УДК 517.11+519.92

Ю.Н. Минаев, д-р техн. наук
Национальный авиационный университет
(Украина, 03057, Киев, пр-кт космонавта Комарова, 1,
тел. (044) 2495454, e-mail: min_14@ukr.net),
О.Ю. Филимонова, Ю.И. Минаева, кандидаты техн. наук
Киевский национальный университет строительства и архитектуры
(Украина, 03037, Киев, Воздухофлотский пр-кт, 31,
тел. (044) 2486427, 2425462, e-mail: filimonova@nm.ru; jumin@big-mir.net)

Структурированные гранулы нечеткого множества в задачах гранулярного компьютинга

Рассмотрено представление гранул нечеткого множества (НМ) в виде 2-адического дерева как способ определения структуры НМ и ее учета при использовании в системе гранулярного компьютинга. Показана возможность учета структуры НМ, посредством вычисления характеризующего ее порядка 2-адического числа, вычисляемого на основе структурной матрицы бинарного дерева. Приведены примеры, показывающие степень влияния структуры НМ на его свойства.

Розглянуто представлення гранул нечіткої множини (НМ) у вигляді 2-адичного дерева як засіб визначення структури НМ та її врахування при використанні в системі гранулярного комп'ютингу. Показано можливість врахування структури НМ, через обчислення порядку 2-адичного числа, що її характеризує, обчисленого за допомогою структурної матриці бінарного дерева. Наведено приклади, які показують ступінь впливу структури НМ на його властивості.

К л ю ч е в ы е   с л о в а: нечеткое множество, гранулярный компьютинг, p-адический анализ, матрицы близости, бинарное дерево.

В последнее десятилетие значительно возрос интерес к гранулированию информации и гранулярным вычислениям (гранулированный компьютинг (ГрК)). Это объясняется, прежде всего, тем, что информационные гранулы (ИГ) имеют основное значение в представлении и обработке знаний когнитивными агентами. Выявление скрытых знаний, определение новых свойств информационных объектов на основе методов интеллектуального анализа данных (ИАД), например интеллектуальный кластерный анализ в условиях неопределенности [1], и другие задачи успешно решаются при использовании гранулярной парадигмы.

Гранулярный компьютинг, понимаемый как методология и методика информационного анализа неочевидно структурированных систем, с одной стороны, обеспечивает сжатие информации, с другой, — дает возможность работать с данными в условиях неопределенности. При построении гранул необходимо учитывать, что гранулы — информационно избыточные объекты, уровень грануляции (размер и форма гранул) имеет существенное значение для описания проблемы и выбора стратегии решения задачи. Следовательно, возникают вопросы: в каких случаях и насколько достаточно нечеткого множества (НМ) с треугольной функцией принадлежности (ФП) для построения сложных гранул; насколько целесообразно использование НМ-гранул с ФП, имеющих форму, отличную от треугольной. Следует заметить, что НМ-гранулы, построенные на НМ $\tilde{x} = \{x / \mu^x\}$ при $\tilde{x} \in X$ и $\tilde{x} \in X_1$, $X \subset X_1$, — различны, хотя семантически они эквивалентны.

Гранулярное представление числовых ФП НМ-гранул обеспечивает комплексный и качественный взгляд на НМ и результаты их обработки. Заметим, что интервал, множество (четкое или нечеткое, в том числе множество значений и соответствующих ФП) рассматриваются как атомарные гранулы. Например, НМ — подмножество упорядоченных пар — $\{x / \mu^{(x)}\}$, $\mu^{(x)} \to [0,1]$ можно рассматривать как объединение атомарных гранул $(x \bigcup \mu^{(x)})$.

В настоящее время считают, что ГрК — скорее теоретическая перспектива, чем конкретное множество методов или принципов. ГрК способствует усовершенствованию методов обработки данных, позволяющих распознавать и использовать скрытые настоящие знания в данных на разных уровнях разрешения или шкалирования. При этом ГрК охватывает все методы, обеспечивающие гибкость и приспособляемость решения, в котором знания (или новая информация) извлекаются и представляются в виде гранул [2].

Современное состояние проблемы, основные определения, постановка задачи. Впервые вопрос гранулирования нечеткой информации и определения способов ее обработки был поставлен в работе [3], в которой гранула определена как группа объектов (или точек), представленных (изображенных) совместно на основе различимости, сходства и близости. Последующее развитие идеи гранулирования нечеткой информации получили в работе [4].

