



УДК 517.518:519.213

А.И. Красильников, канд. физ.-мат. наук
Ин-т технической теплофизики НАН Украины
(Украина, 03057, Киев, ул. Желябова, 2а,
тел. (044) 4532857, e-mail: tangorov@voliacable.com),

В.С. Берегун, канд. техн. наук
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический ин-т»
(Украина, 03056, Киев, ул. Политехническая, 16, корп. 12,
тел. (044) 4549072, e-mail: viktorberegun@i.ua)

Использование методов обобщенного суммирования при аппроксимации плотности вероятности

Исследована возможность применения методов обобщенного суммирования при аппроксимации плотности вероятности с помощью ортогональных представлений. Приведены численные результаты исследования точности аппроксимации для типовых распределений случайных величин.

Досліджено можливість застосування методів узагальненого додавання при апроксимації щільності імовірності за допомогою ортогональних подань. Наведено числові результати дослідження точності апроксимації для типових розподілів випадкових величин.

Ключевые слова: плотность вероятности, аппроксимация, ортогональный полином, ортогональное представление, обобщенное суммирование.

Негауссовские модели случайных процессов и случайных величин занимают значительное место при решении задач радиотехники [1], метрологии [2], функциональных преобразований случайных процессов [3], теории оценок случайных величин [4] и др. При исследованиях таких моделей наиболее важной вероятностной характеристикой является плотность вероятности $p(x)$. В большинстве случаев теоретическая плотность вероятности неизвестна, поэтому для ее определения применяют приближенные методы, среди которых следует выделить ортогональные представления.

Ортогональное представление — один из наиболее известных непараметрических методов аппроксимации плотности вероятности [3, 5—7]. В общем виде ортогональное представление является разложением плотности вероятности в ряд следующего вида [8]:

$$p(x) = \rho(x) \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Phi_k(x), \quad (1)$$

© А.И. Красильников, В.С. Берегун, 2015

где c_k — коэффициенты разложения; $\varphi_k(x)$ — система ортогональных функций; $\rho(x)$ — весовая функция. Обычно в качестве функций $\varphi_k(x)$ используются классические ортогональные полиномы [9] Эрмита, Лагерра, Якоби (Лежандра, Чебышева первого и второго рода), которые имеют вид $\varphi_k(x) = \sum_{j=0}^k h_{kj} x^j$, где h_{kj} — действительные числа, однозначно определяемые весовой функцией $\rho(x)$. В этом случае для определения коэффициента c_k не требуется знать плотность вероятности $p(x)$, достаточно знать начальный момент α_j :

$$c_k = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \varphi_k(x) dx = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \sum_{j=0}^k h_{kj} \alpha_j,$$

где $\|\varphi_k\|$ — норма функций $\varphi_k(x)$. На практике в формуле (1) вместо бесконечной суммы используется частная сумма с конечным числом составляющих до n -го порядка:

$$S_n(x) = \rho(x) \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x). \quad (2)$$

В работах [5, 10] указано, что при использовании (2) для определения плотности вероятности суммы случайных величин значения коэффициентов разложения имеют различную весовую зависимость от числа таких случайных величин. В работе [6] указано, что частные суммы могут вести себя нерегулярно, а именно: увеличение числа составляющих в частной сумме не всегда приводит к повышению точности аппроксимации плотности вероятности.

Для улучшения сходимости и точности аппроксимации частной суммой (2) предлагается использовать известные методы обобщенного суммирования [11—13].

Постановка задачи. Известно [11], что частные суммы тригонометрического ряда Фурье не всегда сходятся к непрерывной функции $f(x)$, $x \in [a, b]$, для которой этот ряд построен. Однако для любой такой функции можно найти алгебраический полином $P(x)$, равномерно приближающийся к этой функции: $\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Это является следствием

первой и второй теорем Вейерштрасса. Представление функции алгебраическим полиномом относится к методам обобщенного суммирования.

Алгебраический полином $P(x)$ определяется [13] как свертка функции $f(x)$ с некоторым полиномом $K_n(x)$ степени n , который называется полиномиальным ядром:

$$P(x) = \int_a^b f(t) K_n(x-t) dt.$$

В зависимости от вида полинома $K_n(x)$ могут быть получены различные виды алгебраического полинома:

1. Ядро Дирихле n -го порядка. Алгебраический полином $P(x)$ является частной суммой ряда Фурье (в данном случае $S_n(x)$).

2. Ядро Фейера n -го порядка есть среднее арифметическое первых n ядер Дирихле. Тогда алгебраический полином является суммой Фейера и средним арифметическим n первых частных сумм:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x).$$

Этот метод суммирования называется методом суммирования Чезаро—Фейера.

