УДК 517.11+519.92

Ю.Н. Минаев, д-р техн. наук
Национальный авиационный университет
(Украина, 03057, Киев, пр-т Космонавта Комарова, 1,
тел. (044) 2495454, e-mail: min14@ukr.net),
О.Ю. Филимонова, Ю.И. Минаева кандидаты техн. наук
Киевский национальный университет строительства и архитектуры
(Украина, 03037, Киев, Воздухофлотский пр-т, 31,
тел. (044) 2486427, 2425462, e-mail: filimonova @nm.ru, jumin @big-mir.net)

Влияние иерархической структуры гранул нечеткого множества на вычислительные процедуры нечеткой математики

Предложено рассматривать нечеткое множество (НМ) как объект, наделенный иерархической структурой, полученной с помощью методов иерархической кластеризации. Введено понятие структурной принадлежности, определяемое в зависимости от иерархической структуры универсального множества и учитывающее норму 2-адического числа, эквивалентного иерархической структуре. Предложено рассматривать структурированное НМ как объединение стандартного НМ с нормой 2-адического числа, полученного на основе бинарного дерева, являющегося результатом иерархической кластеризации НМ. Введен обобщенный показатель структурированности НМ—структурно дефадзифицированное число.

Запропоновано розглядати нечітку множину (НМ) як об'єкт, наділений ієрархічною структурою, отриманою за допомогою методів ієрархічної кластерізації. Введено поняття структурної належності, яке визначається в залежності від ієрархічної структури універсальної множини та враховує норму 2-адичного числа, еквівалентного ієрархічній структурі. Запропоновано розглядати структуровану НМ як об'єднання стандартної НМ з нормою 2-адичного числа, отриманого на основі бінарного дерева, яке є результатом ієрархічної кластерізації НМ. Введено узагальнений показник структурованості НМ—структурно дефадзифіковане число.

Ключевые слова: нечеткое множество, иерархическая кластеризация, p-адический анализ, структурная матрица, бинарное дерево.

Решение задач управления в условиях неопределенности в настоящее время сконцентрировано на возможностях теории нечетких множеств (ТНМ). Введение функции принадлежности (ФП), позволившей формализовать экспертное (субъективное) представление об объекте управления, создание и использование подмножества упорядоченных пар (ПУП) $\underbrace{\text{значение}/\text{ФП}}_{\bar{\bar{x}}} \to \{x/\mu^x\}$ дало возможность получить дополнительные (скрытые) знания и тем самым повысить эффективность принятия решения [1]. Нечеткое множество (НМ), несмотря на кажущуюся простоту, представляет собой сложный объект. Поэтому должны быть исследованы его структурные свойства и характеристики, ибо наличие структуры (иерархической) есть по определению признак сложного объекта [2].

Современное состояние исследований иерархической структуры НМ. Одной из первых работ о влиянии иерархической структуры (ИС) на НМ была работа [3], в которой ИС связана с ФП. В большинстве приложений параметрическая форма ФП считается известной, но в ситуациях, когда отсутствует предшествующая информация, техника, подобная кластеризации, может быть использована для изучения ФП и внутренней структуры данных. В работе [3] показано, что иерархическая кластеризация (ИК) может быть использована для предварительной обработки доступной информации и получения на основе первого приближения внутренней структуры данных. Это новое знание может быть использовано для последующей обработки данных посредством нечеткого алгоритма кластеризации.

При нечетком моделировании ИК позволяет провести анализ кластеров относительно представления множества данных (МД). Полученную информацию можно использовать в процессе кластеризации для того, чтобы получить нечеткие правила и функциональную форму НМ. Множество данных, имеющие ИС, обладают ультраметрическими свойствами [4] и, хотя ультраметрические свойства ИК хорошо изучены, в последнее время к ним вновь возник интерес в статистической механике, теории оптимизации, физике. В работе [4] показано, что разреженные высокоразмерные пространства имеют тенденцию быть ультраметрическими.

Ультраметричность определяется математически, но неформально ее можно описать как наличие естественной иерархической или встроенной структуры в данных или наблюдениях. Иерархический кластерный анализ (ИКА) порождает ультраметрическое множество соотношений на объектах или наблюдениях. В работе [5] исследованы перспективы ультраметрической топологии как часть модели человеческого сознания и сделан важный вывод о том, что пространства, содержащие точки, связанные с множеством наблюдений, характеризуются ультраметрическими (иерархическими) соотношениями. Работу [6] можно трактовать более расширенно: от нечетких данных (представленных ПУП) — к p-адическим моделям. Следует, однако, упомянуть о специфичности p-адических моделей.

В работе [7] показано, что нечеткое отношение толерантности $\mu : X \times X \to [0,1]$, имеющее свойства $\mu(x_i, x_i) = 1$, $\mu(x_i, x_j) = \mu(x_j, x_i)$, нечеткое отношение эквиваленетности $\mu(x_i, x_j) \geq \min\{\mu(x_i, x_k), \mu(x_k, x_j)\}$, транзитивное замыкание нечеткого отношения толерантности $\overline{\mu}(x_i, x_j) = \max_p\{\min\{\mu(x_i, x_{k_1}), \mu(x_{k_1}, x_{k_2}), ..., \mu(x_{k_p}, x_j)\}$ и объект, наделенный ультра метрикой $\rho(x_i, x_j) = 1 - \overline{\mu}(x_i, x_j)$, обладающий свойствами

$$\rho(x_i, x_i) = 0, \rho(x_i, x_j) = \rho(x_j, x_i),$$

$$\rho(x_i, x_j) \leq \max\{\rho(x_i, x_k), \rho(x_k, x_j)\},$$

являются такими, что понятиям нечеткой эквивалентности, ультраметрического пространства (УП) и ИК соответствует один математический объект. Заметим также, что произвольное УП изометрично вкладывается в сферу Гильбертова пространства [8].

В работах [9—11] предложено анализировать ИС НМ $\widetilde{A} = \{U, \mu\} = \{u_i / \mu_i^{(u)}\}$, $\mu_i^{(u)} \to [0, 1]$, $\widetilde{A} \subset U \times [0,1]$, где U — универсум, μ — ФП, используя НМ-гранулу, которая представляет собой множество $2 \times n$ пар, $\widetilde{A} = \{u_i / \mu_i^{(u)}\} \to A_{(1)} = (u_i \mu_i^{(u)})_{i=1}^n = (u_1 \mu_1^{(u)}; ...; u_n \mu_n^{(u)})$, где размерность $A_{(1)}$ — $2 \times n$. НМ-грануле $A_{(1)}$ сопоставляется ИС, полученная методами ИК, специфика которых заключается в использовании матрицы расстояний между объектами кластеризации и последующей группировкой этих объектов (в соответствии с матрицей расстояний) в ИС по определенному критерию (наиболее часто используют maxmax $d(x, y)$ или minmin $d(x, y)$). Задача состоит в определении структуры НМ, компонентами которого является подмножество упорядоченных пар $(u_1 \mu^{u_1}; ...; u_n \mu^{u_n})$, а матрица близости основана на вычислении расстояний между парами элементов $\{u_i \mu^{u_i}\}$ и $\{u_{i+1} \mu^{u_{i+1}}\}$ и др.

Возможность моделирования неопределенности на уровне *p*-адических моделей. Нечеткое множество — одно из возможных представлений объекта в условиях неопределенности. При общем рассмотрении можно заметить две особенности:

1. Наложение эвристической (ментальной) ФП, с одной стороны, позволило формализовать неопределенность, с другой стороны, — включило этот объект в область таких, анализ которых необходимо выполнять на уровне, соответствующем анализу мыслительной деятельности человека.