В работе [5] приведены примеры иерархической сути гранулирования. Нерешенными остались следующие вопросы:

является ли неразличимость следствием отсутствия информации или объекты могут быть различимыми в одной шкале и неразличимыми, т.е. тождественными, в другой, более укрупненной или размытой;

должны ли в этих условиях использоваться принципиально различные системы координат, например декартовы или p-адические;

в какой метрике (архимедовой или неархимедовой) возникает (или должна быть исследована) неразличимость и нечеткость.

Термины гранула и гранулирование появились в связи с проблемами ИАД, так как попытка моделирования информационных систем на уровне моделей искусственного интеллекта неизбежно приводит к ИГ. В работе [6] указано, что переход к гранулярным вычислениям связан с решением ряда ключевых проблем. В частности, по определению четкое множество, НМ, интервал являются ИГ, следовательно, для них необходимо определить иерархическую структуру и ее роль в формировании более крупных ИГ, так как любое укрупнение (усложнение) неизбежно влечет за собой изменение структуры объекта (сложность по Саймону [7] напрямую связана со структурой объекта), например при выполнении арифметических и логических операций с гранулами. (Здесь и далее понятие структура рассматривается как иерархическая структура).

Использование ИГ определяет общую проблему гранулярной онтологии как онтологии представления сложных единиц информации и выявления знаний из данных, определения пути и методов, которыми эта проблема может быть решена [6]. Специфика современного гранулирования информации основана на неклассическом представлении множеств. Классическое представление основано на принципах принадлежности и различимости элементов, гранула является совокупностью неразличимых объектов (элементов) и определяется их количеством и типом [6].

Принцип построения гранул заключается в следующем: неразличимость следует понимать как неразличимость по типу, допускающую количественную оценку. Например, ФП неразличимы по своей природе, но их количество известно, в то же время, ФП близки и сходны по своей природе. Кроме того, при построении гранул возникает вопрос, как можно в НМ и интервале, которые являются гранулами, состоящими из элементов, учитывать матрицу внутренней близости (сходства), определяющую попарную близость элементов $x_i / \mu_i^{(x)}$, $x_{i+1} / \mu_{i+1}^{(x)}, \ldots$; как интерпретировать эти матрицы, как учитывать вложенность НМ и универсального множества (УМ) на уровне матриц близости.

Важная особенность гранул — целостность динамической информационной структуры и ее целенаправленность. Размер гранулы является проблемно-ориентированным, зависящим от задачи и предполагаемого способа ее решения, однако роль структуры в процессе решения практически не рассмотрена. Кроме того, преобразование гранул — проблема в гранулированном вычислении.

В работе [8] НМ определены как гранулированные представители числовых данных, объединяемые с использованием ФП в компактный объект. Являясь агрегатами числовых данных НМ формируются с помощью их кластеризации (группирования). Тот факт, что каждая гранула обладает внутренними, внешними и контекстуальными свойствами, свидетельствует о ее автономности и самодостаточности.

Процесс грануляции в общем случае представляет собой итеративную алгоритмическую процедуру последовательного выделения частей различного уровня общности и согласования уровней абстракции и редукции. При анализе неочевидно структурированных динамических систем его можно рассматривать с учетом того, что НМ-гранулы (или *f*-гранулы) представлены в виде тензора.

Рассмотрим следующий комплекс задач, полагая, что структурная модель ИГ представлена в виде тензоров с матрицами $2\times m$ или $m\times m$, где m — число различимых элементов или число упорядоченных пар $\{x/\mu^{(x)}\}_1^m$ [8, 9] в случае НМ:

получение новой (скрытой) информации относительно свойств НМ, представленных в виде гранул;

оценка влияния ФП на результат арифметической операции с ИГ.

Будем рассматривать НМ (или НМ-гранулу) стандартно в виде подмножества упорядоченных пар $\widetilde{A}=\{U,\mu\}$, где U — универсум; μ — ФН: $\widetilde{A}=\{u_i/\mu_i^{(u)}\}$, $\mu_i^{(u)}\to[0,1]$, $\widetilde{A}\subset U\times[0,1]$. В работах [9, 10] НМ-гранула рассматривается в двух формах: как множество $2\times n$ пар или тензорное произведение векторов, представляющих собой элементы множества $n\times n$ (упорядоченных пар),

$$\widetilde{A}=\{u_i/\mu_i^{(u)}\}\to\mathbf{A}_{(1)}=(u_i\ \ \mu_i^{(u)})_{i=1}^n=\begin{pmatrix} u_1 & \mu_1^{(u)} \\ & \vdots \\ u_n & \mu_n^{(u)} \end{pmatrix},$$

