t^{(0)}(\xi',D_{\xi'})+\xi_nQ_t^{(1)}(\xi',D_{\xi'})+\dots+\xi_n^s\tilde{R}_t(\xi',\xi_n,D_{\xi'})$, $\tilde{R}_0\in C^\infty(U)$ і обмежена, $\tilde{R}_t$–дотичні диференціальні оператори порядку менше або рівне t з нескінченно диференційовними коефіцієнтами в U, то збираючи коефіцієнти біля $\xi_n^0,\xi_n^1,\dots,\xi_n^{r-1}$ у тотожності (2) і прирівнюючи їх до нуля отримуємо

$$
\begin{aligned}
&(2m)!Q_0(\xi')\varphi_{2m}(\xi')+\sum_{t=1}^{2m}(2m-t)!Q_t^{(0)}(\xi',D_{\xi'})\varphi_{2m-t}(\xi')=0,\\
&(2m+1)!Q_0(\xi')\varphi_{2m+1}(\xi')+\\
&\qquad+\sum_{t=1}^{2m}(2m-t+1)!Q_t^{(0)}(\xi',D_{\xi'})\varphi_{2m-t+1}(\xi')+\\
&\qquad+(2m+2)!Q_0^{(1)}(\xi')\varphi_{2m}(\xi')+\\
&\qquad\qquad+\sum_{t=1}^{2m}(2m+2-t)!Q_t^{(1)}(\xi',D_{\xi'})\varphi_{2m-t}(\xi')=0,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$(2m+s-1)!Q_0(\xi')\varphi_{2m+s-1}(\xi')+$$

$$+\sum_{t=1}^{2m}(2m-t+s-1)!Q_t^{(0)}(\xi',D_{\xi'})\varphi_{2m-t+s-1}(\xi')+\cdots=0.$$

Звідси знаходимо $\varphi_{2m},\ldots,\varphi_{2m+s-1}$. Інші доданки у виразі (2) дають $\xi_n^s\varphi(\xi',\xi_n)$, де

- $$\varphi(\xi',\xi_n)=(2m)!\varphi_{2m}(\xi')\tilde{R}_0(\xi',\xi_n)+\sum_{t=1}^{2m}(2m-t)!\tilde{R}_t(\xi',\xi_n,D_{\xi'})\times$$
$$\times\varphi_{2m-t}(\xi')+(2m+1)!Q_0^{(s-1)}(\xi')\varphi_{2m+1}(\xi')+$$
$$+\sum_{t=1}^{2m}(2m+1-t)!Q_t^{(s-1)}(\xi',\xi_n,D_{\xi'})\varphi_{2m+1-t}(\xi')+$$
$$+\cdots+\tfrac{(2m+s-1)!}{(s-1)!}Q_0^{(1)}(\xi')\varphi_{2m+s-1}(\xi')+$$
$$+\sum_{t=1}^{2m}\tfrac{(2m+s-1-t)!}{(s-1)!}Q_t^{(1)}(\xi',\xi_n,D_{\xi'})\varphi_{2m+s-1-t}(\xi'),$$

- $\varphi(\xi',\xi_n)$ – обмежена в U, існує $\lim\limits_{\xi_n\to 0}\varphi(\xi',\xi_n)$, а оскільки φ_{2m+j} та $Q_t^{(s-j)}$ φ_{2m+j-t} є лінійними виразами від φ_k $(k=\overline{0,2m-1})$ та їх похідних до порядків $2m+j-k$, $j=\overline{0,s-1}$, то

$$|\varphi(\xi',\xi_n)|\leq C\sum_{k=0}^{2m-1}\Big[\sum_{|l|\leq 2m+s-k}\sup_{\xi'\in V}|D_{\xi'}^l\varphi_k(\xi')|\Big]. \quad \square \tag{4}$$

Лема 2. *Для довільних $\varphi_j\in D(S)$ та системи Діріхле $\{\tilde{B}_j(x,D_x)\}$, $j=\overline{0,2m-1}$ на S, довільного натурального s існує така функція $\psi\in C^\infty(\overline{\Omega})$, що $\tilde{B}_j\psi\,|_S=\varphi_j$, $j=\overline{0,2m-1}$ і $A^*\psi(x)=O(d^s(x))$ при $d(x)=dist(x,S)\to 0$ (див. [4, с. 16]).*

Доведення. Як при доведенні леми 1, записуємо

$$\tilde{B}_j(x,D_x)=\sum_{|\alpha|\le j} b_{\alpha j}(x)r_1^{\alpha_1}\dots r_n^{\alpha_n}D_{\xi_n}^{\alpha}+\sum_{t=1}^{|\alpha|}Q_{\alpha,t}(\xi',D_{\xi'})D_{\xi_n}^{\alpha-t}=$$

$$=\hat{Q}_j(\xi')D_{\xi_n}^{j}+\sum_{t=1}^{j}\hat{Q}_{j,t}(\xi',D_{\xi'})D_{\xi_n}^{j-t},$$

де $\hat{Q}_j(\xi')=\sum\limits_{|\alpha|=j-1} b_{\alpha j}r_1^{\alpha_1}\dots r_n^{\alpha_n}\neq 0$ для довільних $x\in S$ (за нормальністю системи $\{\tilde{B}_j\}_{j=0}^{2m-1}$). Застосуємо оператори $\tilde{B}_j$ до функції Φ, яка у кожному крайовому координатному околі U_l у розпрямляючій локальній системі координат має вигляд $\Phi^{(l)}=\sum\limits_{i=0}^{2m+s-j}\xi_n^i\tilde{\varphi}_i^{(l)}(\xi')$, де $\tilde{\varphi}_i^{(l)}(\xi')$ – поки-що невідомі нескінченно диференційовні в V_l функції. Одержуємо

$$\tilde{B}_0\Phi\mid_{S\cap V_l}=\tilde{B}_0\Phi^{(l)}\mid_{\xi_n=0}=b_0(\xi')\tilde{\varphi}_0^{(l)}(\xi')=\varphi_0^{(l)}(\xi'),$$

$$\tilde{B}_j\Phi\mid_{S\cap V_l}\equiv\tilde{B}_j\Phi^{(l)}\mid_{\xi_n=0}\equiv$$

$$\sum_{i=0}^{2m+s-1}\Big[i(i-1)\dots(i-j+2)\hat{Q}_j(\xi')\tilde{\varphi}_i^{(l)}(\xi')\xi_n^{i-j+1}+$$
$$+\sum_{t=1}^{j-1}i(i-1)\dots(i-j+2-t)\hat{Q}_{j,t}(\xi',D_{\xi'})\tilde{\varphi}_i^{(l)}(\xi')\xi_n^{i-j+t+1}\Big]\mid_{\xi_n=0}\equiv$$

$$\equiv(j-1)!\hat{Q}_j^{(0)}(\xi')\tilde{\varphi}_{j-1}^{(l)}(\xi')+$$

$$+\sum_{t=1}^{j-1}(j-1-t)!\hat{Q}_{j,t}^{(0)}(\xi',D_{\xi'})\tilde{\varphi}_{j-1-t}^{(l)}(\xi')=\varphi_j^{(l)}(\xi').$$

Звідси знаходимо

$$\tilde{\varphi}_0^{(l)}(\xi')=\tfrac{\varphi_0^{(l)}(\xi')}{b_0(\xi')},\quad (j-1)!\tilde{\varphi}_{j-1}^{(l)}(\xi')=$$

$$=(\hat{Q}_j^{(0)}(\xi'))^{-1}\left[\varphi_{j-1}^{(l)}(\xi')-\sum_{t=1}^{j-1}(j-1-t)!\hat{Q}_{j,t}^{(0)}(\xi',D_{\xi'})\tilde{\varphi}_{j-1-t}^{(l)}(\xi')\right],$$

$$j=\overline{1,2m-1}.$$

Вибираючи потім $\tilde{\varphi}_{2m}$, $\tilde{\varphi}_{2m+1}$,..., $\tilde{\varphi}_{2m+s-1}$ за лемою 1, замінивши оператор A оператором A^*, добиваємось того, що $A^*\Phi^{(l)} = O(\xi_n^s)$ при $\xi_n \to 0$.