2. Нечеткое множество как подмножество упорядоченных пар {значение/ФП} может быть проанализировано как совокупность парных различий с вытекающими отсюда последствиями.

Однако представление НМ как продукта интеллектуальной деятельности человека и как объекта, наделенного возможностью оценивать парные различия между его элементами, позволяет и в первом и втором случаях анализировать НМ на уровне ИС [12, 13]. В условиях неопределенности объект, не заданный однозначно, структура которого не определена и ничего не известно о его упорядоченности, рассматривается помещенным в универсальное множество (УМ), т.е. $\widetilde{x} \in X$. Возможность сравнить два произвольных объекта, $\widetilde{x} \in X$ и $\widetilde{y} \in X$, отсутствует до тех пор, пока указанные объекты не получат статус множеств упорядоченных пар в результате определения ФП, т.е. пока не будет выполнена операция ментального упорядочения. При этом УМ может быть также иерархически структурировано посредством учета парных различий между его элементами.

Предположим, что НМ, в котором ФП — продукт виртуального (ментального) пространства, — накладывается на физический объект, как и на любой другой объект, функционирование или поведение которого определяется какой-либо эвристикой, является в известной мере элементом (объектом) ментального пространства. В работе [5] показано, что такие пространства описываются p-адическими деревьями. При этом факт наложения древовидной структуры на такой объект играет значительно большую роль, чем особенности УП или свойства p-адических чисел, для которых существует бесконечно много различных p-адических представлений. Поля p-адических чисел для различных простых чисел p-неизоморфны. Таким образом, 2-адическое описание не эквивалентно 3-адическому. Неизоморфность различных полей $\mathbb{Q}_p$ порождает проблему при построении p-адических моделей, состоящую в неоднозначности выбора простого числа p для системы координат (иерархического дерева).

При моделировании неопределенности (даже на уровне ТНМ) не учитывается, что неопределенность, в частности, есть отсутствие порядка. Наиболее полно это можно учесть, используя p-адические числа, так как на множестве p-адических чисел невозможно ввести порядковую структуру. В то же время, структура иерархии на p-адическом дереве позволяет оценить влияние ФП, заданной на УМ, при сравнении структур УМ и НМ.

В работах [12, 13] показано, что на бинарном дереве (БДр) — некотором аналоге НМ, определенном на $\mathbb{Q}_p$, существует естественная метрика, состоящая в том, что две бесконечные ветви дерева близки, если длина их общей части, выходящей из корня, велика. Эта метрика ρ_p, являющаяся ультраметрикой, не только принципиально отличается от нечеткой (неаддитивной) меры, принятой в ТНМ, но приводит к тому, что ультраметрическая геометрия не совпадает с евклидовой геометрией. Согласно логике [12] ТНМ как объект, построенный с использованием ментальных объектов, может быть адекватно описана и в ультраметрической геометрии, присущей ментальным пространствам. Ментальное пространство в p-адической метрике имеет когнитивную интерпретацию. К сожалению,

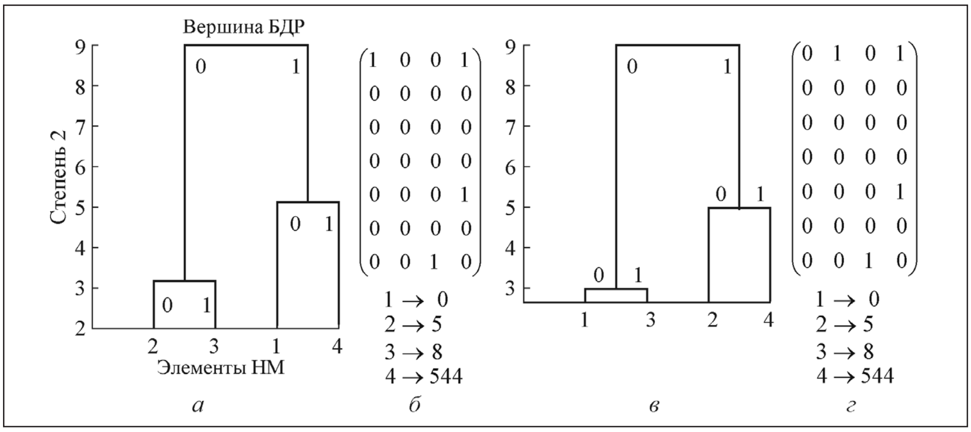

Рис. 1. Иерархические структуры и 2-адические матрицы $(C = \{c_{ij}\})$ БДр: *а* — НМ$\tilde{5}_{\text{trapmf}}$; *б*, *г* — фрактальное число $\Sigma_{1+2+3+4} = 1064 = 2^3 + 2^5 + 2^{10}$; *в*, *г* — УМ $U = \{2\ 3\ 7\ 9\}$

это утверждение невозможно полностью перенести на ТНМ, но роль иерархической древовидной структуры в ТНМ, по-видимому, должна быть учтена в полной мере. Заметим, что любое абстрактное УП может быть представлено в виде такого дерева.

В работе [9] приведены примеры определения ИС НМ методами ИК, в частности, для НМ$_{\tilde{5}_{\text{trapmf}}} \triangleq \{2/0\ 3/1\ 7/1\ 9/0\}$, $\tilde{5}_{\text{trapmf}} \in U = \{2\ 3\ 7\ 9\}$. Бинарное дерево НМ, закодированное алфавитом $\{0,\ 1\}$, и структурная матрица представлены на рис. 1. На основании структурной матрицы вычислены 2-адическое (фрактальное) число и его 2-адический порядок соответственно evalp (a, 2, 9) $= 2^3 + 2^5 + 2^{10} =$ a := 1064 и ordp (a, 2) → 3. В структурных матрицах три нижние строки, состоящие из нулей ($0{*}2^0$, $0{*}2^1$, $0{*}2^2$), опущены.

Иерархические структуры НМ, представленные в виде БДр, имеют ультраметрическую природу, в соответствии с которой расстояния r_{AB}, r_{BC} и r_{AC} между любыми тремя точками A, B, C в пространстве H удовлетворяют условию $r_{AC} \le \max\{r_{AB}, r_{BC}\}$. БДр, полученные на основе матрицы расстояний посредством кластеризации объектов методами наиболее удаленного (НУС) и наиболее близкого соседа (НБС), соответственно $\max d(x^{(i)}, x^{(j)})$ и $\min d(x^{(i)}, x^{(j)})$, $x^{(i)}, x^{(j)} \in X$, являются такими, что для любых трех элементов, i, j, k, справедливо сильное неравенство треугольника (СНТ) — главный признак УП, записываемый в виде $d(x_i, x_k) \le \max(d(x_i, x_1), d(x_1, x_k))$ или $d(x_i, x_k) > \min(d(x_i, x_1), d(x_1, x_k))$.

Бинарные деревья (дендрограмма). В общем случае дендрограмма [4, 6, 13—15] — это определенное изображение древоподобной схемы, порожденной иерархической классификацией данных. Назначение дендрограмм — описание ИС, обнаруживаемой в пределах некоторого подмножества исходного МД (ИМД). Тем не менее, часто это представление является результатом иерархии данных и зависит от выбора некоторого показателя. В свою очередь, иерархичность структуры тесно связана с ее ультраметричностью. Многочисленные работы в этой области знаний посвящены определению ультраметричности данных и обнаружению в них иерархии. Это объясняется тем, что древовидная структура является источником любого ультраметрического расстояния.