где размерность $A_{(1)}$ — $2\times n$, или как множества $2\times n$ пар:

$$\widetilde{A}=\{u_i/\mu_i^{(u)}\}\to\mathbf{A}_{(2)}=([u]\otimes[\mu^{(u)}]^T)_{i=1}^n=\begin{pmatrix} u_1\mu_1^{(u)} & \cdots & u_1\mu_n^{(u)} \\ & \vdots & \\ u_n\mu_1^{(u)} & \cdots & u_n\mu_n^{(u)} \end{pmatrix},$$

где $u=[u_1\ u_2\ \dots\ u_n]$, $\mu=[\mu_1\ \mu_2\ \dots\ \mu_n]$; размерность $A_{(2)}$ — $n\times n$. Обе формы представления эквивалентны, целесообразность использования каждой из них определяется контекстом задачи. Заметим, что формы НМ- гранул $A_{(1)}$ и

$A_{(2)}$ тесно связаны, в частности тензорная декомпозиция формы $A_{(1)}$ следует из формы $A_{(2)}$. В общем случае тензор рассматривается как многомерный массив [11].

НМ как объект, содержащий разношкальные данные. Анализ НМ на единичном интервале представляет собой перекодировку данных, именно в этой трактовке получены основные результаты теории НМ. Анализ НМ посредством перевода НМ в формат матриц близости или сходства между парами $\{x_i, \mu^{x_i}\}$ неизбежно приводит к кластерному анализу и соответственно к анализу иерархических структур [12]. Использование ФП при конструировании НМ есть форма анализа данных, предназначенная для извлечения скрытых знаний. При этом приходится работать с ненаблюдаемыми паттернами и учитывать необходимость определения структуры на множествах исследуемых данных. Следует заметить, что понятие структура достаточно долго определялось исключительно как симметрия, которая может принимать много форм относительно любого преобразования [13, 14]. Иерархическая кластеризация (ИК) дает возможность осуществить естественный переход к иерархической структуре, что, в свою очередь, открывает новые перспективы в вопросах организации данных, включая, прежде всего, извлечение знаний из высокоразмерных, разнородных множеств данных (МД), таких, как, например, трафик компьютерных систем, экономические системы и др.

Проблема управления в условиях неопределенности, относится к категории сложных. Неслучайно утверждение Нобелевского лауреата G. Simon′a о том, что понятие иерархии — фундаментальное для интерпретации данных и сложной действительности, которую эти данные выражают. Обладая формальной простотой, НМ отражают сложную действительность и, естественно, должны анализироваться также на уровне структурно-иерархического представления [7].

В работе [15] показана возможность использования методов нечеткой кластеризации для получения априорного знания о количестве нечетких классов или другой информации о возможном распределении кластеров. Наиболее реально определить структуру объекта можно с помощью методов ИК. Проблема состоит в определении того, какая из ИК наилучшим образом представляет структуру множества объектов, в рассматриваемом случае — структуру НМ.

Специфика методов ИК заключается в использовании матрицы расстояний между объектами кластеризации и последующей группировки этих объектов (в соответствии с матрицей расстояний) в иерархическую структуру по определенному критерию (наиболее часто используют maxmax $d(x, y)$ или minmin $d(x, y)$). Задача состоит в определении структуры НМ, компонентами которого является подмножество упорядоченных пар ,

$$\begin{pmatrix} x_1 \mu^{x_1} \\ \vdots \\ x_n \mu^{x_n} \end{pmatrix},$$

а матрица близости основана на вычислении расстояний между парами элементов $\{x_i \mu^{x_i}\}$ и $\{x_{i+1} \mu^{x_{i+1}}\}$, $i = 1, n$.

Под кластером обычно понимают часть данных (в типичном случае — подмножество объектов или подмножество переменных, или подмножество объектов, характеризуемых подмножеством переменных), выделяемую из остальной части наличием некоторой однородности ее элементов. В простейшем случае — это близость, выражаемая геометрической близостью соответствующих объектов (формально определяемой с помощью расстояний).

Кластер-анализ позволяет выполнять следующее: выявление и анализ структуры взаимодействия основных подсистем; визуализацию структуры системы; выявление основных тенденций эволюции системы. Последнее относится в основном к информации о временных рядах и потоках данных, например одномоментный анализ объектов, НМ разного типа, моделирующих один и тот же объект. Эти задачи чрезвычайно важны и наименее исследованы.

