©2007. **В.И. Войтицкий**

О СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ, ПОРОЖДЁННЫХ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧЕЙ СТЕФАНА С УСЛОВИЕМ ГИББСА-ТОМПСОНА

Рассматривается спектральная задача, порождённая модельной линеаризованной задачей Стефана с условием Гиббса-Томсона, а также её обобщение для случая тройки абстрактных гильбертовых пространств. Доказано, что спектры этого класса задач являются вещественными и дискретными, системы собственных элементов образуют ортонормированные базисы. Также получены некоторые оценки роста собственных значений и достаточные условия существования положительной, либо положительной и отрицательной ветвей собственных значений.

Ключевые слова: гильбертово пространство, вложение пространств, спектральная задача, спектральный параметр, самосопряжённый оператор, ортонормированный базис
MSC (2000): 35P05, 35P10

1. Введение. Постановка модельной линеаризованной задачи Стефана с условием Гиббса-Томсона.

Задачей Стефана называют проблему определения поля температуры и границы фазового перехода при плавлении или кристаллизации в чистом веществе. При таких процессах различные части вещества могут находиться в различных агрегатных состояниях (в различных фазах). При этом формы границ раздела фаз со временем меняются.

История изучения задачи Стефана насчитывает более 150 лет. Ее исследованием занималось огромное число математиков практически во всех странах мира. Существенный вклад в развитие аналитических методов исследования сделали И. И. Данилюк, П. Я. Полубаринова-Кочина, М. А. Лаврентьев, О. А. Олейник, В. А. Солонников, Л. Н. Ниренберг, А. Фридман, А. Мейрманов, Е. В. Радкевич, Б. В. Базалий и др.

Различают однофазные и двухфазные, одномерные и многомерные, стационарные и квазистационарные, классические и модифицированные задачи Стефана. При этом спектральные задачи, порождённые задачей Стефана, по-видимому, ранее не изучались. Исторический обзор результатов по задаче Стефана можно найти, например, в [1].

В данной статье рассматриваются спектральные задачи, порождённые одной модельной линеаризованной однофазной задачей Стефана в области Ω с фиксированной липшицевой границей. Линеаризованные постановки задачи Стефана возможны, если рассматривать задачу на малом интервале времени $t \in [0;T]$, считая, что неизвестная граница меняется за это время незначительно (см. [1], §3). Итак, рассмотрим следующую постановку задачи Стефана с условием Гиббса-Томсона:

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega = \Gamma \cup S \, (\Gamma \cap S = \emptyset)$ необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u(t,x) + \Delta_\Gamma \sigma(t,x) = g(t,x), \quad x \in \Gamma; \tag{2}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial n}(t,x) + \frac{\partial \sigma}{\partial t}(t,x) = h(t,x), \quad x \in \Gamma; \tag{3}$$

$$u(t,x) = 0, \qquad x \in S; \tag{4}$$

$$\sigma(t,x) = 0, \qquad x \in \partial\Gamma, \tag{5}$$

и начальными условиями

$$u(0,x) = u^0(x), \quad x \in \Omega; \tag{6}$$

$$\sigma(0,x) = \sigma^0(x), \quad x \in \Gamma. \tag{7}$$

Здесь неизвестными являются функции $u(t,x)$, $\sigma(t,x)$, определённые соответственно на множествах $[0;T]\times\overline{\Omega}$ и $[0;T]\times\overline{\Gamma}$; $u^0(x)$ и $\sigma^0(x)$ — заданные функции; Δ — оператор Лапласа; Δ_Γ — оператор Лапласа-Бельтрами, действующий на границе Γ. За малые изменения части границы Γ в поставленной задаче отвечает заданная на Γ неизвестная функция $\sigma(t,x)$. Условия (4) – (5) введены для удобства рассмотрений.

Следует отметить, что данная начально-краевая задача изучалась ранее в полупространстве проф. Волевичем Л. Р. Результаты его исследований были представлены на Крымских осенних математических школах в 2004 и 2005 годах. Постановка этой задачи проистекает, например, из задачи, рассмотренной в [2] (см. также [3] – [5]).

2.Спектральная задача Стефана с условием Гиббса-Томсона.

Будем изучать соответствующую однородную задачу, считая, что

$$u(x,t) = u(x)e^{-\lambda t}, \quad x \in \overline{\Omega}; \tag{8}$$

$$\sigma(x,t) = \sigma(x)e^{-\lambda t}, \quad x \in \overline{\Gamma}. \tag{9}$$

Подставляя выражения (8) – (9) в уравнения (1) – (7), приходим к спектральной задаче с неизвестными функциями $\sigma(x)$ и $u(x)$:

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x), \qquad x \in \Omega; \tag{10}$$

$$-\Delta_\Gamma \sigma(x) = u(x), \qquad x \in \Gamma; \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = -\lambda\sigma(x), \quad x \in \Gamma; \tag{12}$$

$$u(x) = 0, \qquad x \in S; \tag{13}$$

$$\sigma(x) = 0, \qquad x \in \partial\Gamma. \tag{14}$$

В этой задаче можно исключить неизвестную функцию $\sigma(x)$. Для этого рассмотрим оператор B:

$$B\sigma := -\Delta_\Gamma\sigma, \quad \mathcal{D}(B) = \{\sigma(x) \in C^2(\overline{\Gamma}) : \sigma|_{\partial\Gamma} = 0\}, \tag{15}$$

действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\Gamma)$.