Ультраметрическое расстояние порождено свойством p-адических чисел пополнять поле рациональных чисел. Процедура построения дендрограмм следующая:

1) кодирование МД $X = \{x_1, ..., x_n\}$ p-адическими числами Y, имеющими ИС;

2) построение дендрограммы для X в кодах Y.

Дендрограмму для X однозначно определяет Y. Ее вычисление и построение может быть реализовано быстро, но достаточно трудно найти нужное кодирование p-адического числа. Тем не менее, для многих задач p-адическое кодирование можно выполнять предлагаемыми методами.

При построении дендрограммы, точнее метризованного дерева с конечным числом помеченных концов, априори допускают, что в каждом МД X есть подмножества, необходимые для построения дендрограммы при обнаружении ИС в пределах X. Кроме того, предполагают дополнительную обработку ИМД для получения парных различий между элементами, на основании которых можно выделить специальные группы элементов (кластеры), образующих виртуальную ИС.

Цель анализа НМ и УМ, на котором определено данное НМ, на уровне ИС, полученных на основе парных сравнений, состоит в том, чтобы получить новые знания, обусловленные созданием нового объекта — НМ, продукта интеллектуальной деятельности человека.

Множество X с заданной в нем метрикой d называется метрическим пространством. Оно может содержать много различных структур метрического пространства (X, d). Если X снабжено метрикой, то можно определить, как эта метрика отображается в ультраметрику. На практике, как правило, нет необходимости представлять X совместно с метрикой. Иерархия H как двоичное корневое упорядоченное дерево, определяет множество вложенных подмножеств данного множества объектов X, индексируемых множеством I. Существует взаимно однозначное соответствие между иерархией и УП, а также эквивалентность между вложенными подмножествами, иерархией и двоичным деревом согласно конструктивному методу порождения H на множестве I. Пространство веток бесконечного дерева описывается реальными числами в p-адической форме.

Деревья — частичные порядки, на которых можно определить цепи как маршруты. p-Адическое кодирование, определенное для любого объектного набора, может быть выражено для любого объекта x, связанного с терминальным узлом, в виде $x=\sum_{j=1}^{n-1} c_j p^j$, где $c_j \in \{0,1\}$, или более детально: $x_i=\sum_{j=1}^{n-1} c_{ij} p^j$, где $c_{ij} \in \{0,1\}$. Здесь j — уровень или ранг (корень: $n-1$; терминал: 1), i — объектный индекс. В примере на рис. 1 использовано: 0 для левой ветки и 1 для правой ветки. Матричная форма этого кодирования следующая. Пусть $\mathbf{x}$ — вектор-столбец $\{x_1, x_2, ..., x_n\}^t$, $\mathbf{p}$ — вектор-столбец $\{p_1, p_2, ..., p_{n-1}\}^t$. Здесь t — символ транспозиции. Символьная матрица $\mathbf{C}$ переходов в кодах 0 и 1 является множеством величин $c_{ij} \in \{0,1\}$, где $i \in I$ — индексы объекта; $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$ — индексы дендрограммных уровней.

Для данного уровня $j\,(\forall i)$ абсолютные величины $|c_{ij}|$ определяют функцию членства узла j, прочитанного постолбцово, или объекта с индексом i, прочитанного построчно. Матричная форма р-адического кодирования имеет вид $\mathbf{x} = \mathbf{Cp}$, где $\mathbf{x}$ — десятичное кодирование, $\mathbf{C}$ — матрица дендрограммных переходов в кодах $\{0, 1\}$, $\mathbf{p}$ — вектор степеней фиксированного целого p.

Как указано в работах [13, 14], существует эквивалентность между p-адическим числом, p-адическим расширением и элементом $\mathbb{Z}_p$ (p-адические целые). Числа между 0 и $p-1$ — наиболее очевидный выбор кодов для рассматриваемой задачи. Существуют, тем не менее, ситуации, когда другой выбор может быть более целесообразным.

Матричное кодирование БДр позволяет, с одной стороны, получить p-адическое число и p-адическую норму как характеристику НМ, т.е. $\widetilde{x}=\{x/\mu^x\}_1^n \to x \in \mathbb{Q}_2$, с другой стороны, $\widetilde{x}$ соответствует БДр $\wp^x$. Естественно, если возникает необходимость реализации математических операций $\widetilde{x} * \widetilde{y}$, то это должно быть адекватно отражено на уровне их структур: $\wp^x$*str$\,\wp^y$, где $\wp^x \leftrightarrow \widetilde{x}$, $\wp^y \leftrightarrow \widetilde{y}$; *str — операция на структурах. Операции сложения и умножения для p-адических БДр определены в работе [15], а именно: групповая структура в p-адически закодированном объекте определяется на основе операции сложения. Однако реализовать «сложение с переносом», используя традиционные пути, невозможно, так как это не имеет смысла в рассматриваемом контексте. Вместо этого предложено определять «среднее число и порог» функционирования для любых коэффициентов (величин p, как в выражениях для x и x_i): $1 + 1 = 1$, $1 + 0 = 0$.

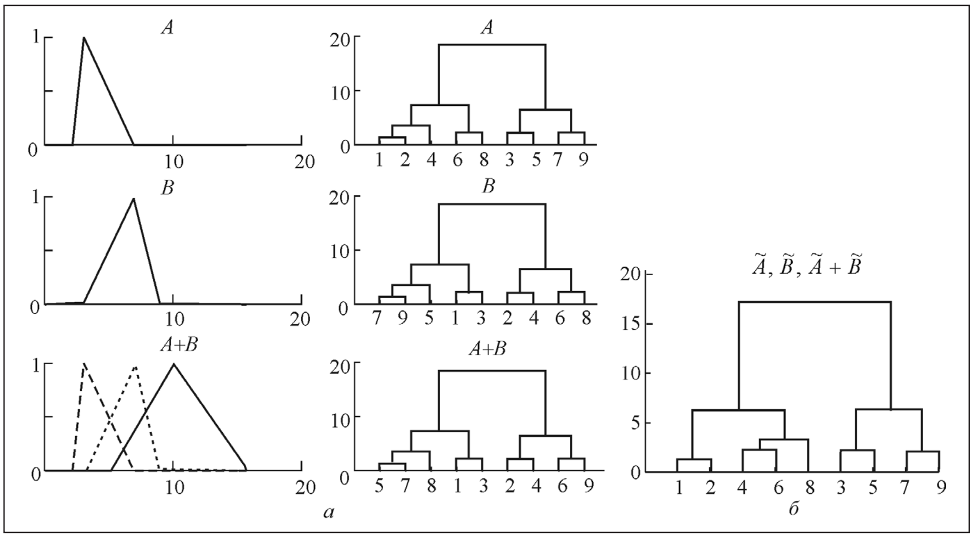

Рис. 2. Нечеткие переменные и их ИС: *а* — НП $\widetilde{3} \triangleq$ trimf ([0 : 1 : 16], [2 3 7]), $\widetilde{7} \triangleq$ trimf ([0 : 1 : 16], [3 7 9]), сумма чисел $\widetilde{3}+\widetilde{7}$ и их БДр; *б* — БДр для УМ, на котором определены НП

Определение *p*-адического дендрограммного умножения реализовано исключительно с использованием оператора расширения — это умножение на $1/p$ [15]. Поскольку сложение и умножение на деревьях возможно, следовательно, есть симметрия относительно приложения этих операций.