Використовуючи розклад одиниці, підпорядкований покриттю поверхні S системою координатних околів $\{V_l\}_{l=1}^{l_1}$, знаходимо шукану функцію ψ, $\psi = \Phi^{(l)}(\xi', \xi_n)$ у U_l. $\square$

Лема 2 узагальнює відому лему із [5].

1.2. Узагальнені крайові значення регулярних розв'язків.

Через $D'(S)$ позначатимемо простір лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) на $D(S)$, через $< \varphi, F >$ – значення узагальненої функції $F \in D'(S)$ на основній функції $\varphi \in D(S)$, запис $s(F) \leq k'$ означає, що порядок сингулярності узагальненої функції $F \in D'(S)$ не більший, ніж k', тобто при $k' \geq 0$

$$< \varphi, F >= \sum_{|\alpha| \leq k'} \int_S D^\alpha \varphi f_\alpha dS \quad \forall \varphi \in D(S), \quad f_\alpha \in L^1(S) \quad \text{(див. [6])}.$$

Означення 1 *[7, 8, 9, 4]*. *Кажемо, що регулярна всередині області Ω функція u набуває на S узагальнених крайових значень $F \in D'(S)$, якщо існує*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) u(x_\varepsilon)\, dS =< \varphi, F > \quad \forall \varphi \in D(S).$$

Ця границя не залежить від того, як визначено продовження $\varphi \in D(S)$ до функції з $D(S_\varepsilon)$. Справді, переходячи до інтегрування за S, одержуємо
$\int\limits_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) u(x_\varepsilon)\, dS = \int\limits_S \varphi(x+\varepsilon\nu(x)) u(x+\varepsilon\nu(x)) W_\varepsilon(x)\, dS$. За лемою [6, с. 70] з існування границі цього виразу випливає, що існує також

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_S (\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(x + \varepsilon\nu(x))) \cdot u(x + \varepsilon\nu(x)) \cdot W_\varepsilon(x)\, dS =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_S \varphi(x) \cdot u(x + \varepsilon\nu(x))\, dS = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x) \cdot u(x_\varepsilon)\, dS.$$

Через $\varrho_1(x)$ $(x \in \overline{\Omega})$ позначаємо нескінченно диференційовну невід'ємну функцію, яка додатна в Ω, має порядок $d(x)$ при $d(x) \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$; $\varrho_1(x) \leq 1$, $x \in \overline{\Omega}$ та $\varrho_1(x) = 1$ при $d(x) \geq \varepsilon_0$.

При $k > 0$ визначаємо (непорожний за лемою 2) функційний простір [4] $X_k(\overline{\Omega}) = \{\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}) : (A^*\varphi)(x) = O(d^k(x))$ при $d(x) \to 0$, $\widehat{B}_j\varphi = 0, j = \overline{1,m}\}$, а також $\widetilde{\mathcal{M}}_k(\Omega) = \widetilde{\mathcal{M}}_{k,0}(\Omega)$, де $\widetilde{\mathcal{M}}_{k,r}(\Omega) = \{\mathrm{v} \in W^r_{1,loc}(\Omega) : ||\mathrm{v}||_{k,r} = \sum\limits_{|\gamma|\leq r} \int\limits_\Omega [\varrho_1(x)]^{k+|\gamma|} |D^\gamma \mathrm{v}(x)|\, dx < +\infty\}$, $k \in \mathbb{R}$.

Зауважимо, що $\widetilde{\mathcal{M}}_k(\Omega)$ є простором регулярних узагальнених функцій на просторі $C^\infty(\overline{\Omega})$ (див.[6]).

Нехай $r \in \mathbb{N}$, $r \leq 2m-1$, а $M(r)$ – кількість мультиіндексів α таких, що $|\alpha| \leq r$. Позначимо через $\partial_r u = (u, u_{x_1}, ..., D^\alpha u, ...)$, $|\alpha| \leq r$ $M(r)$-вимірний вектор, компонентами якого є функція u та її похідні за просторовими змінними до порядку r. Під $\mathbb{M}_{M(r)}$ розумітимемо простір векторів розмірності $M(r)$.

Вважаємо функцію $f(x,z)$ визначеною та неперервною в $\Omega \times \mathbb{M}_{M(r)}$.

Теорема 1. *Нехай s – довільне ціле невід'ємне число, u – узагальнений розв'язок класу $C^{2m-1}(\Omega) \cap \widetilde{\mathcal{M}}_s(\Omega)$ рівняння*

$$A(x,D)u(x) = f(x, \partial_r u(x)), \quad x \in \Omega. \tag{5}$$

Умова

$$\int\limits_\Omega |f(x, \partial_r u(x))|\, dx < +\infty. \tag{6}$$

виконується тоді і тільки тоді, коли для довільних крайових диференціальних виразів $\widetilde{B}_j(x,D)$ порядків $j = \overline{0, 2m-1}$ з нескінченно диференційовними коефіцієнтами, які утворюють систему Діріхле, функції $\widetilde{B}_j u$ набувають на S узагальнених крайових значень $\widetilde{F}_j \in D'(S)$ порядків сингулярностей $s(\widetilde{F}_j) \leq s + j + 1$, $j = \overline{0, 2m-1}$ відповідно.

Доведення. Нехай $\tilde{S}$ – така замкнена нескіченно диференційовна поверхня всередині Ω, що $\tilde{S} \subset \bigcup\limits_{l=1}^{l_1} U_l$ $\quad (dist(\tilde{S}, S) > \varepsilon)$, Ω^*_ε– підобласть Ω, розміщена між S_ε та $\tilde{S}$,
$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. У розпрямляючих локальних координатах $\xi = (\xi', \xi_n)$

точки $x \in S \cap U_l$, $l = \overline{1, l_1}$ мають координати $(\xi', 0)$, а відповідні їм точки $x_\varepsilon \in S_\varepsilon$– координати (ξ', ε), $\Phi_\varepsilon(\xi) = \sum\limits_{i=0}^{2m+s-1} (\xi_n - \varepsilon)^i \varphi_i(\xi', \varepsilon)$, де $\varphi_i(\xi', 0)$ -довільні функції із $D(U_l \cap S)$, $i = \overline{0, 2m-1}$, а $\varphi_{2m+j} \in D(U_l \cap S)$, $j = \overline{0, s}$ і такі, що $A^*\Phi_\varepsilon(\xi) = (\xi_n - \varepsilon)^s \varphi_\varepsilon(\xi', \xi_n)$, де φ_ε – раціональна за ξ_n та ε і обмежена в Ω^*_ε функція. З леми 1 випливає існування цих функцій, існує $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon(\xi', \xi_n) = \varphi(\xi', \xi_n)$, φ обмежена в області Ω^* (між $\tilde{S}$ та S) та має оцінку (4).