Лемма 2.1. *Оператор B является симметрическим и положительно определенным.*

Замечание 2.1. *В силу леммы 2.1 оператор B можно расширить по Фридрихсу до самосопряженного оператора $\tilde{B}$ с тем же энергетическим пространством. Будем считать, что эта процедура проделана и далее всюду $B := \tilde{B}$ — самосопряженный положительно определенный оператор. Тогда, очевидно, что существует оператор B^{-1}, и он является самосопряжённым ограниченным положительным оператором. Можно доказать, что B^{-1} является также компактным оператором.*

Подействуем на обе части уравнения (11) ограниченным оператором B^{-1}. Тогда

$$\sigma(x) = B^{-1}u(x), \quad x \in \Gamma, \tag{16}$$

и возникает спектральная задача

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x), \qquad x \in \Omega; \tag{17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = (-\lambda) B^{-1} u(x), \quad x \in \Gamma; \tag{18}$$

$$u(x) = 0, \qquad x \in S, \tag{19}$$

для одной искомой функции $u(x)$. Функцию $\sigma(x)$ можно находить по формуле (16).

Будем исследовать задачу (17) – (19), считая, что B^{-1} произвольный самосопряжённый ограниченный положительный оператор, действующий в пространстве $L_2(\Gamma)$. Назовём ее *спектральной задачей Стефана с условием Гиббса-Томсона*.

Особенностью спектральной задачи (17) – (19) является присутствие спектрального параметра λ в уравнении и в краевом условии. Задачи подобного вида, когда $B^{-1} = I$, и перед λ в (18) стоит знак "плюс", изучались ранее в работах [6] – [9].

В [10] было представленно рассмотрение задачи (17) – (19) в пространстве пар $\mathcal{H} = L_2(\Omega) \oplus L_2(\Gamma)$. Было показано, что спектр задачи вещественный, дискретный, состоит из ветви положительных и, по-видимому, из ветви отрицательных собственных значений с предельными точками $\lambda = \pm\infty$. Система собственных элементов образует ортонормированный базис в некотором гильбертовом (энергетическом) пространстве $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}$.

В данной статье предложено исследование абстрактной спектральной задачи, являющейся обобщением спектральной задачи (17) – (19). С помощью абстрактной формулы Грина доказано, что свойства системы собственных элементов и спектра абстрактной спектральной задачи аналогичны свойствам задачи (17) – (19).

3. Формулировка абстрактной спектральной задачи Стефана.

Пусть F, E и G — произвольные сепарабельные гильбертовы пространства, такие, что F ограниченно (плотно) вложено в

E (обозначение: $F \subset\to E$), и на F определён ограниченный абстрактный оператор следа $\gamma : F \to G$ такой, что $\mathcal{R}(\gamma) =: G_+ \subset\to G$. Тогда (см. [11], а также [12] – [15]) можно однозначно по E, F, G (со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_E, (\cdot,\cdot)_F$ и $(\cdot,\cdot)_G$) и γ построить абстрактные дифференцальные выражения

$$L : \mathcal{D}(L) = F \to F^* \supset E; \tag{20}$$
$$\partial : \mathcal{D}(\partial) = F \to (G_+)^* =: G_- \supset G, \tag{21}$$

такие, что справедлива абстрактная формула Грина

$$\langle v, Lu\rangle_E = (v,u)_F - \langle \gamma v, \partial u\rangle_G, \quad \forall v,u \in F. \tag{22}$$

Здесь выражения в косых скобках являются функционалами, действующими на $v \in F$ и $\gamma v \in G_+$, и определяемыми элементами $Lu \in F^*$ и $\partial u \in G_-$.

Заметим при этом, что если $Lu \in E$, а $\partial u \in G$, то эти функционалы являются обычными скалярными произведениями, и тогда справедлива формула

$$(v, Lu)_E = (v,u)_F - (\gamma v, \partial u)_G, \quad \forall v,u \in F:\ Lu \in E,\ \partial u \in G. \tag{23}$$

Будем обозначать далее $N := \mathrm{Ker}\gamma$, $M := F \ominus N$ и считать, что N и M — бесконечномерные подпространства пространства F.

Пусть пространства E, F, G и оператор следа γ заданы и по ним построены операторы L и ∂. Тогда по аналогии с задачей (17) – (19) можно рассмотреть следующую спектральную задачу:

$$Lu = \lambda u \qquad (\text{в } E); \tag{24}$$
$$\partial u = (\pm\lambda) V \gamma u \quad (\text{в } G). \tag{25}$$

Здесь $V = V^* \in \mathcal{L}(G_+; G_-)$, $\langle \varphi,\ V\varphi\rangle_G > 0,\ \forall \varphi \neq 0,\ \varphi \in G_+$. Случай различных знаков в (25) будет рассматриваться одновременно. Назовём эту задачу *абстрактной спектральной задачей Стефана.*

Следует отметить, что подобная задача в случае знака “плюс” в уравнении (25) исследовалась ранее в [12] (см. п. 4.4.). Случай же знака “минус” в (25) ранее не исследовался.