3. Ядро Валле-Пуссена есть среднее арифметическое ядер Дирихле от m до $n-1$. Тогда алгебраический полином является суммой Валле-Пуссена и средним арифметическим частных сумм от $S_m(x)$ до $S_{n-1}(x)$:

$$V_{m,n}(x) = \frac{1}{n-m} \sum_{k=m}^{n-1} S_k(x).$$

Существует и другая форма суммы Валле-Пуссена, используемая далее, которая представляет собой среднее арифметическое частных сумм начиная с $S_n(x)$ и заканчивая $S_{2n-1}(x)$:

$$V_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} S_k(x).$$

Воспользуемся методами обобщенного суммирования для ортогональных представлений плотности вероятности $p(x)$ (как функций $f(x)$) и сравним полученные результаты с результатами использования частных сумм.

Ортогональные представления. Опишем в общем виде разновидности частных сумм (2) и представим выражения ортогональных полиномов $\varphi_k(x)$ с весовыми функциями $\rho(x)$ без указания значений коэффициентов разложения и необходимых линейных функциональных преобразований:

1. Ряды Эрмита —

$$S_{Hn}(x) = \rho_H(x) \sum_{k=0}^n c_{Hk} H_k(x), \quad \rho_H(x) = e^{-x^2/2},$$

где $H_k(x)$ — полиномы Эрмита,

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2} \frac{d^k}{dx^k} (e^{-x^2/2}), \quad x \in (-\infty; \infty), \quad \|H_k\|^2 = \sqrt{2\pi} k!.$$

2. Ряды Лагерра —

$$S_{Ln}(x) = \rho_L(x) \sum_{k=0}^n c_{Lk} L_k^{(\lambda)}(x), \quad \rho_L(x) = e^{-x} x^\lambda.$$

Здесь $L_k^{(\lambda)}(x)$ — полиномы Лагерра с параметром λ ,

$$L_k^{(\lambda)}(x) = e^x \frac{x^{-\lambda}}{k!} \frac{d^k}{dx^k} (e^{-x} x^{k+\lambda}), \quad x \in (0; \infty), \quad \|L_k^{(\lambda)}\|^2 = \frac{\Gamma(k+\lambda+1)}{k!},$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

3. Ряды Лежандра —

$$S_{Pn}(x) = \sum_{k=0}^n c_{Pk} P_k(x),$$

где $P_k(x)$ — полиномы Лежандра,

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k, \quad x \in [0; 1], \quad \|P_k\|^2 = \frac{2}{2k+1}.$$

4. Ряды Чебышева первого рода —

$$S_{Tn}(x) = \rho_T(x) \sum_{k=0}^n c_{Tk} T_k(x), \quad \rho_T(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

где $T_k(x)$ — полиномы Чебышева первого рода,

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x), \quad x \in [0; 1], \quad \|T_k\|^2 = \begin{cases} \pi/2, & k > 0, \\ \pi, & k = 0. \end{cases}$$

5. Ряды Чебышева второго рода —

$$S_{Un}(x) = \rho_U(x) \sum_{k=0}^n c_{Uk} U_k(x), \quad \rho_U(x) = \sqrt{1-x^2},$$

где $U_k(x)$ — полиномы Чебышева второго рода,

$$U_k(x) = \frac{\sin[(k+1) \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [0; 1], \quad \|U_k\|^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Исследование точности аппроксимации плотности вероятности.

Используем приведенные выше ортогональные ряды и соответствующие им обобщенные суммы для аппроксимации типовых плотностей вероятности [14]. Для определения точности аппроксимации плотности вероятности ортогональными представлениями во всех случаях найдем две ошибки: интегральную — $r = \frac{1}{2} \int_X |p(x) - \tilde{p}(x)| dx$ и максимальную — $\varepsilon = \max_X |p(x) - \tilde{p}(x)|$, где $p(x)$ — теоретическая плотность вероятности; $\tilde{p}(x)$ — соответствующая аппроксимация; X — область определения плотности вероятности.

В табл. 1—6 значения над чертой соответствуют интегральной ошибке r , а под чертой — максимальной ошибке ε , полужирным шрифтом выделены наименьшие значения ошибок.

Ряды Эрмита. Для получения количественных показателей точности аппроксимации плотностей вероятности ортогональными представлениями рассмотрим использование рядов Эрмита для распределения Стьюдента, определенного, как и полиномы Эрмита, на всей числовой оси, и гамма-распределения, определенного на положительной полуоси. Будем использовать частные суммы $S_{Hn}(x)$.