Постановка задачи, метод и алгоритмы ее решения. Рассмотрим влияние структуры НМ на арифметические операции. Пусть $\widetilde{a}=\{a/\mu^a\}$, $\widetilde{a}\in U^a$ и $\widetilde{b}=\{b/\mu^b\}$, $\widetilde{b}\in U^b$, $\widetilde{c}=\widetilde{a}*_f\widetilde{b}$, $c\in U^c$, $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$, $\widetilde{c}$ — НМ, U^a, U^b, U^c — УМ, $*_f\in\{+,-,*,/\}$. Каждое НМ будем характеризовать ИС, представленной в виде кортежа *K*, состоящего из БДр, структурной матрицы, 2-адического числа и 2-адического порядка (нормы), где $K=\{\Delta,\Sigma_M$, evalp $(a, 2, 9)$, ordp $(a, 2)\}$, a — 2-адическое число, полученное в виде суммы компонент-ветвей БДр; evalp $(a, 2, 9)$ — нормализованное 2-адическое число, количество элементов которого ограничено числом 9; ordp $(a, 2)$ — 2-адический порядок.

З а д а ч а 1. Для $\widetilde{c}=\widetilde{a}*_f\widetilde{b}$ при известных кортежах K^α и K^β определить:

а) K^χ для НМ $\widetilde{c}$ как функцию результата операции, т.е. $K^\chi=f(\widetilde{a}*_f\widetilde{b})$;

б) K^χ для НМ $\widetilde{c}$ как функцию кортежей, т.е. $K^\chi=f(K^\alpha,K^\beta)$.

З а д а ч а 2. Новый элемент — коэффициент структурной принадлежности (КСП) рассматривается как функция, зависящая от иерархической

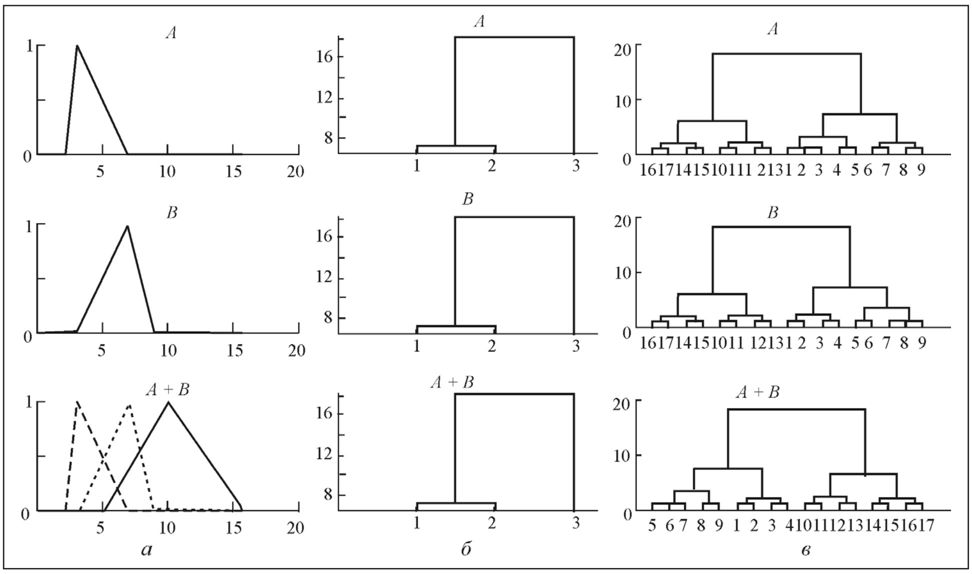

Рис. 3. Нечеткие переменные 3, 7 и сумма $\widetilde{3}+\widetilde{7}$, определенные на УМ $U=[0:20]$ (*а*), и БДр для минимального (*б*) и максимального (*в*) числа кластеров

структуры УМ и НМ, заданного на данном УМ. Для условий неопределенности предложим новый информационный объект: вместо подмножества упорядоченных пар (значение, ФП) — подмножество упорядоченных троек: значение, ФП (расширение характеристической функции), КСП. Необходимо выполнить анализ эффективности применения рассматриваемого КСП.

Данные задачи будем решать, рассмотрев примеры реализации операций нечеткой математики для нечетких переменных (НП): $\widetilde{3}\triangleq$ trimf([0 : 1 : 16], [2 3 7]), $\widetilde{7}\triangleq$trimf([0 : 1 : 16], [3 7 9]), суммы $\widetilde{3}+\widetilde{7}$, сформировав БДр для НМ и УМ. Указанные объекты представлены на рис. 2. При этом число кластеров принято равным девяти и УМ, на котором определены НМ, задано с шагом единица, т.е. $X=[0:1:20]$, $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{A}+\widetilde{B}\in X$.

Характерной особенностью структур, определенных для минимального (рис. 3, *б*) и максимального (рис. 3, *в*) числа кластеров, является их визуальная близость. Иерархическая кластеризация выполнена по методу НУС. Вычислены 2-адическое число и 2-адический порядок. Как видно из рис. 3, при заданном УМ 2-адическое число, определенное на основе БДр, 2-адический порядок при заданной точности для НП $\widetilde{3}, \widetilde{7}$ и суммы $\widetilde{3}+\widetilde{7}$ совпадают. Например, для случая, представленного рис. 3, *б*, $>\mathrm{a}:=2^8+2^{18}$.

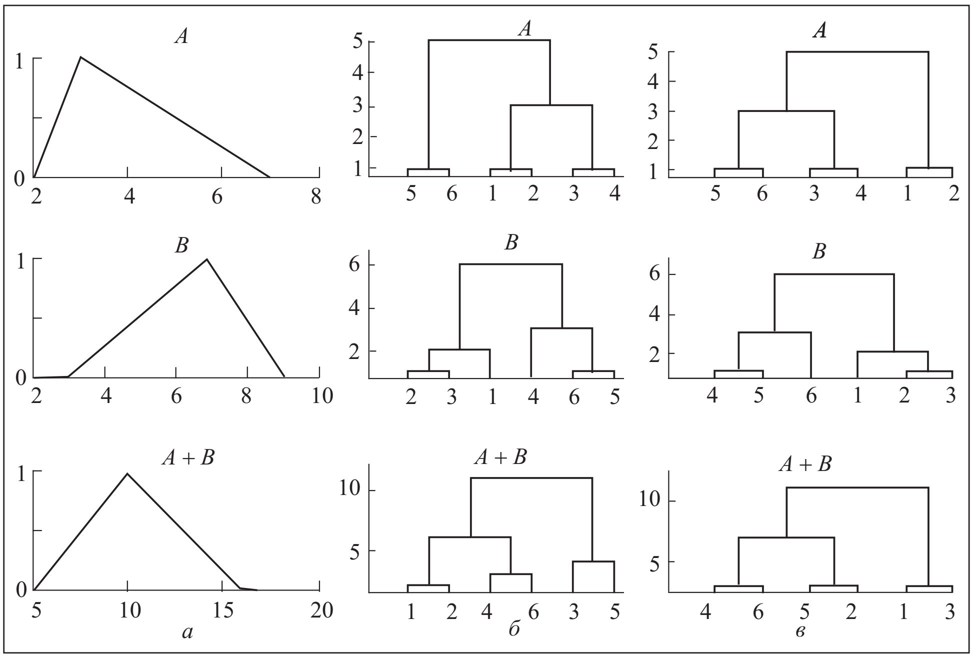

Рис. 4. Представление НМ $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{A}+\widetilde{B}$ для вычисления структурной принадлежности: *а* — НМГр $\widetilde{3} \overset{\Delta}{=}$ trimf([2 : 1 : 7], [2 3 7]), $\widetilde{7} \overset{\Delta}{=}$ trimf ([3 : 1 : 9], [3 7 9]), $\widetilde{3}+\widetilde{7}$; *б* — БДр НМГр; *в* — БДр четких интервалов и УМ для $\widetilde{3}+\widetilde{7}$

Аналогичная ситуация наблюдается при построении ИС методами НБС и НУС. Результаты проведенных исследований позволяют сделать вывод о том, что структуры НП $\widetilde{3}, \widetilde{7}, \widetilde{3}+\widetilde{7}$ и УМ, на которых они определены, практически одинаковы. Это может означать, что УМ определяет структуру всех подмножеств, которые на нем заданы. Сам факт наличия УМ определяет условия неопределенности.