Задача (17) – (19) получается из задачи (24) – (25), если в абстрактном краевом условии (25) перед λ стоит знак "минус", $V = B^{-1}$, и в качестве тройки гильбертовых пространств взяты следующие пространства:

$$E = L_2(\Omega); \tag{26}$$

$$F = \mathcal{H}^1_{0,S}(\Omega) = \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega): \ u = 0 \ (\text{на } S)\}; \tag{27}$$

$$G = L_2(\Gamma); \tag{28}$$

$$\gamma : F = \mathcal{H}^1_{0,S}(\Omega) \to \mathcal{H}^{1/2}(\Gamma) = G_+, \quad \gamma u := u|_\Gamma. \tag{29}$$

В этом случае согласно теоремам вложения С. Л. Соболева $F = \mathcal{H}^1_{0,S}(\Omega)$ компактно вложено в $L_2(\Omega) = E$, γ — оператор следа, для которого $\mathcal{R}(\gamma) = G_+ = \mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)$ компактно вложено в $L_2(\Gamma) = G$, $N = \mathcal{H}^1_0(\Omega) = \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = 0\}$ плотно в $L_2(\Omega) = E$, $M = \mathcal{H}^1_{0,S}(\Omega) \ominus \mathcal{H}^1_0(\Omega) = \mathcal{H}^1_{h,S}(\Omega) := \{u \in \mathcal{H}^1_{0,S}(\Omega) : \Delta u = 0 \ (\text{в } \Omega)\}$ — пространство гармонических функций, обращающих в нуль на S.

В качестве оператора L в спектральной задаче Стефана с условиями Гиббса-Томсона выступает оператор $-\Delta$, а в качестве ∂ — оператор производной по нормали. Абстрактная формула Грина (23) в этом случае превращается в первую формулу Грина для оператора Лапласа:

$$-\int_\Omega (\Delta u) v d\Omega = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS. \tag{30}$$

В [16] задача (24) – (25) сводится к спектральной задаче для компактного самосопряжённого оператора в пространстве пар $\mathcal{H} = E \oplus G$. Там доказано, что в предположении компактности вложений F в E (обозначение $F \subset\!\!\to\!\!\subset\!\!\to E$) и G_+ в G, при дополнительном условии $\overline{N} = E$, задача имеет собственный ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $F \dot{+} G_+$. Спектр задачи (24) – (25) вещественный, дискретный. В случае знака "плюс" в уравнении (25) он состоит из ветви положительных собственных значений с предельной точкой $\lambda = +\infty$, а в случае знака "минус" — из ветви положительных и ветви отрицательных собственных значений с предельными точками $\lambda = \pm\infty$. В данной статье педлагается другой метод исследования задачи (24) – (25). А именно, метод рассмотрения абстрактной задачи Неймана для уравнения Пуассона.

4. Операторная форма абстрактной спектральной задачи Стефана.

Рассмотрим общую вспомогательную абстрактную задачу Неймана для уравнения Пуассона:

$$Lu = f \quad (\text{в } F^*); \tag{31}$$

$$\partial u = \psi \quad (\text{в } G_-). \tag{32}$$

Эта задача рассматривалась в статьях [12] (п. 3.2) и [11] (п. 2.4), а также в [13].

Определение 4.1. *Решение задачи* (31) – (32) *при условии* $f \in F^*$, $\psi \in G_-$, *будем называть слабым решением.*

Определение 4.2. *Слабое решение задачи* (31) – (32), *отвечающее случаю* $f \in E$, $\psi \in G$, *назовём обобщённым решением.*

Теорема 4.1. *При условии* $\overline{N} = E$ *элемент* $u \in F$ *тогда и только является слабым решением задачи* (31) – (32), *когда выполняется тождество*

$$(v, u)_F = \langle v, f \rangle_E + \langle \gamma v, \psi \rangle_G, \quad \forall v \in F. \tag{33}$$

Для любых $f \in F^*$, $\psi \in G_-$, *существует единственное слабое решение задачи* (31) – (32). *Оно находится по формуле*

$$u = \tilde{A}^{-1} f + K\psi, \tag{34}$$

где $\tilde{A}: \ F \to F^*$ *— расширение оператора* A *гильбертовой пары* $(F; E)$, *а* $K: \ G_- \to M \subset F$ *— ограниченный оператор, сопряжённый к* γ *и определяемый из тождества*

$$(v, K\psi)_F = \langle \gamma v, \psi \rangle_G, \quad \forall v \in F, \ \psi \in G_-. \tag{35}$$

Справедливо и обратное: любой элемент, определяемый формулой (34), *является слабым решением соответствующей абстрактной краевой задачи.*

Доказательство. Пусть элемент $u \in F$ является слабым решением задачи (31) – (32). Применяя к нему абстрактную формулу Грина (22) непосредственно получаем, что он удовлетворяет тождеству (33).

Докажем, что при условии $\overline{N} = E$ призвольный элемент $u \in F$, удовлетворяющий тождеству (33), является слабым решением задачи (31) – (32). Для этого рассмотрим тождество (33) при $v \in N$. Получаем

$$(v, u)_F = \langle v, f \rangle_E, \quad \forall v \in N. \tag{36}$$

С другой стороны согласно абстрактной формуле Грина

$$(v, u)_F = \langle v, Lu \rangle_E, \quad \forall v \in N. \tag{37}$$

Отсюда

$$\langle v, Lu - f \rangle_E = 0, \quad \forall v \in N. \tag{38}$$

При условии $\overline{N} = E$ последнее тождество означает, что $\langle v, Lu - f \rangle_E$ является нулевым функционалом из пространства N^*. Однако по условию задачи (31) – (32) $Lu,\ f \in F^*$. Отсюда следует, что $Lu = f \in F^*$. Далее, вычитая из абстрактной формулы Грина

$$(v, u)_F = \langle v, Lu \rangle_E + \langle \gamma v, \partial u \rangle_G, \quad \forall v, u \in F, \tag{39}$$

тождество (33), с учётом $Lu = f$ получим

$$\langle \gamma v, \partial u - \psi \rangle_G = 0, \quad \forall v \in F. \tag{40}$$

Отсюда $\partial u = \psi \in G_-$.