Із формули Гріна в Ω^*_ε для функцій u та Φ_ε

$$\int\limits_{\Omega^*_\varepsilon} u \cdot A^*\Phi_\varepsilon \, dx - \int\limits_{\Omega^*_\varepsilon} \Phi_\varepsilon \cdot f \, dx = \sum_{j=1}^{2m} \int\limits_{S_\varepsilon} \widetilde{B}_j u \cdot \widetilde{T}_j \Phi_\varepsilon \, dS, \tag{7}$$

де $\widetilde{T}_j = \sum\limits_{t=0}^{2m-1-j} \widetilde{T}_{jt}(\xi', \frac{\partial}{\partial \xi'})(\frac{\partial}{\partial \xi_n})^{2m-1-j-t}$, $j = \overline{0, 2m-1}$, $\xi' \in V_l$, $\widetilde{T}_{jt}$ – дотичні диференціальні оператори порядків $\le t$, $\widetilde{T}_{j0} = \tilde{T}_{j0}(\xi') \ne 0$, $j = \overline{0, 2m-1}$, так що (7) набуває вигляду

$$\int\limits_{\Omega^*_\varepsilon} u \cdot (\xi_n - \varepsilon)^s \cdot \varphi_\varepsilon(\xi', \xi_n) \, d\xi - \int\limits_{\Omega^*_\varepsilon} \sum_{i=0}^{2m+s-1} (\xi_n - \varepsilon)^i \cdot \varphi_i(\xi', \varepsilon) \cdot f(x, \partial_r u(x)) \, d\xi =$$

$$= \int\limits_{S_\varepsilon} \sum_{j=0}^{2m-1} \widetilde{B}_j u \cdot \left\{ \sum_{t=0}^{2m-1-j} \widetilde{T}_{j\,t} \varphi_{2m-1-t-j} \cdot (2m-1-t-j)! \right\} dS. \tag{8}$$

За умовою $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_s(\Omega)$ та обмеженістю φ в Ω^* послідовність функціоналів
$\int\limits_{\Omega^*_\varepsilon} u \cdot \xi_n^s \cdot \varphi(\xi', \xi_n) \, d\xi$ обмежена й існує $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega^*_\varepsilon} u \cdot \xi_n^s \cdot \varphi(\xi', \xi_n) \, d\xi = \int\limits_{\Omega^*} u \cdot \xi_n^s \cdot \varphi(\xi', \xi_n) \, d\xi$. Тоді за лемою [6, с.70] існує

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega^*_\varepsilon} u \cdot (\xi_n - \varepsilon)^s \cdot \varphi_\varepsilon(\xi', \xi_n) \, d\xi =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega^*_\varepsilon} u \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} ((\xi_n - \varepsilon)^s \cdot \varphi_\varepsilon(\xi', \xi_n)) \, d\xi =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega^*_\varepsilon} u \cdot \xi_n^s \cdot \varphi(\xi', \xi_n) \, d\xi = \int\limits_{\Omega^*} u \cdot \xi_n^s \cdot \varphi(\xi', \xi_n) \, d\xi.$$

Оскільки $\sum\limits_{i=0}^{2m+s-1} \xi_n^i \cdot \varphi_i(\xi')$ обмежена в Ω^*, то із (8) випливає, що (6) виконується тоді і лише тоді, коли існує границя правої частини (8). Так що достатність доведена. Припускаючи виконання (6), матимемо існування границі правої частини (8).

Нехай $\varphi_0 \equiv \varphi_1 \equiv \ldots \equiv \varphi_{2m-2} \equiv 0$. Введемо лінійний функціонал $\widetilde{F}_0$:
$< \varphi, \widetilde{F}_0 >= \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \widetilde{B}_0 u \cdot \varphi \, dS$, $\varphi \in D(S)$. Із (8)

$$\begin{gathered}\widetilde{T}_{00}(2m-1)! < \varphi_{2m-1}, \widetilde{F}_0 >= \int\limits_{\Omega^*} \xi_n^s \cdot u \cdot \varphi \, d\xi - \\ \int\limits_{\Omega^*} [\xi_n^{2m-1} \cdot \varphi_{2m-1}(\xi') + \xi_n^{2m} \cdot \varphi_{2m}(\xi') + \cdots + \\ + \xi_n^{2m+s-1} \cdot \varphi_{2m+s-1}(\xi')] \cdot f(x, \partial_r u(x)) \, d\xi.\end{gathered} \tag{9}$$

Із формули (4) $|\varphi(\xi', \xi_n)| \leq \tilde{C}_{2m-1} \cdot \sum\limits_{|\gamma|\leq s+1} \sup\limits_{\xi'\subset S} |(\frac{\partial}{\partial \xi'})^\gamma \varphi_{2m-1}(\xi')|$, тому

$$\int\limits_{\Omega^*} \xi_n^s \cdot |u \cdot \varphi(\xi', \xi_n)| \, d\xi \leq \tilde{C}'_{2m-1} \cdot \sum_{|\gamma|\leq s+1} \sup_{\xi'\subset S} |(\tfrac{\partial}{\partial \xi'})^\gamma \varphi_{2m-1}(\xi')|,$$

де

$$\tilde{C}'_{2m-1} = \tilde{C}_{2m-1} \int\limits_{\Omega^*} \xi_n^s \cdot |u| \, d\xi;$$

$$|\xi_n^{2m-1} \cdot \varphi_{2m-1}(\xi') + \cdots + \xi_n^{2m+s-1} \cdot \varphi_{2m+s-1}(\xi')| \leq$$

$$\leq \tilde{C}' \cdot \sum_{|\gamma|\leq s} \sup_{\xi'\subset S} |(\tfrac{\partial}{\partial \xi'})^\gamma \varphi_{2m-1}(\xi')|.$$

Враховуючи умову (6), із (9) одержуємо

$$| < \varphi, \widetilde{F}_0 > | \leq C'_1 \sum_{|\gamma|\leq s+1} \sup_{\xi'\subset S} |(\frac{\partial}{\partial \xi'})^\gamma \varphi(\xi')| \quad \forall \varphi \in D(S),$$

де $C'_1 = C'_1(||u||_s)$.

Отже, функціонал $\widetilde{F}_0$ лінійний, неперервний на $D(S)$ і має порядок сингулярності $s(\widetilde{F}_0) \leq s+1$.

Вважаючи далі по черзі відмінними від нуля тільки по одній із функцій $\varphi_{2m-2}, \ldots, \varphi_1, \varphi_0$, з (8) так само одержуємо існування

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi \cdot \widetilde{B}_j u \, dS =< \varphi, \widetilde{F}_j >, \quad \varphi \in D(S), \quad j = \overline{0, 2m-2}.$$

Справді, $\widetilde{F}_0 \in D'(S)$, а припустивши існування $\widetilde{F}_j \in D'(S)$ із $s(\widetilde{F}_j) \le s+j+1$ при $j=\overline{0,l-1}$, де $l=\overline{1,2m-1}$, вважаючи $\varphi_{2m-1-j}=0$ для всіх $j\ne l$, у правій частині (8) матимемо відмінними від нуля тільки доданки при $t+j=l$, а тоді з (8) одержуємо існування

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon}\widetilde{B}_l u\cdot\widetilde{T}_{l0}\varphi_{2m-l-1}\,dS = -\sum_{i=0}^{l-1} < \widetilde{T}_{i\;l-i}\varphi_{2m-l-1},\widetilde{F}_i > +$$
$$+\tfrac{1}{(2m-l-1)!}\Big\{\int\limits_{\Omega^*}\xi_n^s\cdot u\cdot\varphi(\xi',\xi_n)\,d\xi - \int\limits_{\Omega^*}[\xi_n^{2m-l-1}\cdot\varphi_{2m-l-1}(\xi')+$$
$$+\cdots+\xi_n^{2m+s-1}\cdot\varphi_{2m+s-1}(\xi')]\cdot f(x,D_r u(x))\,d\xi\Big\},$$