Распределение Стьюдента имеет плотность вероятности

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad x \in (-\infty; \infty),$$

где ν — параметр распределения (число степеней свободы). Поскольку плотность вероятности является симметричной, все коэффициенты разложения c_{Hk} нечетного порядка равны нулю, откуда следует, что $S_{H5}(x) = S_{H4}(x)$, $S_{H7}(x) = S_{H6}(x)$ и т.д. Частная сумма $S_{H0}(x)$ является плотностью вероятности гауссовского распределения с математическим ожиданием и дис-

Таблица 1

ν	S_{H0}	S_{H4}	S_{H6}	F_{H5}	F_{H7}	V_{H3}	V_{H4}
7	<u>0,0578</u> 0,0478	<u>0,0605</u> 0,0365	<u>0,7200</u> 0,5255	<u>0,0350</u> 0,0310	<u>0,1151</u> 0,0920	0,0223 0,0107	<u>0,3373</u> 0,2445
10	<u>0,0386</u> 0,0323	<u>0,0206</u> 0,0123	<u>0,0803</u> 0,0620	<u>0,0270</u> 0,0234	<u>0,0254</u> 0,0238	0,0042 0,0025	<u>0,0337</u> 0,0248
15	<u>0,0248</u> 0,0210	<u>0,0074</u> 0,0044	<u>0,0178</u> 0,0144	<u>0,0185</u> 0,0159	<u>0,0139</u> 0,0128	0,0042 0,0041	<u>0,0072</u> 0,0050
20	<u>0,0183</u> 0,0155	<u>0,0038</u> 0,0022	<u>0,0075</u> 0,0062	<u>0,0140</u> 0,0120	<u>0,0101</u> 0,0091	<u>0,0039</u> 0,0037	0,0030 0,0020

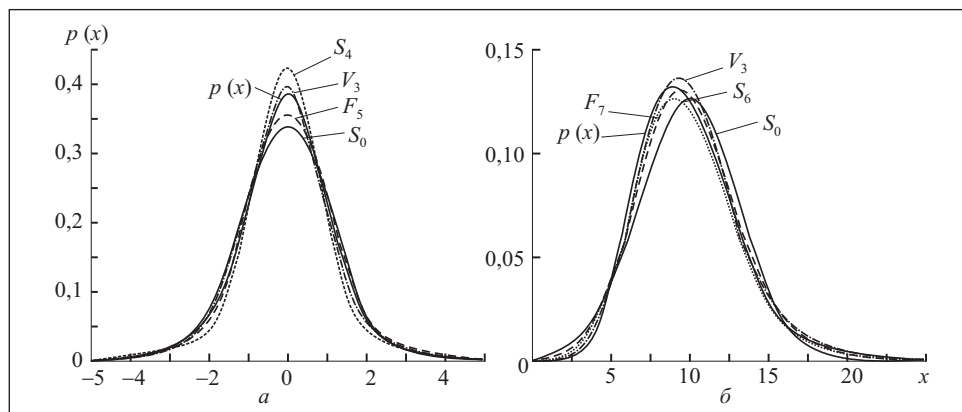


Рис. 1

персией, которые совпадают с математическим ожиданием и дисперсией исследуемого распределения.

В табл. 1 приведены значения ошибок аппроксимации плотности вероятности распределения Стьюдента для различных значений ν . На рис. 1, а, представлены графики наилучших аппроксимаций каждой суммы при $\nu = 7$.

Гамма-распределение имеет плотность вероятности

$$p(x) = \frac{\Psi^\delta}{\Gamma(\delta)} x^{\delta-1} e^{-\Psi x}, \quad x > 0,$$

где $\delta > 0$ — параметр формы; $\Psi > 0$ — параметр масштаба. На рис. 1, б, представлены графики наилучших аппроксимаций каждой суммы при $\Psi = 1, \delta = 10$.