Порождающий оператор A гильбертовой пары $(F; E)$ определяется из тождества

$$(v, u)_F = (v, Au)_E, \quad \forall v \in F,\ u \in \mathcal{D}(A) \subset F, \tag{41}$$

а его расширение $\tilde{A}$ из тождества

$$(v, u)_F = \langle v, \tilde{A}u \rangle_E, \quad \forall v, u \in F. \tag{42}$$

Переписывая теперь тождество (33) с учётом (35) и (42), получаем

$$\langle v, \tilde{A}u \rangle_E = \langle v, f \rangle_E + \langle v, \tilde{A}K\psi \rangle_E, \quad \forall v \in F. \tag{43}$$

Отсюда следует, что $\tilde{A}u = f + \tilde{A}K\psi$, и, следовательно, справедлива формула (34).

Проделывая обратные выкладки, несложно показать, что любой элемент $u = \tilde{A}^{-1}f + K\psi$ удовлетворяет тождеству (33). Следовательно он является слабым решением соответствующей абстрактной краевой задачи. $\square$

Справедливо следующее утверждение (см., например, [12]).

Лемма 4.1. *Порождающий оператор A гильбертовой пары $(F;E)$ при $\overline{N}=E$ удовлетворяет следующим свойствам:*

$$Au := Lu, \quad \mathcal{D}(A) := \{u \in \mathcal{D}(L):\ Lu \in E,\ \partial u = 0\} \subset F. \qquad (44)$$

Он является самосопряженным положительно определённым оператором, действующим в пространстве E. В случае $F \subset_{\to} \subset_{\to} E$ обратный к нему оператор $A^{-1}:\ E \to \mathcal{D}(A)$ является компактным. При этом справделиво тождество

$$(A^{-1}u, v)_F = (u,v)_E, \quad \forall u \in E,\ v \in F. \qquad (45)$$

На основании теоремы 4.1 множество решений $u \in F$ абстрактной спектральной задачи Стефана (24) – (25) будет совпадать с множеством решений задачи

$$u = A^{-1}(\lambda u) + K(\pm\lambda V\gamma u) = \lambda\left(A^{-1} \pm KV\gamma\right)u. \qquad (46)$$

Назовём задачу (46) *операторной формой абстрактной спектральной задачи Стефана.*

Здесь $f=\lambda u$, $\psi = \pm\lambda V\gamma u$. Вместо оператора $\tilde{A}$ будем рассматривать сужение оператора A, такое, что $\mathcal{R}(A) = F$. Тогда согласно тождеству (45) оператор A^{-1} будет являться самосопряженным положительным оператором, действующим в пространстве F. Он будет компактным, если $F \subset_{\to}\subset_{\to} E$. Действительно, согласно лемме 4.1 оператор $A^{-1}:\ E \to F$ является компактным, т.е. переводит любое ограниченное множество в предкомпактное. Произвольное множество в F в силу $F \subset_{\to}\subset_{\to} E$ является предкомпактным, а значит ограниченным в E. Следовательно оператор $A^{-1}:\ F \to F$ также переводит любое ограниченное множество в предкомпактное, т.е. является компактным оператором в F.

5. О свойствах спектра и о базисности системы собственных элементов.

Будем изучать свойства решений задачи (46), считая далее всюду $\overline{N}=E$.

Заметим сначала, что число $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (46). Действительно, иначе

$$u = 0 \cdot \left(A^{-1} \pm KV\gamma\right) u = 0. \tag{47}$$

Сделаем замены

$$\mu := 1/\lambda, \quad C_\pm := A^{-1} \pm KV\gamma. \tag{48}$$

Тогда задачу (46) можно записать в виде спектральных задач для операторов $C_\pm$:

$$C_\pm u = \mu u, \quad u \in F. \tag{49}$$

Лемма 5.1. *При условии $\overline{N} = E$ квадратичная форма*

$$\Phi(u) := (u,u)_E - \langle \gamma u, V\gamma u\rangle_G, \quad u \in F, \tag{50}$$

принимает положительные и отрицательные значения на подпространствах бесконечных размерностей.

Доказательство. Очевидно, что $\forall u \in N$ справедливо $\Phi(u) > 0$, поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что существует бесконечно много линейно независимых элементов, на которых форма (50) принимает отрицательные значения.

Действительно, так как M — бесконечное подпространство F, то в нём существет ортонормированный базис $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. В силу того, что $M \cap N = \{0\}$ имеем $\langle \gamma u_k, V\gamma u_k\rangle_G =: a_k > 0$. Так как $\overline{N} = E$, то $\forall \{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}} : \ 0 < \varepsilon_k < a_k, \ \exists \{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset N : \ \|u_k - v_k\|^2_E < \varepsilon_k$. Тогда в силу того, что $\gamma v_k = 0, \ k \in \mathbb{N}$, имеем

$$\Phi(u_k - v_k) = \|u_k - v_k\|^2_E - \langle \gamma u_k, V\gamma u_k\rangle_G < \varepsilon_k - a_k < 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{51}$$

Докажем, что элементы $\{u_k - v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ являются линейно независимыми. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(u_k - v_k) = 0$. В силу того, что $M \cap N = \{0\}$, отсюда получаем $\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k = 0$. Так как множество элементов $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ является линейно независимым, то $c_k = 0, \ k \in \mathbb{N}$. $\square$

Теорема 5.1. *При условии $F \subset\!\to\subset\!\to E$ и $V \in \mathfrak{S}_\infty(G_+; G_-)$ либо $G_+ \subset\!\to\subset\!\to G$ операторы $C_\pm$ являются самосопряжёнными компактными операторами, действующими в пространстве F,*

$$Ker\, C_\pm = \{0\}. \tag{52}$$

При этом оператор C_+ — положителен, а оператор C_- не является знакоопределённым.