де $\widetilde{T}_{i\;l-i}$–дотичні диференціальні оператори порядків $l-i$. Оскільки

$$|<\widetilde{T}_{i\;l-i}\varphi_{2m-l-1},\widetilde{F}_i>|\le C_i'\sum_{|\gamma|\le s+i+1}\sup_{\xi'}|(\tfrac{\partial}{\partial\xi'})^\gamma\widetilde{T}_{i\;l-i}\varphi_{2m-l-1}(\xi')|\le$$

$$\le\tilde{C}_i'\sum_{|\gamma|\le s+l+1}\sup_{\xi'}|(\tfrac{\partial}{\partial\xi'})^\gamma\varphi_{2m-l-1}(\xi')|\quad i=\overline{0,l-1},$$

$$|\int\limits_{\Omega^*}\xi_n^s\cdot u\cdot\varphi\,d\xi|\le\tilde{C}'_{2m-l-1}\sum_{|\gamma|\le s+l+1}\sup_{\xi'}|(\tfrac{\partial}{\partial\xi'})^\gamma\varphi_{2m-l-1}(\xi')|,$$

$$|\xi_n^{2m-l-1}\cdot\varphi_{2m-l-1}(\xi')+\cdots+\xi_n^{2m+s-1}\cdot\varphi_{2m+s-1}(\xi')|\le$$
$$\le\tilde{C}''_{2m-l-1}\sum_{|\gamma|\le s+l}\sup_{\xi'}|(\tfrac{\partial}{\partial\xi'})^\gamma\varphi_{2m-l-1}(\xi')|,$$

то

$$|\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon}\widetilde{B}_l u\cdot\widetilde{T}_{l\,0}\varphi_{2m-l-1}\,dS| = |<\widetilde{T}_{l0}\varphi_{2m-l-1},\widetilde{F}_l>|\le$$
$$\le C_l'\sum_{|\gamma|\le s+l+1}\sup_{\xi'}|(\tfrac{\partial}{\partial\xi'})^\gamma\varphi_{2m-l-1}(\xi')|,$$

а оскільки $\widetilde{T}_{l0}\ne 0$, то лінійний функціонал $\widetilde{F}_l$ є неперервним на $D(S)$ і має порядок сингулярності $s(\widetilde{F}_l)\le s+l+1$.

Зокрема, існують $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon}\varphi\cdot B_j u dS = <\varphi, F_j>$, $\varphi\in D(S)$, узагальнені функції F_j мають порядки сингулярностей $s(F_j)\le s+m_j+1$, $j=\overline{1,m}$. □

Зауваження. *Використовуючи подібні міркування та формулу (8), показуємо таке: якщо для узагальненого розв'язку* $u \in C^{2m-1}(\Omega)$ *рівняння (5) виконується умова (6) та* $(\frac{\partial}{\partial\nu})^t u$ *для всіх* $t = \overline{0, 2m-1}$ *набувають узагальнених крайових значень із* $D'(S)$ *порядків сингулярностей* $\leq s+t+1$, *то* $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_{s,\,2m-1}(\Omega)$.

1.3. Формулювання узагальненої крайової задачі.

Нехай $F_j \in D'(S)$, $s(F_j) \leq s_j$, $j = \overline{1,m}$, $s > s_0 \stackrel{def}{=} \max\limits_{1\leq j\leq m}\{s_j - m_j - 1\}$.

Розглядаємо узагальнену нормальну еліптичну крайову задачу

$$A(x,D)u(x) = f(x, \partial_r u(x)), x \in \Omega, \quad B_j(x,D)u\,|_S = F_j, \quad j = \overline{1,m} \tag{10}$$

за умови, що відповідна їй лінійна однорідна крайова задача однозначно розв'язна.

Формулювання 1 задачі. *Знайти функцію* $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_{s,\,r}(\Omega) \cap C^{2m-1}(\Omega)$, *яка є узагальненим розв'язком рівняння (5) в* Ω *та задовольняє крайові умови*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon} \varphi B_j u\, dS = <\varphi, F_j> \quad \forall\varphi \in D(S), \quad j = \overline{1,m}. \tag{11}$$

Формулювання 2 задачі. *Знайти функцію* $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_{s,\,r}(\Omega)$ *таку, що*

$$\int\limits_{\Omega} A^*\psi u\, dx = \int\limits_{\Omega} \psi f dx + \sum_{j=1}^{m} <\widehat{T}_j\psi, F_j> \quad \forall\psi \in X_s(\overline{\Omega}). \tag{12}$$

Теорема 2. *Функція* $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_{s,\,r}(\Omega) \cap C^{2m-1}(\Omega)$, *для якої виконується (6), є розв'язком задачі (10) у формулюванні 1 тоді й тільки тоді, коли вона є розв'язком цієї задачі у формулюванні 2.*

Доведення. Нехай u є розв'язком задачі (10) у формулюванні 1. За теоремою 1 також існують $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon} \varphi{\cdot}T_j u\, dS$ для довільної $\varphi \in D(S)$,

$j = \overline{1,m}$. Тоді за лемою [6, с. 70] існують границі $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon} \widehat{B}_j\psi \cdot T_j u\, dS = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon} (\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \widehat{B}_j\psi)\cdot T_j u\, dS = 0$ для всіх $\psi \in X_s(\overline{\Omega})$, $j = \overline{1,m}$.

Запишемо формулу Гріна в Ω_ε для u та $\psi \in X_s(\overline{\Omega})$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} A^*\psi \cdot u\, dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \psi(x)\cdot f(x, \partial_r u(x))\, dx + \\ + = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{S_\varepsilon} \Big(B_j u \cdot \widehat{T}_j\psi - T_j u \cdot \widehat{B}_j\psi \Big)\, dS.\end{aligned} \tag{13}$$

Переходячи в (13) до границі при $\varepsilon \to 0$, використовуючи використовуючи існування узагальнених крайових значень $T_j u$, $j = \overline{1,m}$ та лему [6, с. 70], одержуємо

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} A^*\psi \cdot u\, dx = \int\limits_{\Omega} \psi(x)\cdot f(x, \partial_r u(x))\, dx + \\ + \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{S_\varepsilon} (B_j u)(x_\varepsilon)\cdot (\lim_{\varepsilon\to 0}\widehat{T}_j\psi(x_\varepsilon))\, dS \quad \forall\psi \in X_s(\overline{\Omega}).\end{aligned} \tag{14}$$

Згідно з умовами (11) рівність (14) набуває вигляду (12).

Нехай тепер u є розв'язком задачі (10) у формулюванні 2. Із (12) при $supp\,\psi \subset \Omega_\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) матимемо $\int\limits_{\Omega} A^*\psi\cdot u\, dx = \int\limits_{\Omega} \psi(x)\cdot f(x, \partial_r u(x))\, dx$, тобто функція u – узагальнений розв'язок рівняння (5). Тоді за теоремою 1 $B_j u$ та $T_j u$ набувають на S деяких узагальнених крайових значень із $D'(S)$. Залишається показати, що $B_j u$ набувають на S заданих узагальнених крайових значень F_j, $j = \overline{1,m}$.

Оскільки існує границя при $\varepsilon \to 0$ кожного з доданків у (13), то маємо (14). Віднімаючи (14) від (12), одержуємо $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sum\limits_{j=1}^{m}\int\limits_{S_\varepsilon} (B_j u)\cdot (\widehat{T}_j\psi)\, dS_\varepsilon = \sum\limits_{j=1}^{m} < \widehat{T}_j\psi, F_j >$ при $\psi \in X_s(\overline{\Omega})$.

Згідно з лемою 2, для довільних $\varphi_j \in D(S)$, $j = \overline{1,m}$ існує така $\psi \in X_s(\overline{\Omega})$, що $\widehat{T}_j\psi = \varphi_j$, $j = \overline{1,m}$, тому із останньої рівності одержуємо (11). ■

У [4, 10] встановлено достатні умови розв'язності задачі (10).

2. Узагальнені крайові та початкові значення розв'язків півлінійних параболічних рівнянь.

2.1. Основні позначення. Функційні простори.