В табл. 2 приведены значения ошибок аппроксимации плотности вероятности гамма-распределения при $\Psi = 1$ и различных значениях δ . При

Таблица 2

δ	S_{H0}	S_{H4}	S_{H5}	S_{H6}	F_{H5}	F_{H6}	F_{H7}	V_{H3}
3	$\frac{0,1379}{0,0928}$	$\frac{0,1175}{0,0639}$	$\frac{0,1626}{0,0899}$	$\frac{0,1797}{0,0814}$	0,0880 0,0719	$\frac{0,0926}{0,0749}$	$\frac{0,0935}{0,0673}$	$\frac{0,0994}{\mathbf{0,0592}}$
5	$\frac{0,1122}{0,0491}$	$\frac{0,0734}{0,0297}$	$\frac{0,0940}{0,0355}$	$\frac{0,0803}{0,0263}$	$\frac{0,0709}{0,0358}$	$\frac{0,0684}{0,0357}$	$\frac{0,0658}{0,0320}$	$\frac{\mathbf{0,0616}}{\mathbf{0,0239}}$
10	$\frac{0,0813}{0,0221}$	$\frac{0,0375}{0,0105}$	$\frac{0,0435}{0,0114}$	$\frac{\mathbf{0,0276}}{\mathbf{0,0060}}$	$\frac{0,0500}{0,0152}$	$\frac{0,0449}{0,0143}$	$\frac{0,0408}{0,0127}$	$\frac{0,0305}{0,0075}$
20	$\frac{0,0570}{0,0104}$	$\frac{0,0190}{0,0037}$	$\frac{0,0207}{0,0039}$	$\frac{\mathbf{0,0094}}{\mathbf{0,0014}}$	$\frac{0,0346}{0,0068}$	$\frac{0,0300}{0,0062}$	$\frac{0,0264}{0,0054}$	$\frac{0,0152}{0,0026}$

изменении значения ψ интегральная ошибка не изменяется, изменяется лишь масштаб плотности вероятности и ее аппроксимаций. Полученные результаты использования рядов Эрмита позволяют сделать следующие выводы:

1. При увеличении порядка сумм ошибки становятся нерегулярными.
2. При увеличении значений параметра ν распределения Стьюдента и параметра δ гамма-распределения их кумулянтные коэффициенты стремятся к нулю, интегральная и максимальная ошибки уменьшаются, поэтому ряды Эрмита можно считать наиболее пригодными для таких распределений.

3. Использование для аппроксимации плотности вероятности обоих распределений частных сумм, сумм Фейера и Валле-Пуссена обеспечивает лучшее приближение к теоретической плотности вероятности по сравнению с аппроксимацией гауссовским распределением (частная сумма $S_{H0}(x)$). Наилучшие результаты для распределения Стьюдента обеспечивают суммы Валле-Пуссена, для гамма-распределения – обобщенные суммы при $\delta = 3$ и $\delta = 5$, частная сумма $S_{H6}(x)$ при $\delta = 10$ и $\delta = 20$.

Ряды Лагерра используем для распределений, плотности вероятности которых являются экспоненциально-степенными функциями аргумента и определены, как и полиномы Лагерра, на положительной полуоси $(0; \infty)$ — распределения Рэлея и Вейбулла. Будем использовать частные суммы $S_{Ln}(x)$.

Распределение Рэлея имеет плотность вероятности $p(x) = \frac{x}{d^2} e^{-x^2/2d^2}$,

$x > 0$, где $d > 0$ — параметр масштаба. В табл. 3 приведены значения ошибок аппроксимации плотности вероятности распределения Рэлея при $d = 1$, а на

Таблица 3

d	S_{L4}	S_{L5}	S_{L6}	F_{L5}	F_{L6}	F_{L7}	V_{L3}
1	<u>0,0340</u> 0,0682	<u>0,0298</u> 0,0649	<u>0,0295</u> 0,0628	<u>0,0467</u> 0,0849	<u>0,0379</u> 0,0776	<u>0,0312</u> 0,0714	0,0286 0,0631
$c = 1$							
2	<u>0,0340</u> 0,0964	<u>0,0298</u> 0,0918	<u>0,0295</u> 0,0888	<u>0,0467</u> 0,1201	<u>0,0379</u> 0,1097	<u>0,0312</u> 0,1010	0,0286 0,0892
3	<u>0,0338</u> 0,1132	<u>0,0376</u> 0,1218	<u>0,0426</u> 0,1329	<u>0,0554</u> 0,1457	<u>0,0431</u> 0,1039	<u>0,0355</u> 0,0712	0,0246 0,0964
5	<u>0,0387</u> 0,1955	<u>0,0597</u> 0,2602	<u>0,0706</u> 0,2856	<u>0,0618</u> 0,2180	<u>0,0488</u> 0,1841	<u>0,0439</u> 0,1811	0,0290 0,1164
10	<u>0,0609</u> 0,5018	<u>0,1006</u> 0,7832	<u>0,1229</u> 0,8784	<u>0,0681</u> 0,5484	<u>0,0586</u> 0,5216	<u>0,0614</u> 0,5495	0,0505 0,3226