Доказательство. Как было сказано выше, при условии $F \subset\to\subset\to E$ оператор A^{-1} является компактным самосопряжённым положительным оператором, действующим в пространстве F. Оператор $KV\gamma:\ F \to M \subset F$, очевидно, является компактным при выполнении одного из условий $V \in \mathfrak{S}_\infty(G_+; G_-)$ либо $\gamma \in \mathfrak{S}_\infty(F; G)$. Последнее равносильно тому, что $G_+ \subset\to\subset\to G$. Оператор $KV\gamma$ является самосопряженным в силу того, что V самосопряжён, а K и γ взаимно сопряжены. Следовательно, операторы $C_\pm$ являются самосопряжёнными компактными операторами в F как сумма (разность) двух самосопряжённых компактных операторов, действующих в пространстве F.

Далее, в силу того, что операторы A^{-1} и V положительны, имеем свойство положительности оператора C_+. Действительно,

$$(C_+u, u)_F = (A^{-1}u, u)_F + (KV\gamma u, u)_F = \\ = (A^{-1}u, u)_F + \langle \gamma u, V\gamma u\rangle_G > 0, \quad \forall u \in F,\ u \neq 0. \quad (53)$$

Из этого тождества получаем также, что $\mathrm{Ker} C_+ = \{0\}$.

Рассмотрим теперь квадратичную форму оператора C_-.

$$(C_-u, u)_F = (A^{-1}u, u)_F - (KV\gamma u, u)_F = \\ = (u, u)_E - \langle \gamma u, V\gamma u\rangle_G = \Phi(u), \quad \forall u \in F. \quad (54)$$

Согласно лемме 5.1 форма $(C_-\eta, \eta)_E$ принимает положительные и отрицательные значения на подпространствах бесконечных размерностей. Отсюда следует, что оператор C_- не является знакоопределённым.

Докажем, что $\mathrm{Ker}\ C_- = \{0\}$. Действительно, пусть $C_-u = 0$. Тогда

$$A^{-1}u = KV\gamma u, \quad u \in F. \quad (55)$$

По определению $\mathcal{R}(K) \subset M$, отсюда $A^{-1}u =: v \in M$. Согласно лемме 4.1

$$Au = Lu, \quad \mathcal{D}(A) := \{u \in \mathcal{D}(L):\ Lu \in E,\ \partial u = 0\}. \quad (56)$$

Допустим, что элемент $v \in \mathcal{D}(A)$. Тогда согласно определению дифференциального выражения L (см. [11], п. 2.3.) $Lv = 0$, с другой стороны $\partial v = 0$. Отсюда согласно формуле (34) для решений абстрактной задачи Неймана для уравнения Пуассона получаем, что $v = 0$. Значит $u = Av = 0$. $\square$

На основании теоремы Фишера (см. [17], с. 256) получаем следующее утверждение:

Лемма 5.2. *Пусть $\mathcal{A}$ — компактный самосопряжённый неотрицательный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\{\lambda_n(\mathcal{A})\}_{n=1}^{\infty}$ — множество его положительных собственных значений, упорядоченных с учётом кратности по убыванию. Тогда*

$$\frac{1}{\lambda_n(\mathcal{A})} = \max_{\{h_k\}_{k=1}^{n-1}\subset\mathcal{H}} \min \frac{(f,f)}{(\mathcal{A}f,f)}, \tag{57}$$

где минимум берётся по всевозможным $\mathcal{H} \ni f: \ (f,h_k) = 0, \ \forall k = \overline{1,n-1}$.

Теорема 5.2. (Основная теорема о спектре). *Пусть $\overline{N} = E$, $F \subset\to\subset\to E$ и $V \in \mathfrak{S}_\infty(G_+;G_-)$ либо $G_+ \subset\to\subset\to G$.*

Тогда спектр задачи (24) – (25) в случае знака "плюс" перед λ в уравнении (25) состоит из одной ветви положительных конечнократных собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}: \ \lambda_n \to +\infty \ (n \to \infty)$.

В случае знака "минус" перед λ в уравнении (25) спектр задачи (24) – (25) состоит из ветви $\{\lambda_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$ положительных и из ветви $\{\lambda_n^-\}_{n\in\mathbb{N}}$ отрицательных конечнократных собственных значений, где $\lambda_n^+ \to +\infty, \ \lambda_n^- \to -\infty \ (n\to\infty)$. При этом λ_n^+ не меньше соответствующих положительных собственных значений вспомогательной спектральной задачи

$$Lu = \nu u \quad (\textit{в } F^*); \tag{58}$$

$$\partial u = 0 \quad (\textit{в } G_-). \tag{59}$$

Аналогично λ_n^- не больше соответствующих отрицательных собственных значений вспомогательной спектральной задачи

$$Lu = 0 \quad (\textit{в } F^*); \tag{60}$$

$$\partial u = -\omega V\gamma u \quad (\textit{в } G_-). \tag{61}$$

Также справедливы оценки:

$$\lambda_n^+ \geq \frac{1}{\lambda_n(A^{-1})} = \lambda_n(A) = \max_{\{h_k\}_{k=1}^{n-1}} \min_{(u,h_k)_F=0} \frac{\|u\|_F^2}{\|u\|_E^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}; \tag{62}$$

$$\lambda_n^- \leq -\frac{1}{\lambda_n(KV\gamma)} = -\max_{\{h_k\}_{k=1}^{n-1}} \min_{(u,h_k)_F=0} \frac{\|u\|_F^2}{\langle \gamma u, V\gamma u\rangle_G}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{63}$$