Нехай $Q = \Omega \times (0,T]$, $\Sigma = S \times (0,T]$, $0 < T < +\infty$, $A(x,t,D_x) = \sum\limits_{|\alpha|\le 2m} a_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}$, $a_{\alpha}(x,t) \in C^{\infty}(\overline{Q})$;
$L(x,t,D_x,\frac{\partial}{\partial t}) \equiv (\frac{\partial}{\partial t} - A(x,t,D_x))$ – параболічний диференціальний оператор;
$B_j(x,t,D_x) = \sum\limits_{|\alpha|\le m_j} b_{j\,\alpha}(x,t)D^{\alpha}$, $b_{j\,\alpha} \in C^{\infty}(\overline{\Sigma})$ $(j = \overline{1,m},\ |\alpha| \le m_j)$ – система крайових диференціальних виразів. Припускаємо, що $\{B_j\}_{j=1}^m$ є нормальною на Σ ([11, с. 178]) і задовольняє умову Лопатинського ([11, с. 15]).

Згідно з [11, с. 178], [12] існують крайові диференціальні вирази $\widehat{B}_j$, C_j, $\widehat{C}_j$ типу B_j, $j = \overline{1,m}$ порядків відповідно $2m-1-\widehat{m_j}$, $\widehat{m_j}$, $2m-1-m_j$

$$\int\limits_Q [v(Lu) - (L^*v)u]\,dxdt = \sum_{j=1}^m \int\limits_{\Sigma} [(\widehat{B}_j v)(C_j u) - (\widehat{C}_j v)(B_j u)]\,dSdt +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} v(x,t)u(x,t)|_{t=0}^{t=T}\,dx \quad \text{для довільних } u,v \in C^{\infty}(\overline{Q}), \tag{15}$$

де $L^* = -(\frac{\partial}{\partial t} + A^*)$.

Використовуватимемо такі функційні простори:

$D(\overline{Q}) = C^{\infty}(\overline{Q})$, $D(\overline{\Sigma}) = C^{\infty}(\overline{\Sigma})$, $D(\overline{\Omega}) = C^{\infty}(\overline{\Omega})$;
$D^0(\overline{Q}) = \{\varphi \in D(\overline{Q}) :\ \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi\,|_{t=T} = 0,\ k = 0,1,\dots\}$,
$D^0(\overline{\Sigma}) = \{\varphi \in D(\overline{\Sigma}) :\ \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi\,|_{t=T} = 0,\ k = 0,1,\dots\}$,
$D_0(\overline{\Sigma}) = \{\varphi \in D(\overline{\Sigma}) :\ \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi\,|_{t=0} = 0,\ k = 0,1,\dots\}$,
$D_0^0(\overline{\Sigma}) = D_0(\overline{\Sigma}) \cap D^0(\overline{\Sigma})$,
$D_0(\overline{\Omega}) = \{\varphi \in D(\overline{\Omega}) : \widehat{B_j}\varphi\,|_S = 0,\ j = \overline{1,m}\}$.

Позначатимемо через $(D_0^0(\overline{\Sigma}))'$, $(D_0(\overline{\Omega}))'$ – простори лінійних неперервних функціоналів відповідно на просторах функцій $D_0^0(\overline{\Sigma})$, $D_0(\overline{\Omega})$, через $(\varphi, F)_1$ – значення узагальненої функції $F \in (D_0^0(\overline{\Sigma}))'$ на основній функції $\varphi \in (D_0^0(\overline{\Sigma}))$, через $(\varphi, F)_2$ – значення $F \in (D_0(\overline{\Omega}))'$ на $\varphi \in D_0(\overline{\Omega})$, а під $s(F)$ розумітимемо порядкок сингулярності узагальненої функції F ([6, с. 123]).

Зауважимо, що при $F \in (D(\overline{\Sigma}))'$, $s(F) \le q_1$ та $q_1 \ge 0$

$$(\varphi, F)_1 = \sum_{|\alpha|+2m\alpha_0 \le q_1} \int_{\Sigma} \frac{\partial^{\alpha_0}}{\partial t^{\alpha_0}} D_x^{\alpha} \varphi(x,t) f_{\alpha}(x,t)\, dSdt,$$
$$\forall \varphi \in D(\overline{\Sigma}),\ f_{\alpha} \in L^1(\overline{\Sigma}),$$

а при $F \in (D(\overline{\Omega}))'$, $s(F) \le q_2$ та $q_2 \ge 0$

$$(\varphi, F)_2 = \sum_{|\alpha| \le q_2} \int_{\Omega} D^{\alpha} \varphi(x) f_{\alpha}(x)\, dx$$

для довільних $\varphi \in D(\overline{\Omega})$, $f_{\alpha} \in L^1(\overline{\Omega})$.

Нехай $\varrho_2(t)$ ($t \in (0,T]$) – нескінченно диференційовна невід'ємна функція, яка має порядок t при $t \to 0$ і, крім того, $0 < \varrho_2(t) \le 1, t \in (0,T]$, $\varrho_2(t) \equiv 1$ при $t \ge \varepsilon_0$ $\varrho(x,t) = \min[\varrho_1(x),\ \sqrt[2m]{\varrho_2(t)}]$, тобто $\varrho(x,t) = \varrho_1(x)$ при $d(x) \to 0$, $\varrho(x,t) = \sqrt[2m]{\varrho_2(t)}$ при $t \to 0$, $\varrho(x,t) = 1$ при $d(x) \ge \varepsilon_0$ та $t \ge \varepsilon_0$.

Введемо функційні простори:

$$X_k(\overline{Q}) = \{\psi \in D^0(\overline{Q}) : \psi(\cdot, 0) \in D_0(\overline{\Omega}),\ \widehat{B_j}\psi \,|_{\overline{\Sigma}} = 0,\ j = \overline{1,m},$$
$$L^* \psi(x,t) = O(\varrho^k(x,t)), \varrho(x,t) \to 0\}$$

(у [4, с. 136-137] доведено, що $X_k(\overline{Q})$ непорожний при $k \ge 0$);

$$\mathcal{M}_{k,r}(Q) = \{\mathrm{v} \in W^r_{1,loc}(Q) :$$

$$||\mathrm{v}||_{k,r} = \sum_{|\gamma| \le r} \int_Q \varrho^{k+|\gamma|}(x,t) |D^{\gamma} \mathrm{v}(x,t)|\, dxdt < +\infty\}, k \in \mathbb{R},$$

$$\mathcal{M}_k(Q) = \mathcal{M}_{k,0}(Q).$$

2.2. Узагальнені крайові та початкові значення регулярних розв'язків.

Нехай $\Sigma_{\varepsilon\varepsilon_1} = S_{\varepsilon} \times (\varepsilon_1, T]$, $(x_{\varepsilon}, t) \in \Sigma_{\varepsilon\varepsilon_1}$, якщо $x_{\varepsilon} = x + \varepsilon \nu(x)$, $t \in (\varepsilon_1, T]$, $(x,t) \in \Sigma$. Для $\varphi \in D(\overline{\Sigma})$ визначаємо $\varphi(x_{\varepsilon}, t) = \varphi(x,t)$, якщо $(x_{\varepsilon}, t) \in \Sigma_{\varepsilon\varepsilon_1}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_1 > 0$.

Означення 2._([4, с. 142]) Кажемо, що регулярна всередині області Q функція u набуває узагальнених початкових значень $F_{m+1} \in (D_0(\overline{\Omega}))'$, якщо існує_

$$\lim_{\varepsilon,\, t\to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \varphi(x) u(x,t)\, dx = (\varphi, F_{m+1})_2 \quad \forall \varphi \in D_0(\overline{\Omega}), \tag{16}$$

а функції $B_j u$, $j = \overline{1,m}$ набувають на Σ узагальнених крайових значень відповідно $F_j \in (D_0^0(\overline{\Sigma}))'$, якщо існує

$$\lim_{\varepsilon,\, \varepsilon_1\to 0} \int\limits_{\Sigma_{\varepsilon\, \varepsilon_1}} \varphi(x_\varepsilon, t) B_j u(x_\varepsilon, t)\, dSdt = (\varphi, F_j)_1$$

$$\forall \varphi \in D_0^0(\overline{\Sigma}), \quad j = \overline{1,m}. \tag{17}$$

Припустимо, що $F_0(x,t,z)$ $(z = (z_{(0,\ldots,0)}, z_{(1,0,\ldots,0)}, \ldots, z_\alpha, \ldots))$ – визначена та неперервна функція в $Q \times \mathbb{M}_{M(r)}$, $r \le 2m-1$.