Для оценки влияния структуры НМ-гранулы (НМГр) необходимо рассмотреть изменение ФП и дефадзифицированного значения НП, а также изменение результата операции над НП с учетом их структур. Решение поставленной задачи можно выполнить в два этапа: на первом этапе определить характеристики структуры, на втором — обобщенную ФП, состоящую из ФП, назначенной экспертами эвристически, и так называемой структурной принадлежности (СП), и рассматривать в общем случае не подмножество упорядоченных пар (значение, ФП), а подмножество упорядоченных троек (значение, ФП, СП).

Пусть НМГр имеет БДр $\wp$, которому соответствует бинарная матрица $\mathbb{N} = \{m_1, m_2, ..., m_n\}$, где m_i — столбец матрицы, $m_i \in \mathbb{N}$. Предполагаем, что

Таблица 1

СП	2-адическое число ветвей БДр и 2-адический порядок	
	НМ	УМ
НП $\widetilde{3}$:	*Сумма всех ветвей БДр*	
0,21 0,23	2^5 + 2^1 + 2^5 + 2^3 + 2^5 + + 2^1 + 2^3 + 2^5 + 0 + 2^1 =150	2^5 + 2^1 + 2^5 + 2^3 + 2^1 + + 2^5 + 0 + 2^1 = 110
0,27	*Нормализованное 2-адическое число*	
0,28 0,0 0,01	> evalp (a, 2); $2 + 2^2 + 2^4 + 2^7$ > ordp (a, 2); 1	> evalp (a, 2); $2 + 2^2 + 2^3 + 2^5 + 2^6$ > ordp (a, 2); 1
НП $\widetilde{7}$: 0,22 0,0 0,01 0,3 0,35 0,34	2^1 + 0 + 2^1 + 2^6 + 2^1 + 2^3 + + 2^6 + 2^3 + 2^6 = 214 > evalp (a, 2); $2 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^7$ > ordp (a, 2); 1	2^6 + 2^2 + 2^6 + 2^1 + 2^2 + 0 + + 2^6 + 2^1 + 2^3 = 212 > evalp (a, 2); $2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^7$ > ordp (a, 2); 2
НП $\widetilde{3} + \widetilde{7}$: 0,0 0,0 0,48 0,02 0,49 0,02	0 + 2^1 + 2^11 + 2^6 + 2^4 + + 2^11 + 2^3 + 2^6 = 4250 > evalp (a, 2); $2 + 2^3 + 2^4 + 2^7 + 2^{12}$ > ordp (a, 2); 1	2^11 + 2^3 + 2^7 + 2^3 + 2^11 + + 0 + 2^7 + 2^3 = 4376 > evalp (a, 2); $2^3 + 2^4 + 2^8 + 2^{12}$ > ordp (a, 2); 3

Таблица 2

КСП					
УМ			НМ		
$X_{\widetilde{A}}$	$X_{\widetilde{B}}$	$X_{\widetilde{A}+\widetilde{B}}$	$\widetilde{A}$	$\widetilde{B}$	$\widetilde{A}+\widetilde{B}$
0,29	0,30	0,47	0,21	0,22	0,0
0,30	0,32	0,03	0,23	0,0	0,0
0,07	0,33	0,47	0,27	0,01	0,48
0,09	0,0	0,0	0,28	0,3	0,02
0,0	0,0	0,03	0,0	0,35	0,49
0,02	0,04	0,0	0,01	0,34	0,02

ИК выполнена так, что число кластеров совпадает с числом α-уровней. Для каждого столбца можно вычислить значения $x^{(i)} = \sum_{\text{уровень } v} a_v 2^v \in \mathbb{Q}_2$, сумма которых составит 2-адическое число, характеризующее не только матрицу $\mathbb{M}$ и БДр $\wp$, но и НМГр. Обозначим $\kappa_j = x_j / \sum_i x_i$ коэффициент структурной принадлежности, $0 \le \kappa_j \le 1$, где x_j — сумма элементов (2^v) j-го столбца бинарной матрицы, $j = 1, J$; $\sum_{i=1,n} x_i$ — сумма всех столбцов структурной (бинарной) матрицы. Легко заметить, что κ_j — это 2-адический относительный путь каждого элемента структуры при заданном числе кластеров. Таким образом, структурированная НМГр может быть представлена в виде $\tilde{x}^{\text{str}} = \{\tilde{x}, \kappa\} = \{\{x/\mu^x\}/\kappa\}$.

Вычисление структурной принадлежности. Представленные на рис. 4 НМ имеют пять α-уровней, структуризация выполнена по методу НУС. Результаты вычисления КСП для НП $\tilde{3} \triangleq \text{trimf}([2:1:7], [2\ 3\ 7])$, $\tilde{7} \triangleq \text{trimf}([3:1:7], [3\ 7\ 9])$, $\tilde{3} + \tilde{7}$, величины 2-адических чисел и 2-адических порядков рассмотренных НМ и соответствующих УМ приведены в табл. 1.

Анализируя полученные результаты, можно отметить следующее. Все НП, рассматриваемые как НМГр, структурно расположены на одинаковом ультраметрическом расстоянии от базовой точки (нуля), а УМ, на которых определены рассматриваемые НМ, расположены на различных ультраметрических расстояниях от базовой точки. Этот важный факт до настоящего времени не учитывался. 2-адические числа, характеризующие НМ и УМ, имеют практически одинаковые значения, т.е. назначение экспертной ФП не повлияло на получение дополнительной информации.

В табл. 2 приведены КСП для УМ-интервалов, в которые включены НМ, и собственно НМ (соответственно четкое — $\{x/1\}$ и нечеткое — $\{x/\mu^x\}$), а в табл. 3 — структурированные НМГр, где $K_{\text{кл}}$ — 2-адический относительный путь каждого элемента структуры при заданном числе кластеров; $A = \text{trimf}([2:1:7], [2\ 3\ 7])$; $B = \text{trimf}([3:7/6:9], [3\ 7\ 9])$; $\text{Apl}B = \text{trimf}([5:12/6:16], [5\ 10\ 16])$; $\text{an} = [[2:1:7]'\ A'\ sA']$; $\text{bn} = [[3:7/6:9]'\ B'\ sB']$; $\text{aplbn} = [[5:12/6:16]'\ \text{Apl}B'\ s\text{Apl}B']$. Таким образом, учет ИС НМГр приводит к НМ с 2-мерной ФП.