Доказательство. Знаку “плюс” перед λ в уравнении (25) соответствует оператор C_+. По теореме Гильберта-Шмидта из теоремы 5.1 следует, что спектр оператора C_+ является вещественным и дискретным. В силу положительности C_+ он состоит из одной ветви положительных конечнократных собственных значений $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}: \ \mu_n \to 0 \ (n \to \infty)$. Следовательно, спектр задачи (24) – (25) в этом случае состоит из одной ветви положительных конечнократных собственных значений $\lambda_n = 1/\mu_n \to +\infty \ (n \to \infty)$.

Знаку “минус” перед λ в уравнении (25) соответствует оператор C_-. В силу леммы 5.1 и теоремы Гильберта-Шмидта спектр C_- состоит из ветви $\{\mu_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$ положительных и ветви $\{\mu_n^-\}_{n\in\mathbb{N}}$ отрицательных конечнократных собственных значений с предельной точкой в нуле. Следовательно, спектр задачи (24) – (25) состоит из ветви положительных и ветви отрицательных конечнократных собственных значений: $\lambda_n^+ = 1/\mu_n^+ \to +\infty, \ \lambda_n^- = 1/\mu_n^+ \to -\infty \ (n \to \infty)$.

Так как $C_- = A^{-1} + (-KV\gamma)$, где $A^{-1} > 0$, $-KV\gamma \leq 0$, то согласно теореме Вейля-Куранта (см. [17], с. 257) положительные собственные значения оператора C_- не превосходят соответствующих положительных собственных значений оператора A^{-1}, а отрицательные собственные значения оператора C_- не меньше соответствующих отрицательных собственных значений оператора $-KV\gamma$. Поэтому

$$\lambda_n^+ = \frac{1}{\mu_n^+} \geq \frac{1}{\lambda_n(A^{-1})} \to +\infty \qquad (n \to \infty); \tag{64}$$

$$\lambda_n^- = \frac{1}{\mu_n^-} \leq \frac{1}{\lambda_n(-KV\gamma)} = -\frac{1}{\lambda_n(KV\gamma)} \to -\infty \quad (n \to \infty). \tag{65}$$

Очевидно, что $1/\lambda_n(A^{-1}) = \lambda_n(A)$. Согласно теореме 4.1 (формула (34)) задачу (58) – (59) можно записать в форме $u = A^{-1}(\nu u)$.

Отсюда

$$Au = \nu u, \quad u \in F. \tag{66}$$

Следовательно собственные значения задачи (58) – (59) являются собственными значениями оператора A. Отсюда по формуле (64) следует, что λ_n^+ не меньше соответствующих положительных собственных значений задачи (58) – (59).

Согласно той же теореме 4.1 задачу (60) – (61) можно записать в форме $u = (-\omega)KV\gamma u$. Отсюда следует, что $\omega_n = -\frac{1}{\lambda_n}(KV\gamma)$. Поэтому из формулы (65) следует, что λ_n^- не больше соответствующих отрицательных собственных значений задачи (60) – (61).

Окончательно согласно лемме 5.2 имеем:

$$\frac{1}{\lambda_n(A^{-1})} = \max_{\{h_k\}_{k=1}^{n-1}} \min_{(u,h_k)_F=0} \frac{(u,u)_F}{(A^{-1}u,u)_F} = \max_{\{h_k\}_{k=1}^{n-1}} \min_{(u,h_k)_F=0} \frac{(u,u)_F}{(u,u)_E}; \tag{67}$$

$$\frac{1}{\lambda_n(KV\gamma)} = \max_{\{h_k\}_{k=1}^{n-1}} \min_{(u,h_k)_F=0} \frac{(u,u)_F}{(KV\gamma u,u)_F} = \max_{\{h_k\}_{k=1}^{n-1}} \min_{(u,h_k)_F=0} \frac{\|u\|_F^2}{\langle \gamma u, V\gamma u\rangle_G}. \tag{68}$$

$\square$

Теорема 5.3. (Основная теорема о базисности). *Пусть* $\overline{N} = E$, $F \subset\!\!\to\!\subset\!\!\to E$ *и* $G_+ \subset\!\!\to\!\subset\!\!\to G$ *либо* $V \in \mathfrak{S}_\infty(G_+;G_-)$. *Тогда абстрактная спектральная задача Стефана* (24) – (25) *(задача* (46)*) имеет собственный ортонормированный базис в пространстве* F*, состоящий из системы собственных элементов* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *соответствующего оператора* $C_\pm$*. При этом выполняются следующие формулы ортогональности:*

$$(u_p,u_q)_F = \lambda_p\left[(u_p,u_q)_E \pm \langle \gamma u_p, V\gamma u_q\rangle_G\right] = \delta_{pq}. \tag{69}$$

Доказательство. Из предыдущих построений следует, что собственные элементы абстрактной спектральной задачи Стефана являются собственными элементами соответствующего оператора $C_\pm$, которые согласно теореме Гильберта-Шмидта образуют собственный ортонормированный базис. Очевидно, имеем следующие формулы ортогональности

$$\begin{aligned}\delta_{pq} = (u_p, u_q)_F = \lambda_p (C_\pm u_p, u_q)_F = \\ = \lambda_p \left[(A^{-1} u_p, u_q)_F \pm (KV\gamma u_p, u_q)_F \right] = \\ = \lambda_p \left[(u_p, u_q)_E \pm \langle \gamma u_p, V\gamma u_q \rangle_G \right].\end{aligned} \quad (70)$$

□

6. Приложения.