Для определения структурных характеристик НМ требуется систематизировать методы кластер-анализа в соответствии с четырьмя компонентами, однозначно определенными для любого метода кластер-анализа: тип данных; вид искомой кластерной структуры; критерий оценки кластерой структуры и метод ее построения (иерархии).

Известно, что кластерная иерархия на множестве объектов I — это совокупность H вложенных подмножеств S кластеров, удовлетворяющая следующему свойству: при любых S_1 и S_2 из H их пересечение $S_1 \bigcap S_2$ либо пусто, либо совпадает с одним из них. Такие иерархии получают либо путем агломерации — объединения более мелких кластеров, либо разделением более крупных кластеров на более мелкие. И те и другие обычно получают в результате дихотомий, т.е. они являются бинарными.

При работе с НМ используем структуры трех видов, полученные методами наиболее близкого (МНБС) и наиболее удаленного соседа (МНУС) и взвешенного среднего. Такой подход позволяет рассмотреть альтернативные структуры, что способствует более объективному анализу неопределенности и уменьшает произвол в принятии решения.

Определение структуры НМ методами ИК. В работах [12, 16] рассмотрена значимость матриц и функций различимости в информационных системах. Сформируем матрицу близости для НМ-гранулы $\widetilde{X} = \{x / \mu^x\}_1^n$. Выделим синглтоны $x^{(1)} = \{x_1, \mu_1^x\}$, ..., $x^{(2)} = x^{(n)} = \{x_n, \mu_n^x\}$, вычислим попарные расстояния между каждым из них, допустим, Евклидовы — $d(x^{(i)}, x^{(j)})$, $(\forall i, j)$ $i, j = 1, n$, и сформируем матрицу расстояний (матрицу близости) $M_{n \times n}$:

$$\begin{array}{c|cccc|}
M & x^{(1)} & x^{(2)} & \cdots & x^{(n)} \\
\hline
x^{(1)} & 0 & d(x^{(1)}, x^{(2)}) & \cdots & d(x^{(1)}, x^{(n)}) \\
x^{(2)} & d(x^{(2)}, x^{(1)}) & 0 & \cdots & d(x^{(2)}, x^{(n)}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x^{(n)} & d(x^{(n)}, x^{(1)}) & d(x^{(n)}, x^{(2)}) & \cdots & 0
\end{array} .$$

На ее основе построим бинарное дерево (БДр), собирая в кластеры синглтоны по принципу максимального ($\max\limits_{x^{(i)}, x^{(j)} \in X} d(x^{(i)}, x^{(j)})$) или минимального ($\min\limits_{x^{(i)}, x^{(j)} \in X} d(x^{(i)}, x^{(j)})$) расстояния между парами элементов в кластере и принимая в качестве элемента кластеризации на первом шаге итерации отдельный синглтон. Получим иерархические структуры соответственно $Str_{\max}$ и $Str_{\min}$, которые однозначно (для данной метрики) характеризуют НМ. В результате создан новый объект $G_r = (\widetilde{X}, Str)$ со своей структурой.

На матрицу расстояний M наложены следующие ограничения: она должна быть метрической, может быть аддитивно метрической, может быть ультраметрической. Как показано в работах [16, 17], ультраметрическая матрица может быть получена на основании метрической.

Пример. Задано исходное НМ:

$$\widetilde{5}_{\text{trapmf}} \triangleq \{x = (0:1:9)^T ;\ \mu_{\widetilde{5}_{\text{trapmf}}} \to y1 = \text{trapmf}(x, [2\ 3\ 7\ 9])\}.$$

Необходимо определить матрицы близости для УМ $x = (0:1:9)^T$, НМ $y1 = \text{trapmf}(x, [2\,3\,7\,9])$ и соответствующие иерархические структуры. Реализация процедур МатЛаб

```
x = (0:1:9)′ ;
y=pdist(x,′euclidean′)
squareform(y)
```

```
x = (0:1:9)′ ;
y1 = trapmf(x, [2 3 7 9]);
x2=[x y1];
y=pdist(x2,′Euclidean′ )
squareform(y)
```