Поскольку вычислительный аппарат ТНМ хорошо развит, применим его для новой структурированной НМГр. Введем обобщенную ФП $\mu^{\text{gen}} = (\mu^2 + \kappa^2)^{1/2}$. На рис. 5 приведены стандартные НМГр и 2-адически структурированные НМ, а в табл. 3 — результаты операции $\tilde{A} + \tilde{B}$ для НМГр $\tilde{A}, \tilde{B}$.

ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2015. V. 37. № 2

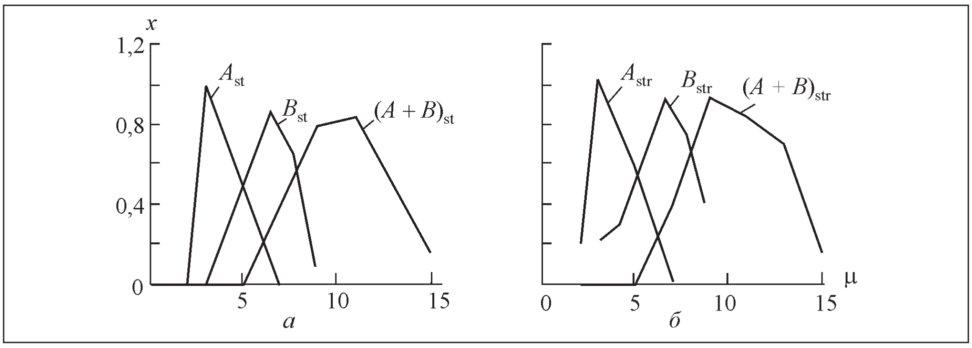

Рис. 5. Стандартные (st) НМГр (*а*) и 2-адически структурированные (str) НМ (*б*)

Таблица 3.

Структурированные НМГр								
Опорное множество с заданным шагом			Стандартная ФП			КСП при $K_{\text{кл}} = 6$		
Стандартное НМ		2-адическая структура	Стандартное НМ		2-адическая структура	Стандартное НМ		2-адическая структура
2,00	0	0,21	3,00	0	0,22	5,00	0	0
3,00	1,00	0,23	4,17	0,29	0	7,00	0,40	0
4,00	0,75	0,27	5,33	0,58	0,01	9,00	0,80	0,48
5,00	0,50	0,28	6,50	0,88	0,30	10,00	0,83	0,02
6,00	0,25	0	7,67	0,67	0,35	13,00	0,50	0,49
7,00	0	0,01	8,83	0,08	0,34	15,00	0,17	0,02
$\widetilde{A}$			$\widetilde{B}$			$\widetilde{A}+\widetilde{B}$		

На рис. 6 приведено сравнительное изображение стандартного НМ $\widetilde{x}=\{x/\mu^x\}$, $\mu^x\to[0,1]$, НМ с учетом 2-адической структуры $\left(\widetilde{x}\bigcup\left(a_2^{(i)}/\sum_i a_2^{(i)}\right),\left(a_2^{(i)}/\sum_i a_2^{(i)}\right)\to[0,1]\right)$ и обобщенное (структурированное) НМ $\mu_{\text{gen}}^x=\left((\mu_{\text{i}}^x)^2+\left(a_2^{(i)}/\sum_i a_2^{(i)}\right)^2\right)^{1/2}$. Максимальный ранг (степень, уровень на дендрограмме) бинарного числа определяется длиной интервала, на котором задано НП, ранг арифметической операции над НП $\widetilde{A}*_f\widetilde{B}$ определяется длиной интервала, в который вложены НП, $r_{\widetilde{A}*_f\widetilde{B}}=r_{\widetilde{A}}*_f r_{\widetilde{B}}$, $r_{\widetilde{A}}=f(1_{I^A})$, $r_{\widetilde{B}}=f(1_{I^B})$, где $1_{I^A}, 1_{I^B}$ — длины интервалов, на которые опираются НП $\widetilde{A}, \widetilde{B}$; $*f\in\{+,-,*,/\}$.

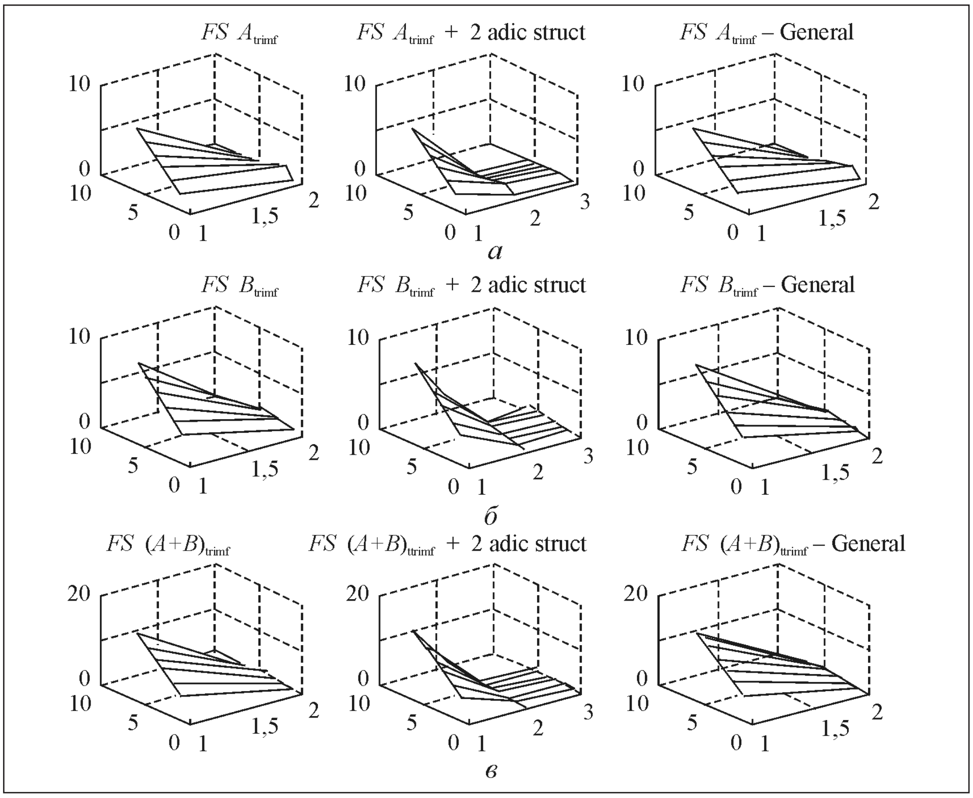

Рис. 6. Представление стандартного НМ (*а*), НМ с учетом 2-адической структуры (*б*) и обобщенное (структурированное) НМ (*в*)

Пример. Пусть НП $\widetilde{3} \triangleq \mathrm{trimf}([2:1:7],[2\ 3\ 7])$, $\widetilde{7} \triangleq \mathrm{trimf}([3:1:9],[3\ 7\ 9])$, $\widetilde{3}+\widetilde{7}$ как НМГр имеют вид

$$\widetilde{3}=\begin{pmatrix}2\,0\\3\,1\\7\,0\end{pmatrix},\quad \widetilde{7}=\begin{pmatrix}3\,0\\7\,1\\9\,0\end{pmatrix},\quad \widetilde{3}+\widetilde{7}=\begin{pmatrix}5 & 0\\10 & 1\\16 & 0\end{pmatrix},$$