Применим полученные абстрактные результаты к спектральной задаче Стефана с условием Гиббса-Томсона (17) – (19).

Можно проверить, что порождающим оператором гильбертовой пары $(\mathcal{H}^1_{0,S}(\Omega); L_2(\Omega))$ является самосопряжённое расширение A оператора $\hat{A}$ спектральной задачи (75) – (76), сформулированной ниже:

$$\hat{A}u := -\Delta u, \quad \mathcal{D}(\hat{A}) := \{u \in C^2(\overline{\Omega}) : \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \; u|_S = 0\}. \quad (71)$$

Это следует из первой формулы Грина:

$$-\int_\Omega (\Delta u) v d\Omega = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS, \quad (72)$$

которая для элементов $u \in \mathcal{D}(\hat{A})$ превращается в тождество

$$(Au, v)_{L_2(\Omega)} = -\int_\Omega (\Delta u) v d\Omega = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\Omega = (u, v)_{\mathcal{H}^1_{0,S}(\Omega)}. \quad (73)$$

Выше было сказано, что $\mathcal{H}^1_{0,S}(\Omega) = F$ компактно вложено в $L_2(\Omega) = E$, $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma) = \mathcal{R}(\gamma) = G_+$ компактно вложено в $L_2(\Gamma) = G$ (здесь $\gamma u := u|_\Gamma$), а $\mathcal{H}^1_0(\Omega) = N$ плотно в $L_2(\Omega) = E$, поэтому на основании теорем 5.2 и 5.3 получаем следующее утверждение.

Теорема 6.1. (О свойствах решений спектральной задачи Стефана с условием Гиббса-Томсона) *Задача* (17) – (19)

имеет собственный ортонормированный базис в пространстве $F = \mathcal{H}^1_{0,S}(\Omega)$. *При этом выполняется тождество:*

$$(u_p, u_q)_{\mathcal{H}^1_{0,S}(\Omega)} := \int_\Omega \nabla u_p \cdot \nabla u_q d\Omega =$$
$$= \lambda_p \left[\int_\Omega u_p u_q d\Omega - \int_\Gamma B^{-1} u_p u_q d\Gamma \right] = \delta_{pq}. \quad (74)$$

Спектр задачи вещественный, дискретный, состоит из ветви отрицательных и из ветви положительных конечнократных собственных значений с предельными точками $\lambda = \pm\infty$. *При этом положительные собственные значения* $\lambda_n^+ \geq \nu_n$, *где* ν_n *— расположенные в порядке возрастания собственные значения вспомогательной спектральной задачи для уравнения Лапласа:*

$$-\Delta u(x) = \nu u(x), \quad x \in \Omega; \quad (75)$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0, \quad x \in \Gamma; \quad (76)$$
$$u(x) = 0, \quad x \in S, \quad (77)$$

а отрицательные собственные значения $\lambda_n^- \leq -\omega_n$, *где* ω_n *— расположенные в порядке возрастания собственные значения вспомогательной задачи типа Стеклова:*

$$-\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega; \quad (78)$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \omega B^{-1} u(x), \quad x \in \Gamma; \quad (79)$$
$$u(x) = 0, \quad x \in S. \quad (80)$$

Замечание 6.1. *Для спектральной задачи* (17) – (19) *в цилиндрической области* $\Omega = \Gamma \times (-h; 0)$, $\Gamma \in \mathbb{R}^{m-1}$, *можно осуществить разделение переменных. Для оператора* B, *являющегося самосопряжённым расширением оператора* (15), *в этом случае можно получить, что спектр состоит из ветви* $\{\lambda_{kp}^+\}_{k,p\in\mathbb{N}}$ *положительных и ветви* $\{\lambda_k^-\}_{k\in\mathbb{N}}$ *отрицательных собственных* *значений:*

$$\lambda_{kp}^{+}=\eta_k+\left(\frac{p\pi}{h}-\delta_{kp}\right)^2\to+\infty \qquad (p,k\to\infty); \quad (81)$$

$$\lambda_{k}^{-}=\eta_k-\left(\frac{\eta_k+\sqrt{\eta_k^2+4\eta_k}}{2}\right)^2\approx\eta_k-\eta_k^2\to-\infty \quad (k\to\infty). \quad (82)$$

Здесь $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}:\ \ \eta_k\to+\infty\ (k\to\infty)$ — *множество положительных собственных значений спектральной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области* Γ, $\delta_{kp}\to0\ (p\to\infty)$.