дает возможность получить следующие матрицы близости: исходное НМ $\tilde{5}_{\text{trapmf}}$ —

$$M_{\text{НМ}}=\begin{matrix} 0 & 1{,}00 & 2{,}00 & 3{,}16 & 4{,}12 & 5{,}10 & 6{,}08 & 7{,}07 & 8{,}02 & 9{,}00\\ 1{,}00 & 0 & 1{,}00 & 2{,}24 & 3{,}16 & 4{,}12 & 5{,}10 & 6{,}08 & 7{,}02 & 8{,}00\\ 2{,}00 & 1{,}00 & 0 & 1{,}41 & 2{,}24 & 3{,}16 & 4{,}12 & 5{,}10 & 6{,}02 & 7{,}00\\ 3{,}16 & 2{,}24 & 1{,}41 & 0 & 1{,}00 & 2{,}00 & 3{,}00 & 4{,}00 & 5{,}02 & 6{,}08\\ 4{,}12 & 3{,}16 & 2{,}24 & 1{,}00 & 0 & 1{,}00 & 2{,}00 & 3{,}00 & 4{,}03 & 5{,}10\\ 5{,}10 & 4{,}12 & 3{,}16 & 2{,}00 & 1{,}00 & 0 & 1{,}00 & 2{,}00 & 3{,}04 & 4{,}12\\ 6{,}08 & 5{,}10 & 4{,}12 & 3{,}00 & 2{,}00 & 1{,}00 & 0 & 1{,}00 & 2{,}06 & 3{,}16\\ 7{,}07 & 6{,}08 & 5{,}10 & 4{,}00 & 3{,}00 & 2{,}00 & 1{,}00 & 0 & 1{,}12 & 2{,}24\\ 8{,}02 & 7{,}02 & 6{,}02 & 5{,}02 & 4{,}03 & 3{,}04 & 2{,}06 & 1{,}12 & 0 & 1{,}12\\ 9{,}00 & 8{,}00 & 7{,}00 & 6{,}08 & 5{,}10 & 4{,}12 & 3{,}16 & 2{,}24 & 1{,}12 & 0 \end{matrix};$$

универсальное множество $x = (0:1:9)'$ —

$$M_{\text{УМ}}=\begin{matrix} 0 & 1{,}00 & 2{,}00 & 3{,}00 & 4{,}00 & 5{,}00 & 6{,}00 & 7{,}00 & 8{,}00 & 9{,}00\\ 1{,}00 & 0 & 1{,}00 & 2{,}00 & 3{,}00 & 4{,}00 & 5{,}00 & 6{,}00 & 7{,}00 & 8{,}00\\ 2{,}00 & 1{,}00 & 0 & 1{,}00 & 2{,}00 & 3{,}00 & 4{,}00 & 5{,}00 & 6{,}00 & 7{,}00\\ 3{,}00 & 2{,}00 & 1{,}00 & 0 & 1{,}00 & 2{,}00 & 3{,}00 & 4{,}00 & 5{,}00 & 6{,}00\\ 4{,}00 & 3{,}00 & 2{,}00 & 1{,}00 & 0 & 1{,}00 & 2{,}00 & 3{,}00 & 4{,}00 & 5{,}00\\ 5{,}00 & 4{,}00 & 3{,}00 & 2{,}00 & 1{,}00 & 0 & 1{,}00 & 2{,}00 & 3{,}00 & 4{,}00\\ 6{,}00 & 5{,}00 & 4{,}00 & 3{,}00 & 2{,}00 & 1{,}00 & 0 & 1{,}00 & 2{,}00 & 3{,}00\\ 7{,}00 & 6{,}00 & 5{,}00 & 4{,}00 & 3{,}00 & 2{,}00 & 1{,}00 & 0 & 1{,}00 & 2{,}00\\ 8{,}00 & 7{,}00 & 6{,}00 & 5{,}00 & 4{,}00 & 3{,}00 & 2{,}00 & 1{,}00 & 0 & 1{,}00\\ 9{,}00 & 8{,}00 & 7{,}00 & 6{,}00 & 5{,}00 & 4{,}00 & 3{,}00 & 2{,}00 & 1{,}00 & 0 \end{matrix}.$$

На основе матриц близости $M_{\text{УМ}}$ $M_{\text{НМ}}$ получены иерархические структуры УМ и НМ (рис. 1) для двух случаев кластеризации: максимальное (complete) и минимальное (single) расстояния между элементами.