Теорема 3. _Нехай s – довільне ціле невід'ємне число, u – узагальнений розв'язок класу $C^{2m-1,\,0}(Q) \cap \mathcal{M}_s(Q)$ рівняння_

$$L(x,t,D_x,\frac{\partial}{\partial t})u(x,t) = F_0(x,t,\partial_r u(x,t)),\ \ (x,t) \in Q. \tag{18}$$

Умова

$$\int\limits_{Q} |F_0(x,t,\partial_r u(x,t))|\, dxdt < +\infty \tag{19}$$

виконується тоді і лише тоді, коли для довільних крайових диференціальних виразів $\widetilde{B}_j(x,t,D_x)$, $j = \overline{0,2m-1}$ з нескінченно диференційовними коефіцієнтами, які утворюють систему Діріхле, функції $\widetilde{B}_j u$ набувають на Σ узагальнених крайових значень $\widetilde{f}_j \in (D_0^0(\Sigma))'$ порядків сингулярностей $s(\widetilde{f}_j) \le s+j+1$, $j = \overline{0,2m-1}$, а функція u набуває на Ω узагальнених початкових значень $\widehat{f}_{m+1} \in (D_0(\overline{\Omega}))'$ порядку сингулярності $s(\widehat{f}_{m+1}) \le s+2m$.

Доведення. Нехай, подібно до еліптичного випадку, $\Sigma \subset U = \bigcup\limits_{l=1}^{l_1} U_l$, де U_l – такі обмежені множини з $\mathbb{R}^n$, що $\varrho_1(x) < \sqrt[2m]{\varrho_2(t)}$ при $(x,t) \in U$, так, що $\varrho(x,t) = \varrho_1(x)$ в U.

Нехай $\widetilde{\Sigma}$ – замкнена нескінченно диференційовна поверхня всередині Q і така, що $\widetilde{\Sigma} \subset U$ $(dist(\widetilde{\Sigma}, \Sigma) > \varepsilon)$; $Q^1_{\varepsilon\,\varepsilon_1}$ – підобласть Q, розміщена між $\Sigma_{\varepsilon\,\varepsilon_1}$ та $\widetilde{\Sigma}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_1 > 0$. Нехай функція Φ_ε у кожному крайовому координатному околі U_j у розпрямляючих локальних координатах має вигляд $\Phi^{(j)}_\varepsilon(\xi'^{\,(j)}, \xi^{(j)}_n, t) = \sum\limits_{i=0}^{2m+s-1} (\xi^{(j)}_n - \varepsilon)^i \varphi^{(j)}_i(\xi'^{\,(j)}, t)$, де $\varphi_0, \varphi_1,..., \varphi_{2m-1}$ – довільні із $D^0_0(\overline{\Sigma})$, $i = \overline{0, 2m-1}$.

Як в еліптичному випадку (див. також лему 4.1[4, с. 136] та лему 6 [13, с. 29]) встановлюємо існування для довільного натурального числа s функцій $\varphi_i \in D^0_0(\overline{\Sigma})$, $i = \overline{2m, 2m+s-1}$ та такої нескінченно диференційовної і обмеженої в кожному крайовому координатному околі U_j функції φ, що $L^*\Phi_\varepsilon(\xi', \xi_n, t) = (\xi_n - \varepsilon)^s \varphi(\xi', \xi_n - \varepsilon, t)$, при цьому функції φ_{2m+j}, $j = \overline{0, s-1}$ виражаються через φ_i, $i = \overline{0, 2m-1}$ та їх похідні за змінними ξ_1,..., ξ_{n-1} до порядків $2m + j - i$ відповідно, через похідну за змінною t від φ_j, $j = \overline{0, s-1}$, функція φ обмежена в області Q^1 (між $\widetilde{\Sigma}$ та Σ) і є лінійною комбінацією від φ_0,..., φ_{2m+s-1} та їх похідних:

$$|\varphi(\xi', \xi_n, t)| \le \sum_{j=0}^{2m-1} K_j \sum_{\substack{|\gamma| + 2m\gamma_0 \le \\ \le 2m+s-j}} t \sup_{(\xi', t) \subset \Sigma} |D^\gamma_{\xi'} \frac{\partial^{\gamma_0}}{\partial t^{\gamma_0}} \varphi_j(\xi', t)|,$$
$$\forall \xi = (\xi', \xi_n) \in U_l, \quad (20)$$

де $K_j = const > 0$.

Запишемо формулу Ґріна в області $Q^1_{\varepsilon\,\varepsilon_1}$ для функцій u та Φ_ε. Матимемо

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Q^1_{\varepsilon\,\varepsilon_1}} u \cdot (\xi_n - \varepsilon)^s \cdot \varphi(\xi', \xi_n - \varepsilon, t)\, d\xi dt - \\
&- \int\limits_{Q^1_{\varepsilon\,\varepsilon_1}} \sum_{i=0}^{2m+s-1} (\xi_n - \varepsilon)^i \cdot \varphi_i(\xi', t) \cdot F_0(x, t, \partial_r u(x,t))\, d\xi dt = \\
&= \int\limits_{\Sigma_{\varepsilon\,\varepsilon_1}} \sum_{j=0}^{2m-1} \widetilde{B}_j u \times \qquad (21)\\
&\times \{ \sum_{p=0}^{2m-1-j} \widetilde{C}_{j\,p} \varphi_{2m-1-p-j} \cdot (2m-1-p-j)! \}\, dS dt - \\
&\qquad - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} u(x, \varepsilon_1) \Phi_\varepsilon(x, \varepsilon_1)\, d\xi,
\end{aligned}$$

де $\widetilde{C}_{jp} = \widetilde{C}_{jp}(\xi', t, D_{\xi'})$ – дотичні диференціальні оператори порядків менше або рівне p, $\widetilde{C}_{j0} = \widetilde{C}_{j0}(\xi', t) \neq 0$, $j = \overline{0, 2m-1}$.

За умовою $u \in \mathcal{M}_s(Q)$, обмеженістю φ в Q^1 та лемою [6, с. 70] існує

$$\lim_{\varepsilon,\,\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{Q^1_{\varepsilon\,\varepsilon_1}} u\cdot(\xi_n-\varepsilon)^s\cdot\varphi(\xi',\xi_n-\varepsilon,t)\,d\xi dt = \\ = \int\limits_{Q^1} u\cdot\xi_n^s\cdot\varphi(\xi',\xi_n,t)\,d\xi dt. \tag{22}$$

Оскільки $\sum\limits_{i=0}^{2m+s-1}(\xi_n-\varepsilon)^i\varphi_i(\xi',t)$ обмежена в Q^1, то із (21) випливає, що умова (19) виконується тоді і лише тоді, коли існує границя при ε, $\varepsilon_1 \to 0$ правої частини (21).

Використовуючи лему [6, с. 70] при $\varepsilon_1 \to 0$, одержуємо існування

$$\lim_{\varepsilon,\,\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} u(x,\varepsilon_1)\Phi_\varepsilon(x,\varepsilon_1)\,d\xi = \lim_{\varepsilon,\,\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} u(x,\varepsilon_1)\Phi_\varepsilon(x,0)\,d\xi = 0.$$

Припускаючи виконання (19), матимемо існування

$$\lim_{\varepsilon,\,\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{\Sigma_{\varepsilon\,\varepsilon_1}}\sum_{j=0}^{2m-1}\widetilde{B}_j u\times \\ \times\Big\{\sum_{p=0}^{2m-1-j}\widetilde{C}_{j\,p}\varphi_{2m-1-p-j}\cdot(2m-1-p-j)!\Big\}\,dSdt. \tag{23}$$

Нехай $\varphi_0 \equiv \varphi_1 \equiv ... \equiv \varphi_{2m-2} \equiv 0$. Введемо лінійний функціонал $\widetilde{f}_0$:
$(\varphi,\, \widetilde{f}_0)_1 = \lim\limits_{\varepsilon,\,\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{\Sigma_{\varepsilon\,\varepsilon_1}} \widetilde{B}_0 u\cdot\varphi\,dSdt$, $\varphi \in D^0_0(\overline{\Sigma})$.