В качестве другого приложения абстрактной спектральной задачи (24) – (25) рассмотрим *спектральную задачу для равномерно-эллиптического формально-самосопряжённого дифференциального оператора*:

$$Lu:=-\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+c(x)u=\lambda u,\quad x\in\Omega; \qquad (83)$$

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}:=\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(\vec{n},x_j)=(\pm\lambda)Vu,\qquad x\in\partial\Omega. \qquad (84)$$

Будем предполагать, что в этой задаче $c(x)>0$; $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)\in C^1(\overline{\Omega})$, где

$$\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq c_0\sum_{i,j=1}^{m}|\xi_i|^2,\quad c_0>0,\ \xi=(\xi_1,\dots,\xi_m)\in\mathbb{R}^m. \quad (85)$$

Можно показать, что эта задача (83) – (84) является частным случаем задачи (24) – (25), когда $E=L_2(\Omega)$, $G=L_2(\partial\Omega)$, $\gamma u=u|_{\partial\Omega}$, F — энергетическое пространство оператора

$$Au:=Lu,\quad \mathcal{D}(A):=\{u\in L_2(\Omega):\ Lu\in L_2(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega}=0\}, \quad (86)$$

$$F=\mathcal{H}_A=:\tilde{\mathcal{H}}^1(\Omega),$$

$$||u||_F^2=||u||_A^2:=\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}+c(x)|u|^2\right)d\Omega. \quad (87)$$

В силу условия (85) и $c(x) > 0$ норма пространства $\tilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$ эквивалентна стандартной норме пространства $\mathcal{H}^1(\Omega)$. Поэтому, согласно теоремам вложения С. Л. Соболева $\tilde{\mathcal{H}}^1(\Omega) = F$ компактно вложено в $L_2(\Omega) = E$, $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma) = \mathcal{R}(\gamma) = G_+$ компактно вложено в $L_2(\Gamma) = G$ (здесь $\gamma u := u|_{\partial\Omega}$). Так как, кроме того $\mathcal{H}_0^1(\Omega) = N$ плотно в $L_2(\Omega) = E$, то для задачи (83) – (84) выполняются все условия теорем 5.2 и 5.3. Следовательно, задача имеет собственный ортонормированный базис, а ее спектр состоит из вещественных дискретных собственных значений с предельной точкой на бесконечности.

К абстрактной спектральной задаче (24) – (25) также сводятся модельные спектральные задачи для системы сильно эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка, спектральные задачи для уравнений Ламе линейной теории упругости, уравнений Навье-Стокса линейной гидродинамики.

В абстракной форме можно также рассматривать различные виды спектральных задач сопряжения для многокомпонентных областей с различными видами линеаризованных условий на границах. Исследование таких проблем будет являться предметом дальнейших рассмотрений.

Автор благодарит проф. Копачевского Н. Д. за постановку задачи и руководство работой.

1. *Мейрманов А.М.* Задача Стефана. – Новосибирск: Наука, 1986.
2. *Радкевич Е.В.*Поправка Гиббса-Томсона и существование классического решения модифицированной задачи Стефана – //Доклады АН СССР. – Т. 315, № 6. – 1990. – С. 1311–1315.
3. *Luckhaus S.* The Spectral problem with Hibbs-Thomson law. – Sezione di Analisi Matematica e Probabilitita, Universita di Pisa, 2.75 (591), 1991.
4. *Базалий Б.В., Дегтярёв С.П.* О задаче Стефана с кинетическим и классическим условием на свободной границе //УМЖ. – Т. 44, № 2. – 1992. – С. 155-166.
5. *Радкевич Е.В.* Об условиях существования классического решения модифицированной задачи Стефана (закон Гиббса–Томсона) – // Матем. сб. – Т. 183, № 2. – 1992. – С. 77–101.
6. *Odnoff J.* Operators generated by differential problem with eigenvalue parameter in equation and boundary condition. – Lund, 1959.
7. *Ercolano J., Schechter M.* Spectral theory for operators generated by elliptic boundary problems with eigenvalue parameter in boundary conditions. – I. Comm. Pure Appl. Math. 18, 1965. – p. 83-105.
8. *Барковский В. В.* Разложение по собственным функциям самосопряжён-

ных операторов, соответствующих общим эллиптическим задачам с собственным значением в граничных условиях //УМЖ. – Т. 19, № 1. – 1967. С. 9-24.

9. *Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В.* Методы определения присоеденённых масс жидкости в подвижных областях. – К.: Наукова думка, 1969. – С. 216-224.
10. *Войтицкий В.И.* “Спектральная задача Стефана с условиями Гиббса-Томсона” // Таврическая научная конференция студентов и молодых специалистов по информатике и математике, 27-28 апреля 2006, Симферополь. – С. 16-19.
11. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложениях к задаче Стокса // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). – №2. – 2004. – С. 52-80.
12. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г.* Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи //Украинский матем. вестник. – Т. 1, № 1. – 2004. – С. 69-97.
13. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
14. *Обэн Ж.-П.* Приближённое решение эллиптических краевых задач. – М.: Мир, 1977. – 384 с.
15. *Showalter R.*Hilbert space methods for partial differential equations. – Electronic journal of differential equations. 1994. – 214 pp.
16. *Войтицкий В.И.*Абстрактная спектральная задача Стефана //Учёные записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. Серия “Математика. Механика. Информатика и Кибернетика”. – Т. 19(58).2 (2006). – С. 20-28.
17. *Рисс Ф., Надь Б.-С. Лекции по функциональному анализу.* – М.: Мир, 1979. – 587 с.

ул. Дмитрия Ульянова 9, кв. 2,
95013, г. Симферополь, Украина
vivoyt86@rambler.ru

Получено 20.03.07