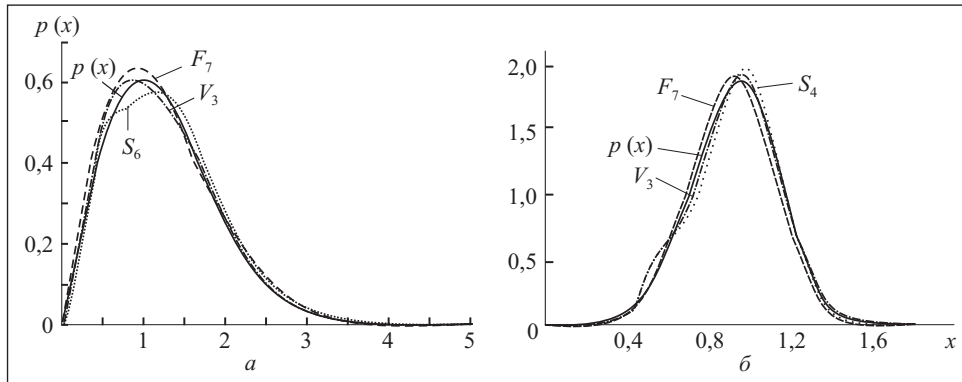


Рис. 2

рис. 2, а, представлены графики наилучших приближений каждой суммы при $d=1$. При изменении параметра d интегральная ошибка не изменяется, лишь изменяется масштаб плотности вероятности и ее аппроксимаций.

Распределение Вейбулла имеет плотность вероятности $p(x) = cd x^{d-1} e^{-cx^d}$, $x > 0$, где c — параметр масштаба, d — параметр формы. На рис. 2, б, представлены графики наилучших приближений при $d=5$. При изменении параметра c интегральная ошибка не изменяется, лишь изменяется масштаб плотности вероятности и ее аппроксимаций. В табл. 3 приведены значения ошибок аппроксимации плотности вероятности распределения Вейбулла при $c=1$.

Полученные результаты использования представлений на основе полиномов Лагерра позволяют сделать следующие выводы:

1. Для распределений Рэлея и Вейбулла наименьшие значения интегральных ошибок обеспечивают суммы Валле-Пуссена. Наименьшие значения максимальных ошибок в случае распределения Рэлея обеспечивает частная сумма $S_{L6}(x)$, в случае распределения Вейбулла при $d=2$ — частная сумма $S_{L6}(x)$, для других значений d — обобщенные суммы.

2. Для распределения Рэлея увеличение порядка суммы во всех случаях приводит к уменьшению ошибок.

3. В рассмотренных случаях для распределения Вейбулла ошибки ведут себя нерегулярно, однако обычно они увеличиваются при увеличении параметра d , т.е. когда распределение становится более симметричным.

Ряды Якоби используем для ортогональных представлений плотности вероятности бета-распределения:

$$p(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad x \in [0; 1],$$

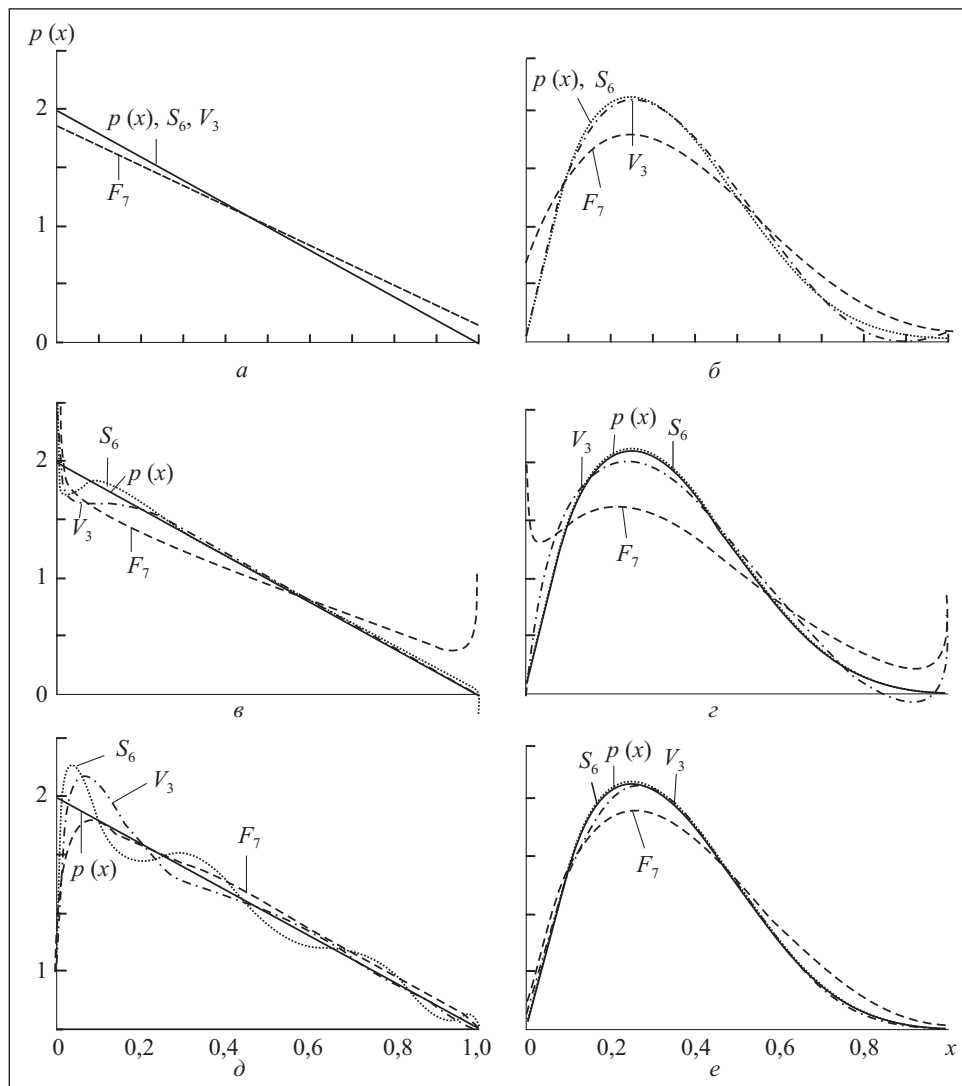


Рис. 3

где $a > 0, b > 0$ — параметры распределения. Бета-распределение так же, как и полиномы Якоби, определено на интервале $[0; 1]$. Будем использовать частные суммы $S_{Pn}(x), S_{Tn}(x)$ и $S_{Un}(x)$.

На рис. 3, а, представлены графики лучших аппроксимаций плотности вероятности бета-распределения с параметрами $a=1, b=2$, а на рис. 3, б, — с параметрами $a=2, b=4$ соответственно для каждой суммы рядов Лежандра. На рис. 3, в, г, приведены графики для рядов Чебышева первого рода, а на рис. 3, д, е, — графики для рядов Чебышева второго рода.

В табл. 4—6 приведены значения ошибок аппроксимации плотности вероятности бета-распределения при использовании соответственно рядов Лежандра, рядов Чебышева первого рода и второго рода для различных значений параметров a и b .

Полученные результаты представлений по полиномам Якоби позволяют сделать следующие выводы:

1. Для всех рядов Лежандра и Чебышева первого и второго рода увеличение порядка частных и обобщенных сумм всегда приводит к умень-

Таблица 4

a	b	S_{P4}	S_{P5}	S_{P6}	F_{P5}	F_{P6}	F_{P7}	V_{P3}
0,8	1	<u>0,0206</u> 10,7493	<u>0,0173</u> 10,6029	<u>0,0149</u> 10,4706	<u>0,0196</u> 11,1593	<u>0,0158</u> 11,0666	0,0132 10,9815	<u>0,0133</u> 10,7557
1	2	<u>0</u> 0	<u>0</u> 0	<u>0</u> 0	<u>0,0500</u> 0,2000	<u>0,0417</u> 0,1667	<u>0,0357</u> 0,1429	<u>0</u> 0
2	2	<u>0</u> 0	<u>0</u> 0	<u>0</u> 0	<u>0,0770</u> 0,4000	<u>0,0641</u> 0,3333	<u>0,0550</u> 0,2857	<u>0</u> 0
2	4	<u>0</u> 0	<u>0</u> 0	<u>0</u> 0	<u>0,1267</u> 0,9143	<u>0,1056</u> 0,7619	<u>0,0905</u> 0,6531	<u>0,0136</u> 0,0952

Таблица 5

a	b	S_{T4}	S_{T5}	S_{T6}	F_{T5}	F_{T6}	F_{T7}	V_{T3}
0,8	1	<u>0,0239</u> 45,2074	<u>0,0237</u> 53,6982	0,0151 32,8065	<u>0,0734</u> 154,7662	<u>0,0609</u> 137,9215	<u>0,0521</u> 122,8509	<u>0,0227</u> 62,7516
1	2	<u>0,0342</u> 44,9898	<u>0,0220</u> 35,4080	0,0170 29,6602	<u>0,1253</u> 93,2964	<u>0,1049</u> 83,6483	<u>0,0896</u> 75,9357	<u>0,0241</u> 46,2681
2	2	<u>0,0061</u> 9,0933	<u>0,0061</u> 9,0933	0,0017 3,0307	<u>0,1593</u> 100,0418	<u>0,1329</u> 81,8526	<u>0,1139</u> 69,7264	<u>0,0186</u> 27,2818
2	4	<u>0,0522</u> 35,3663	<u>0,0198</u> 15,1566	0,0070 5,0727	<u>0,2087</u> 55,9318	<u>0,1741</u> 44,7484	<u>0,1494</u> 38,1238	<u>0,0374</u> 21,8936