структурированные НМГр имеют вид

$$\widetilde{3}^{\,\text{str}}=\left\{\begin{pmatrix}2\,0\\3\,1\\7\,0\end{pmatrix},1\right\},\ \widetilde{7}^{\,\text{str}}=\left\{\begin{pmatrix}3\,0\\7\,1\\9\,0\end{pmatrix},3\right\},\ \widetilde{3}^{\,\text{str}}+\widetilde{7}^{\,\text{str}}=\left\{\begin{pmatrix}5 & 0\\10 & 1\\16 & 0\end{pmatrix},1\right\},$$

где $\widetilde{3}^{\,\text{str}}+\widetilde{7}^{\,\text{str}} \neq (\widetilde{3}+\widetilde{7})^{\text{str}}$. Таким образом, структурированное НМ — это множество, объединяемое с множеством, содержащим 2-адический поря-

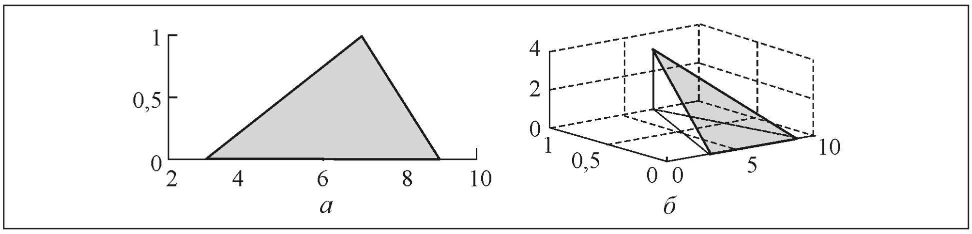

Рис. 7. Представление НП $\widetilde{7}_{\text{trimf}}$: *а* — стандартное НМ; *б* — с учетом структурных свойств НП $\bigcup \text{ord}_p$(НП)

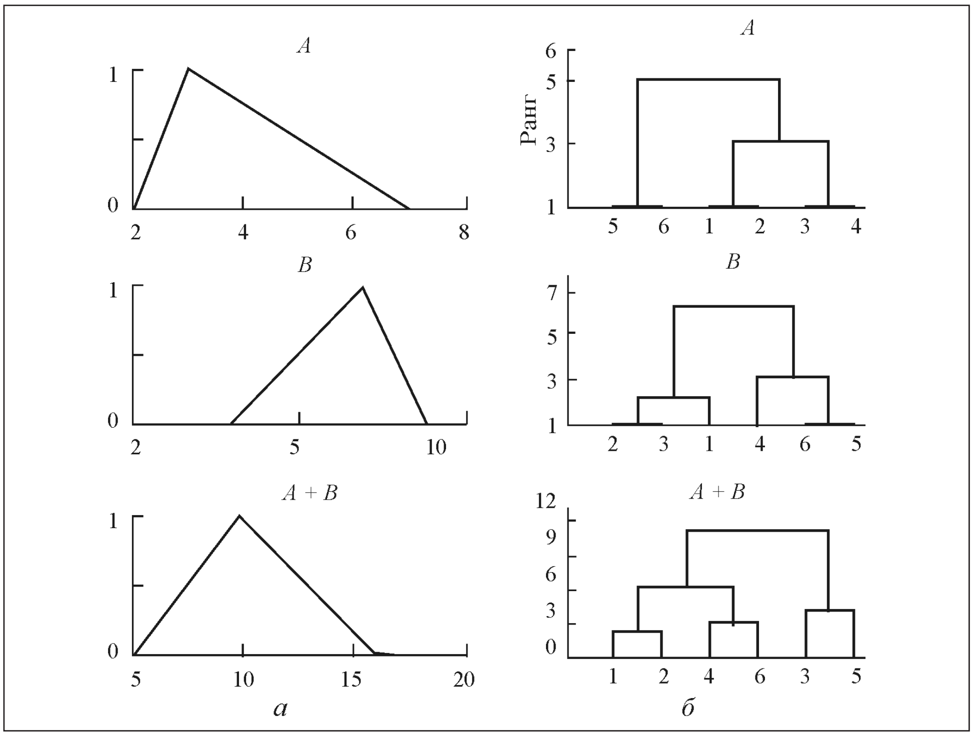

Рис. 8. Примеры вычисления $A^{\text{str}}_{\text{def}}$: *а* — НП $\widetilde{A}=3_{\text{trimf}}$, $\widetilde{B}=7_{\text{trimf}}$, $\widetilde{C}=\widetilde{A}+\widetilde{B}$; *б* — БДр, соответствующие НП $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{A}+\widetilde{B}$ (структуры НП определены на основании ИК по методу НУС)

док числа, полученного на основании БДр, которое является результатом кластеризации НМ методом НУС или НБС с учетом максимального или минимального расстояния между кластерами.

На рис. 7 показан возможный способ представления структурированной НП. Поскольку величина ord_p — скаляр и дефадзифицированное значение НМ — также скаляр, можно ввести обобщенный показатель структурированности НМ — структурно дефадзифицированное число (СДЧ):

$A^{\mathrm{str}}_{\mathrm{def}} = (\mathrm{def}\,(\widetilde{A})^2 + (\mathrm{ord}_2\, C)^2)^{1/2}$, где $\mathrm{def}\,(\widetilde{A})^2$ — четкое (дефадзифицированное) значение $\widetilde{A}$; $\mathrm{ord}_2\, C$ — 2-адический порядок 2-адического числа, характеризующего БДр. Примеры вычисления $A^{\mathrm{str}}_{\mathrm{def}}$ приведены на рис. 8. Поскольку структуры рассматриваемых НМ элементарно просты, влияние их в данном случае не существенно. Структурные характеристики НП — 2-адическое число, 2-адический порядок и СДЧ следующие:

$$[\widetilde{A}]_2 = 2 + 2^2 + 2^4 + 2^7,\ \mathrm{ord}_2\,([\widetilde{A}]_2) = 1,\ \text{СДЧ} = (3^2 + 1^2)^{1/2} = 3{,}162;$$

$$[\widetilde{B}]_2 = 2^3 + 2^4 + 2^6 + 2^7,\ \mathrm{ord}_2\,([\widetilde{B}]_2) = 3,\ \text{СДЧ} = (7+3)^{1/2} = 7{,}62;$$

$$[\widetilde{A} + \widetilde{B}]_2 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^7 + 2^{12},\ \mathrm{ord}_2\,([\widetilde{A} + \widetilde{B}]_2) = 2,\ \text{СДЧ} = (10 + 2)^{1/2} = 10{,}2,$$

где $[\,\tilde{}\,]_2$ — 2-адический аналог НП. Предложенные структурные характеристики НМ могут быть использованы как дополнительные признаки при принятии решений в условиях неопределенности.

Выводы

В ТНМ практически не рассматривается влияние структуры НМ на его характеристики и на ФП — основной атрибут НМ, хотя игнорирование структуры не может не влиять на представление неопределенности. Применение методов ИКА для анализа структуры НМ дает возможность осуществить естественный переход к ИС, позволяет применить новые парадигмы в анализе данных и открывает новые перспективы в вопросах организации данных, включая извлечение знаний.

Каждая структура — БДр, на основании которого формируется структурная (бинарная) матрица, позволяет определить 2-адическое число, 2-адический порядок (норму), 2-адическую СП, вычисляемую как отношение длины ветви БДр к сумме длин всех ветвей.