Із (21) та (22), (23) одержуємо

$$\widetilde{C}_{0\,0}(2m-1)!\cdot(\varphi_{2m-1}, \widetilde{f}_0)_\Gamma = \int\limits_{Q^1} u\cdot\xi_n^s\cdot\varphi(\xi',\xi_n,t)\,d\xi dt - \\ - \int\limits_{Q^1}[\xi_n^{2m-1}\cdot\varphi_{2m-1}(\xi',t) + \xi_n^{2m}\cdot\varphi_{2m}(\xi',t) + ..+ \\ + \xi_n^{2m+s-1}\cdot\varphi_{2m+s-1}(\xi',t)]\cdot F_0(x,t,\partial_r u(x,t))\,d\xi dt. \tag{24}$$

За формулою (20)

$$|\varphi(\xi^{'},\xi_n,t)| \leq K_{2m-1} \sum_{|\gamma|+2m\gamma_0 \leq s+1} \sup_{(\xi^{'},t)\subset\Sigma} |D^{\gamma}_{\xi^{'}} \frac{\partial^{\gamma_0}}{\partial t^{\gamma_0}} \varphi_{2m-1}(\xi^{'},t)|,$$

тому

$$\int\limits_{Q^1} \xi_n^s \cdot |u \cdot \varphi(\xi',\xi_n,t)|\, d\xi dt \leq$$

$$\leq K^1_{2m-1} \sum_{|\gamma|+2m\gamma_0 \leq s+1} \sup_{(\xi',t)\subset\Sigma} |D^{\gamma}_{\xi'} \tfrac{\partial^{\gamma_0}}{\partial t^{\gamma_0}} \varphi_{2m-1}(\xi^{'},t)|,$$

$$K^1_{2m-1} = K_{2m-1}||u||_s;$$

$$|\xi_n^{2m-1} \cdot \varphi_{2m-1}(\xi^{'},t) + ... + \xi_n^{2m+s-1} \cdot \varphi_{2m+s-1}(\xi^{'},t)| \leq$$

$$\leq K^{'}_{2m-1} \sum_{|\gamma|+2m\gamma_0 \leq s} \sup_{(\xi^{'},t)\subset\Sigma} |D^{\gamma}_{\xi'} \tfrac{\partial^{\gamma_0}}{\partial t^{\gamma_0}} \varphi_{2m-1}(\xi^{'},t)|,\ K^{'}_{2m-1} = const > 0.$$

Тоді враховуючи (19), із (24) одержуємо

$$|(\varphi,\widetilde{f}_0)_1| \leq K^{'}_0 \sum_{|\gamma|+2m\gamma_0 \leq s+1} \sup_{(\xi^{'},t)\subset\Sigma} |D^{\gamma}_{\xi'} \frac{\partial^{\gamma_0}}{\partial t^{\gamma_0}} \varphi(\xi^{'},t)| \quad \forall \varphi \in D^0_0(\overline{\Sigma}),$$

де $K^{'}_0 = K^{'}_0(||u||_s)$. Отже, функціонал $\widetilde{f}_0$ лінійний, неперервний на $D^0_0(\overline{\Sigma})$ і має порядок сингулярності $s(\widetilde{f}_0) \leq s+1$.

Вважаючи далі по черзі відмінними від нуля тільки по одній із функцій φ_{2m-2},..., φ_1, φ_0, з (21) та (23) аналогічно, одержуємо існування

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{\Sigma_{\varepsilon\,\varepsilon_1}} \widetilde{B}_j u \cdot \varphi\, dSdt = (\varphi,\widetilde{f}_j)_1,\ \varphi \in D^0_0(\overline{\Sigma}),$$

$$s(\widetilde{f}_j) \leq s+j+1,\ j = \overline{0,2m-2}.$$

Нехай $Q^2_{\varepsilon\,\varepsilon_1}$ – підобласть в Q така, що $\sqrt[2m]{\varrho_2(t)} < \varrho_1(x)$ для довільних $(x,t) \in Q^2_{\varepsilon\,\varepsilon_1}$.

Нехай $\Psi(x,t) = \sum\limits_{i=0}^{q} t^i \psi_i(x)$, де $q = [\frac{s}{2m}] + 1$, ψ_0 – довільна функція з $D_0(\overline{\Omega})$. За лемою 4.3 із [4, с. 136], існують такі функції ψ_1,..., $\psi_q \in D_0(\overline{\Omega})$, що $\widehat{B}_j\Psi\,|_{\Sigma} = \widehat{C}_j\Psi\,|_{\Sigma} = 0$, $\Psi(x,T) = 0$,

$L^*\Psi(x,t) = t^{\frac{s}{2m}}\psi(x,t)$, де ψ – нескінченно диференційовна і обмежена при досить малих значеннях t функція.

Запишемо формулу Ґріна в області $Q^2_{\varepsilon\,\varepsilon_1}$ для функцій u та Ψ

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q^2_{\varepsilon\,\varepsilon_1}} u(x,t)\cdot t^{\frac{s}{2m}}\psi(x,t)\,dxdt- \\ -\int\limits_{Q^2_{\varepsilon\,\varepsilon_1}} \Psi(x,t)\cdot F_0(x,t,\partial_r u(x,t))\,dxdt= \\ =\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\Sigma_{\varepsilon\,\varepsilon_1}} [(\widehat{C}_j\Psi)(x_\varepsilon,t)\cdot(B_ju)(x_\varepsilon,t)- \\ -(\widehat{B}_j\Psi)\cdot(C_ju)]\,dSdt-\int\limits_{\Omega_\varepsilon} u(x,\varepsilon_1)\cdot\Psi(x,\varepsilon_1)\,dx.\end{gathered} \tag{25}$$

Для $u\in\mathcal{M}_s(Q)$ існує

$$\lim_{\varepsilon,\,\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{Q^2_{\varepsilon\,\varepsilon_1}} u(x,t)\cdot t^{\frac{s}{2m}}\cdot\psi(x,t)\,dxdt=\int\limits_{Q^2} u(x,t)\cdot t^{\frac{s}{2m}}\cdot\psi(x,t)\,dxdt.$$

Оскільки функція Ψ обмежена в Q^2, то за умовою (19) існує

$$\begin{gathered}\lim_{\varepsilon,\,\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{Q^2_{\varepsilon\,\varepsilon_1}}\sum_{i=0}^{q} t^i\cdot\psi_i(x)\cdot F_0(x,t,\partial_r u(x,t))\,dxdt= \\ =\int\limits_{Q^2}\sum_{i=0}^{q} t^i\cdot\psi_i(x)\cdot F_0(x,t,\partial_r u(x,t))\,dxdt.\end{gathered}$$

За доведеним вище існують узагальнені крайові значення $\widetilde{B}_ju$, тому існує границя першої групи доданків у правій частині (25), яка за лемою [6, с. 70] дорівнює нулю.