Таблица 6

a	b	S_{U4}	S_{U5}	S_{U6}	F_{U5}	F_{U6}	F_{U7}	V_{U3}
0,8	1	<u>0,0902</u> 7,9586	<u>0,0891</u> 7,9513	<u>0,0762</u> 7,9370	<u>0,0654</u> 7,9775	<u>0,0543</u> 7,9732	0,0451 7,9680	<u>0,0594</u> 7,9605
1	2	<u>0,0683</u> 1,9565	<u>0,0578</u> 1,9482	<u>0,0508</u> 1,9402	<u>0,0539</u> 1,9735	<u>0,0431</u> 1,9693	0,0381 1,9651	<u>0,0399</u> 1,9564
2	2	<u>0,0034</u> 0,0212	<u>0,0034</u> 0,0212	0,0015 0,0117	<u>0,0302</u> 0,1206	<u>0,0250</u> 0,1011	<u>0,0215</u> 0,0862	<u>0,0034</u> 0,0300
2	4	<u>0,0128</u> 0,0994	<u>0,0075</u> 0,0671	0,0046 0,0482	<u>0,0830</u> 0,3238	<u>0,0692</u> 0,2655	<u>0,0594</u> 0,2258	<u>0,0109</u> 0,1135

шению интегральной ошибки аппроксимации, т.е. к регулярности ошибок. Для максимальной ошибки исключение составляют ряды Чебышева первого рода при $a = 0,8$, $b = 1$.

2. При значениях параметров $a = 0,8$, $b = 1$ для рядов Лежандра и Чебышева второго рода и при $a = 1$, $b = 2$ для рядов Чебышева второго рода лучшее приближение (по интегральной ошибке) обеспечивают суммы Фейера, а в остальных случаях — частные суммы.

3. В случаях, когда значения ошибок равнялись нулю, ортогональное представление полностью определяло теоретическую плотность вероятности.

Выводы

Таким образом, использование обобщенных сумм Фейера и Валле-Пуссена в большинстве случаев обеспечивает лучшее приближение для плотностей вероятности, определенных на бесконечном или полубесконечном интервалах, а использование частных сумм обеспечивает лучшее приближение для плотностей вероятности, определенных на ограниченном интервале.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шелухин О.И. Негауссовские процессы в радиотехнике. — М. : Радио и связь, 1998. — 310 с.
2. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. — Л. : Энергоатомиздат, 1991. — 304 с.
3. Деч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов / Пер. с англ. Б.А. Смирнина. Под ред. Б.Р. Левина. — М. : Сов. радио, 1965. — 208 с.
4. Кунченко Ю.П. Полиномиальные оценки параметров близких к гауссовским случайных величин. Ч. I. Стохастические полиномы, их свойства и применение для нахождения оценок параметров. — Черкассы: ЧИТИ, 2001. — 133 с.
5. Крамер Г. Математические методы статистики / Пер. с англ. А.С. Мониной и А.А. Петрова. Под ред. А.Н. Колмогорова. — М. : Мир, 1975. — 648 с.
6. Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений / Пер. с англ. В.В. Сазонова, А.Н. Ширяева. Под ред. А.Н. Колмогорова. — М. : Наука, 1966. — 588 с.
7. Деврой Л., Дьерфи Л. Непараметрическое оценивание плотности. L_1 -подход / Пер. с англ. А.Б. Цыбакова. Под ред. М.Б. Малютова. — М. : Мир, 1988. — 408 с.
8. Красильников О.І., Березун В.С. Систематизація ортогональних подань щільності імовірності випадкових процесів // Електроніка та системи управління. — 2010. — № 3 (25). — С. 28—35.
9. Суетин П.К. Классические ортогональные полиномы. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 480 с.
10. Сенатов В.В. Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения. — М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 352 с.
11. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. — М. : Гос. изд-во тех.-теор. лит., 1949. — 690 с.

12. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х томах. Т. III. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 728 с.
13. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М. : Наука, 1977. — 512 с.
14. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям. — СПб. : Наука, 2001. — 295 с.

A.I. Krasil'nikov, V.S. Beregun

USING OF THE GENERALIZED SUMMATION METHODS AT APPROXIMATION OF PROBABILITY DENSITY FUNCTION

Possibility of application of the generalized summation methods at approximation of probability density function by means of orthogonal representations is investigated in the article. Numerical results of research of approximation accuracy for typical distributions of random variables are given.

К е у о р д s: probability density function, approximation, orthogonal polynomial, orthogonal representation, generalized summation.

REFERENCES

1. Shelukhin, O.I. (1998), *Negaussovskie protsessy v radiotekhnike* [Non-Gaussian Processes in Radio Engineering], Radio i sviaz, Moscow, Russia.
2. Novitskii, P.V. and Zograf, I.A. (1991), *Otsenka pogreshnosti rezultatov izmerenii* [Observational Errors Estimator], Energoatomizdat, St. Petersburg, Russia.
3. Dech, R. (1965), *Nelineinye preobrazovaniia sluchainykh protsessov* [Nonlinear Transformations of Random Processes], Translated by Smirenin, B.A., Sov. radio, Moscow, Russia.
4. Kunchenko, Yu.P. (2001), *Polynomialnye otsenki parametrov blizkikh k gaussovskim sluchainykh velichin. Ch.I. Stokhasticheskie polinomy, ikh svoistva i primeneniye dlia nakhozheniia otsenok parametrov* [Parameter Polynomial Estimators of Random Variables Close to Gaussian. Part I. Stochastic Polynomials, Their Properties and Application for Finding the Parameter Estimators], ChITI, Cherkassy, Ukraine.
5. Kramer, G. (1975), *Matematicheskie metody statistiki* [Mathematical Methods of Statistics], Translated by Monin, A.S. and Petrov, A.A., Mir, Moscow, Russia.
6. Kendall, M. and Stiuart, A. (1966), *Teoriia raspredelenii* [Distribution Theory], Translated by Sazonov, V.V. and Shiriaev, A.N., Nauka, Moscow, Russia.
7. Devroi, L. and Derfi, L. (1988), *Neparametricheskoe otsenivanie plotnosti. L₁-podkhod* [Nonparametric Density Estimation. The L₁ View], Translated by Tsybakov, A.B., Mir, Moscow, Russia.
8. Krasyl'nikov, O.I. and Beregun, V.S. (2010), "Ordering of Orthogonal Representations of Probability Density Functions of Stochastic Processes", *Elektronika ta systemy upravlinnia*, no. 3 (25), pp. 28-35.
9. Suetin, P.K. (2005), *Klassicheskie ortogonalnye polinomy* [Classical Orthogonal Polynomials], FIZMATLIT, Moscow, Russia.
10. Senatov, V.V. (2009), *Tsentralnaia predelnaia teorema: Tochnost approksimatsii i asimptoticheskie razlozheniia* [Central Limit Theorem: Approximation Accuracy and Asymptotic Decompositions], Knizhnyi dom "LIBROKOM", Moscow, Russia.

11. Natanson, I.P. (1949), *Konstruktivnaia teoriia funktsii* [Constructive Theory of Functions], Gos. izd-vo tekhn.-teor. lit., Moscow, Russia.
12. Fikhtengolts, G.M. (2003), *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniia: V 3-h tomakh. T. III* [Course of Differential and Integral Calculus: In 3 volumes. Vol. III], FIZMATLIT, Moscow, Russia.
13. Dziadyk, V.K. (1977), *Vvedenie v teoriu ravnomernogo priblizheniia funktsii polinomami* [Introduction in the Theory of Uniform Approach of Functions by Polynomials], Nauka, Moscow, Russia.
14. Vadzinskii, R.N. (2001), *Spravochnik po veroiatnostnym raspredeleniiam* [Directory on Probabilistic Distributions], Nauka, St. Petersburg, Russia.

Поступила 31.01.14;
после доработки 31.10.14

КРАСИЛЬНИКОВ Александр Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент, ст. науч. сотр. Ин-та технической теплофизики НАН Украины. В 1973 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — математические модели, вероятностные характеристики и методы статистической обработки флуктуационных сигналов в системах шумовой диагностики.

БЕРЕГУН Виктор Сергеевич, канд. техн. наук, доцент кафедры акустики и акустоэлектроники факультета электроники Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т», который окончил в 2004 г. Область научных исследований — вероятностные характеристики и методы обработки негауссовских сигналов и их функциональных преобразований в акустических информационных системах.