Результаты проведенных экспериментов подтвердили целесообразность представления НМГр в виде объекта, учитывающего ее структуру.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Baruah H.K.* The Theory of Fuzzy Sets: Beliefs and Realities. International Journal of Energy, Information and Communications. — 2011. — Vol. 2, Issue 2. — P. 1—22.
2. *Simon H.A.* The Sciences of the Artificial. — Cambridge: MIT Press, 1996.—216 p.
3. *Delgado M., Gómez-Skarmeta A.F., Vila A.* On the Use of Hierarchical Clustering in Fuzzy Modeling// Intern. J. of Approximate Reasoning. — 1996. — № 14. — P. 237—257.
4. *Murtagh F.* Quantifying ultrametricity// Symposium Physica. COMPSTAT — 2004. — Verlag Springer, 2004. — P.
5. *Хренников А.Ю.* Неархимедов анализ и его приложения. — М. : Физматлит, 2003. — 216 с.

6. *Murtagh F.* From Data to the *p*-Adic or Ultrametric Model. — arXiv:0805.2744v1 [stat.ML] 18 May 2008. — 34 p.
7. *Куркина М.В., Славский В.В.* Обратная задача в теории нечетких отношений эквивалентности. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http:://www. uctt.ru›download/32/.
8. *Гундырев И.А.* О подобно однородных локально компактных пространствах с внутренней метрикой // Изв. вузов. Математика. — 2008. — **4** (551). — С. 28—42. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www. ksu. ru/journals/izv_vuz/.
9. *Минаев Ю.Н., Филимонова О.Ю., Минаева Ю.И.* Иерархическая кластеризация нечетких данных // Электрон. моделирование. — 2012. — **34**, № 4. — С. 3—22.
10. *Минаев Ю.Н., Филимонова О.Ю., Минаева Ю.И.* Тензорные модели НМ-гранул и их применение для решения задач нечеткой арифметики// Искусственный интеллект.— 2013. — № 2. — С. 18—32.
11. *Минаев Ю.Н., Филимонова О.Ю., Минаева Ю.И.* Структурированные гранулы нечеткого множества в задачах гранулярного компьютинга// Электрон. моделирование. — 2014. — **36**, № 6. — С. 77—96.
12. *Хренников А.Ю.* Моделирование процессов мышления в *p*-адических системах координат. — М. : Физматлит, 2004. — 296 с.
13. *Murtagh F.* On ultrametricity, data coding, and computation // J. Classification. — 2004. — Vol. 21. — P.167—184.
14. *Bradley P.E.* Mumford dendrograms// The Computer Journal. — Arxiv: 0707. 3540 [cs.DM] — 14 p.
15. *Gomez S., Fernandez A., Montiel J., Torre D.* MultiDendrograms: Variable-Group Agglomerative Hierarchical Clustering. — arXiv:1201.1623v1 [cs.IR] 8 Jan 2012. — 18 p. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://deim.urv.cat/ sgomez/multidendrograms.php

Yu. N. Minaev, O.Yu. Filimonova, Yu.I. Minaeva

INFLUENCE OF HIERARCHIC STRUCTURE OF FUZZY SET GRANULES
ON COMPUTATION PROCEDURES OF FUZZY MATHEMATICS

It is proposed to consider a fuzzy set as an object provided with hierarchic structure obtained with the help of the methods of hierarchic clusterization. A notion of structure belonging has been introduced which is determined depending on the hierarchic structure of the universal set and considers the norm of the 2-adic number equivalent to the hierarchic structure. It has been proposed to consider the structured FS as the union of the standard FS with the norm of 2-adic number obtained on the basis of binary tree being a result of hierarchic FS clusterization. A generalized indicator of FS structurization - structurally dephadzificated number

K e y w o r d s : fuzzy set, hierarchic clusterization, p-adic analysis, structure matrix, binary tree.

REFERENCES

1. Baruah, H. K. (2011), “The Theory of Fuzzy Sets: Beliefs and Realities”, *International Journal of Energy, Information and Communications*, Vol. 2, issue 2, pp. 1-22.
2. Simon, H.A. (1996), The Sciences of the Artificial, MIT PRESS, Cambridge.
3. Delgado, M., Gomez-Skarmeta, A.F. and Vila, A. (1996), “On the Use of Hierarchical Clustering in Fuzzy Modeling”, *Intern. J. of Approximate Reasoning*, no. 14, pp. 237-257.
4. Murtagh, F. (2004), “Quantifying ultrametricity”, *In J. Antoch, ed., COMPSTAT 2004 – Proceedings in Computational Statistics*, Prague, Czech Republic, Springer-Verlag, Berlin, pp. 1561-1568.

5. Khrennikov, A.Y. (2003), *Nearkhimedov analiz i yego prilozheniya* [Non-Archimedean analysis and its applications], Fizmatli, Moscow, Russia.
6. Murtagh, F. (2008), “From Data to the p-Adic or Ultrametric Model”, available at: arXiv:0805.2744v1 [stat.ML], May 18, 2008.
7. Kurkina, M.V. and Slavskii, V.V. “The inverse problem in the theory of fuzzy relations of equivalence”, available at: http:://www. uctt.ru›download/32/
8. Gundyrev, I.A. (2008), “Similarly homogeneous locally compact spaces with an intrinsic metric”, available at: http://www. ksu. ru/journals/izv_vuz/.
9. Minayev, Yu.N., Filimonova, O.Yu. and Minaeva, Yu.I. (2012), “Hierarchical clustering of fuzzy data”, *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 34, no. 4, pp. 3-22.
10. Minayev, Yu.N., Filimonova, O.Yu. and Minaeva, Yu.I. (2013), “Tensor models of FS-granules and their application to solving problems of fuzzy arithmetic”, *Iskusstvennyy intellekt*, no. 2, pp. 18-32.
11. Minayev, Yu.N., Filimonova, O.Yu. and Minaeva, Yu.I. (2014), “Structured FS-granules in granular computing tasks”, *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 36, no. 6, pp. 77-96.
12. Khrennikov, A.Yu. (2004), *Modelirovaniye protsessov myshleniya v p-adicheskikh sistemakh koordinat* [Modeling of thinking processes in *p*-adic coordinate systems], Fizmatlit, Moscow, Russia.
13. Murtagh, F. (2004), “On ultrametricity, data coding, and computation”, *J. Classification*, Vol. 21, pp. 167-184.
14. Bradley, P.E. “Mumford dendrograms”, *The Computer Journal,* To appear. Arxiv: 0707. 3540 [cs.DM].
15. Gomez, S., Fernandez, A., Montiel, J. and Torre, D. (2012), “Multidendrograms: variable-group agglomerative hierarchical clustering», available at :http://deim.urv.cat/sgomez/multidendrograms.php (assessed Jan.8, 2012).

Поступила 13.10.14

МИНАЕВ Юрий Николаевич, д-р техн. наук, профессор кафедры компьютерных систем и сетей Национального авиационного университета Украины. В 1959 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — интеллектуальный анализ данных, применение интеллектуальных технологий в системах принятия решений.

ФИЛИМОНОВА Оксана Юрьевна, канд. техн. наук, доцент Киевского национального университета строительства и архитектуры. В 1989 г. окончила Киевский инженерно-строительный ин-т. Область научных исследований — интеллектуальный анализ данных.

МИНАЕВА Юлия Ивановна, канд. техн. наук, доцент кафедры основ информатики Киевского национального университета строительства и архитектуры, который окончила в 2008 г. Область научных исследований — интеллектуальный анализ данных.