Тоді із (25) випливає існування

$$\begin{gathered}\lim_{\varepsilon,\,\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\Psi(x,\varepsilon_1)\cdot u(x,\varepsilon_1)\,dx= \\ =\lim_{\varepsilon,\,\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}(\lim_{\varepsilon_1\to 0}\sum_{i=0}^{q}\varepsilon_1^i\cdot\psi_i(x))\cdot u(x,\varepsilon_1)\,dx= \\ =\lim_{\varepsilon,\,\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\psi_0(x)\cdot u(x,\varepsilon_1)\,dx.\end{gathered}$$

Введемо лінійний функціонал $\widehat{f}_{m+1}$ на $D_0(\overline{\Omega})$:

$$(\varphi,\widehat{f}_{m+1})_2=\lim_{\varepsilon,\,\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\varphi(x)\cdot u(x,\varepsilon_1)\,dx.$$

Із (25) та попередніх міркувань

$$|(\psi_0, \widehat{f}_{m+1})_2| \le \lim_{\varepsilon, \varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{Q^2_{\varepsilon\,\varepsilon_1}} t^{\frac{s}{2m}} \cdot |u(x,t)\cdot\psi(x,t)|\,dxdt + \\ +|\int\limits_{Q^2} \sum_{i=0}^{q} t^i \cdot \psi_i(x)\cdot F_0(x,t,\partial_r u(x,t))\,dxdt|. \tag{26}$$

З доведення леми 4.2 [4, с. 136], випливає оцінка

$$|\psi(x,t)| \le K \sum_{|\gamma|\le s+2m} \sup_{x\in\Omega} |D^\gamma \psi_0(x)|,$$

де $K = const > 0$. Оскільки функції ψ_j, $j=\overline{1,q}$ виражаються через ψ_0 та її похідні до порядків $2mj$, то

$$|\psi_0(x) + t\cdot\psi_1(x) + ... + t^q\cdot\psi_q(x)| \le K^1 \sum_{|\gamma|\le 2mq} \sup_{x\in\Omega} |D^\gamma \psi_0(x)|,$$

де $K^1 = const > 0$. Враховуючи (19), із (26) одержуємо

$$|(\psi_0, \widehat{f}_{m+1})_2| \le K'_{m+1} \sum_{|\gamma|\le s+2m} \sup_{x\in\Omega} |D^\gamma \psi_0(x)| \\ \forall \psi_0 \in D_0(\overline{\Omega}),\ K'_{m+1} = const.$$

Звідси випливає, що $\widehat{f}_{m+1}$ – неперервний функціонал на $D_0(\overline{\Omega})$ і $s(\widehat{f}_{m+1}) \le s + 2m$. ■

2.3. Формулювання узагальненої крайової задачі.

Нехай $F_0(x,t,\mathrm{v})$ – визначена та неперервна в $Q\times\mathbb{M}_{M(r)}$ функція, $F_j \in (D_0^0(\overline{\Sigma}))'$, $F_{m+1} \in (D_0(\overline{\Omega}))'$, $0 \le s(F_j) \le s_j$, $j = \overline{1, m+1}$, $s \ge s_0 \overset{def}{=} \max\{\max\limits_{1\le j\le m}(s_j - m_j - 1), s_{m+1} - 2m\}$.

Розглядаємо узагальнену крайову задачу

$$L(x,t,D_x,\frac{\partial}{\partial t})u(x,t) = F_0(x,t,\partial_r u(x,t)),\ \ (x,t)\in Q, \tag{27}$$

$$B_j(x,t,D_x)u(x,t)\mid_\Sigma = F_j(x,t),\ \ j=\overline{1,m},\ \ (x,t)\in\Sigma, \tag{28}$$

$$u|_{t=0} = F_{m+1}(x),\ x\in\Omega \tag{29}$$

в подібних до випадку лінійних крайових задач [14, 15] формулюваннях.

Формулювання 1 задачі (27)-(29). *Знайти узагальнений розв'язок*
$u \in \mathcal{M}_{s,r}(Q) \cap C^{2m-1,0}(Q)$ *рівняння* (27) *в області* Q, *який набуває узагальнених початкових значень* $F_{m+1} \in (D_0(\overline{\Omega}))'$, *а функції* $B_j u$, $j = \overline{1,m}$ *набувають узагальнених крайових значень* $F_j \in (D_0^0(\overline{\Sigma}))'$, $j = \overline{1,m}$ *відповідно, тобто u задовольняє початкову умову* (29) *в сенсі* (16) *та крайові умови* (28) *в сенсі* (17).

Формулювання 2 задачі (27)-(29). *Знайти функцію* $u \in \mathcal{M}_{s,r}(Q)$ *таку, що*

$$\int\limits_Q (L^*\psi) \cdot u \, dxdt = \int\limits_Q \psi(x,t) \cdot F_0(x,t,\partial_r u(x,t)) \, dxdt +$$
$$+ \sum_{j=1}^m (\widehat{C_j}\psi, F_j(x,t))_1 + (\psi(\cdot,0), F_{m+1}(\cdot))_2 \text{ для довільної } \psi \in X_s(\overline{Q}).$$

Теорема 4. *Функція* $u \in \mathcal{M}_{s,r}(Q) \cap C^{2m-1,0}(Q)$, *яка задовольняє умову (19), є розв'язком задачі (27)-(29) у формулюванні 2 тоді і лише тоді, коли вона є розв'язком цієї задачі у формулюванні 1.*

Доведення теореми 4 проводимо подібно до доведення теореми 2.

У [16] наведено достатні умови розв'язності задачі (27)-(29).

1. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
2. *Ройтберг Я.А.* Эллиптические граничные задачи в обобщенных функциях. I-IV. – Чернигов: Изд-во Чернигов. педин-та, 1990, 1991.
3. *Лопатинский Я.Б.* Граничные свойства решений дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа // Докл. АН СССР. № 2. – 1956.
4. *Лопушанська Г.П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D'. – Львів: Видавництво Львівського національного університету імені Івана Франка, 2002. – 285 с.
5. *Шехтер М.* Общие граничные задачи для эллиптических уравнений в частных производных. // Математика. – 1996. – Т.4, № 5. – С. 93 - 122.
6. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй спецкурс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
7. *Szmydt Z.* Sui problemi di Dirichlet e di Neumann con dati al contorno generalizzati// Atti Accad. naz. Lincei. Rend. CI. Sci. fis. mat. e natur. – 1962. – Т. 32, № 3. – P. 867 – 872.

8. *Грушин В.В.* О поведении решений дифференциальных уравнений вблизи границы // Докл. АН СССР. – 1964. – 158. – С. 264 - 267.
9. *Гупало Г.С.* Про узагальнену задачу Діріхле // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1967. – № 7. – С. 843 - 846.
10. *Лопушанська Г.П.* Крайові значення із $(C^\infty)'$ розв'язків напівлінійних еліптичних рівнянь //Нелинейные граничные задачи – 2006. – Т. 16. – С. 173 – 185.
11. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – К.: Вища школа, 1990. – 200 с.
12. *Ивасишен С.Д.* Сопряженные операторы Грина. Обобщенные решения параболических граничных задач с нормальными граничными условиями // ДАН СССР. – 1971. – Т.197, № 2. – С. 261 – 264.
13. *Лопушанська Г. П.* Про два підходи до вивчення лінійних неоднорідних граничних задач у просторах узагальнених функцій// – Київ: НМК ВО, 1991. – 51 с.
14. *Гупало А.С.,Лопушанская Г.П.* Об обобщённых граничных значениях решения однородного параболического уравнения второго порядка // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов. – К.: Наук. думка, 1989. – С. 54 – 59.
15. *Лопушанская Г. П.* О решении с помощью матрицы Грина параболической граничной задачи в пространстве обобщённых функций // Укр. мат. журн. – 1986. – Т. 38, № 6. – С. 795 – 798.
16. *Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю.* Існування та регулярність розв'язків узагальненої нормальної крайової задачі для квазілінійних параболічних систем // Математичний вісник НТШ – 2005. – Т. 2. – С. 123 – 134.

Львівський національний університет
імені Івана Франка
вул. Університетська, 1,
79000, Львів, Україна
diffeq@franko.lviv.ua
o_chmyr@franko.lviv.ua

Отримано 22.03.07