Для исходного НМ (см. рис. 1, *а*) x = (0:1:9) ′, y1 = trapmf(x, [2 3 7 9]); для структуры УМ (см. рис. 1, *б*) x = (0:1:9)′, y=pdist(x,′euclidean′), z=linkage(y, ′complete′), dendrogram((z),4); y=pdist(x, ′euclidean′), z=linkage(y,′single′), dendrogram((z),4); для структуры НМ (см. рис. 1, *в*) x = (0:1:9)′, y1 = trapmf(x, [2 3 7 9]), x2=[x y1], y=pdist(x2,′euclidean′), z=linkage(y,′complete′), dendrogram((z),4); y=pdist(x2, ′euclidean′), z=linkage(y, ′single′), dendrogram((z),4) .

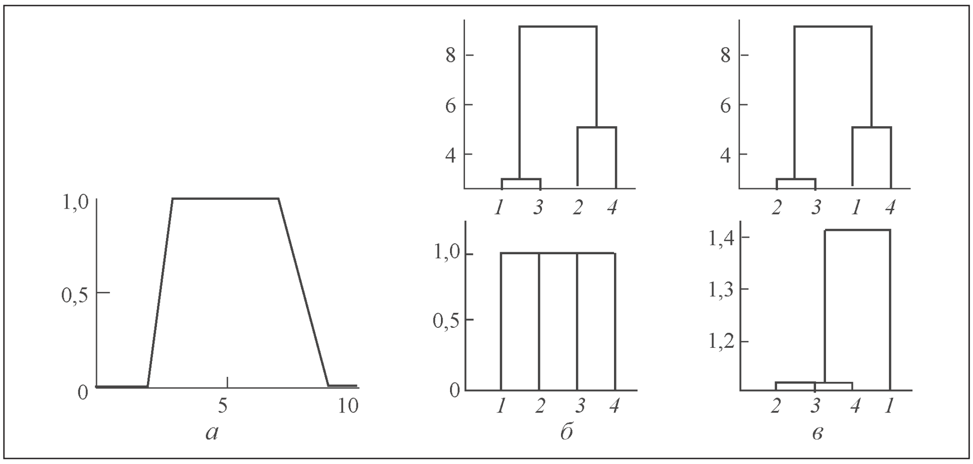

Рис. 1. Иерархические структуры: *а* — исходное НМ; *б* и *в* — структуры УМ и НМ

Полученные структуры визуально различны. Например, при кластеризации по критерию $\max\limits_{x^{(i)},\, x^{(j)} \in X} d\,(x^{(i)}, x^{(j)})$ для УМ кластеры образуют структуру $\{(1 \bigcup 3) \bigcup (1 \bigcup 3)\}$, для НМ — структуру $\{(2 \bigcup 3) \bigcup (1 \bigcup 4)\}$, хотя практически они совпадают в 2-адическом базисе (имеют одинаковые 2-адические числа). Аналогично это происходит и при кластеризации по критерию $\min\limits_{x^{(i)},\, x^{(j)} \in X} d\,(x^{(i)}, x^{(j)})$.

***P*-адический анализ.** Признав объективность существования иерархической структуры как атрибута НМ, приходим к *p*-адической, или неархимедовой математике. В архимедовой метрике реализован постулат о том, что в природе все можно измерять с помощью линейных мер, а в *p*-адическом анализе (основа анализа иерархических структур) действует неархимедова (фрактальная) метрика, в которой понятие измерения величин приобретает иное содержание.

Деревья, моделирующие НМ, можно представлять как схемы причинно-следственных связей взаимодействия объектов в различных процессах в соответствии с заданным простым числом *p*, которое соответствует физическому параметру. Номер уровня иерархии равен степени увеличения разрешения наблюдаемой структуры кластеров. В рассматриваемом случае причинно-следственные связи такие: для УМ структурная матрица M_U^{Str}, а для НМ — $M_{\tilde{5}_{\text{trapmf}}}^{Str}$, т.е. разница в структуре определяет причину — факт неопределенности, при этом уровень неопределенности виден на бинарном дереве.

Приведем очевидное утверждение: любое регулярное дерево имеет ультраметрическую структуру [18] . Напомним, что ультраметричности пространства H соответствует сильное неравенство треугольника (СНТ). Это означает, что расстояния r_{AB}, r_{BC} и r_{AC} между любыми тремя точками A, B, C в пространстве H удовлетворяют условию $r_{AC} \le \max\{r_{AB}, r_{BC}\}$. Бинарные деревья, полученные на основе матрицы расстояний посредством кластеризации объектов методом МНУС $(\max_{x^{(i)},\, x^{(j)} \in X} d(x^{(i)}, x^{(j)}))$ и МНБС $(\min_{x^{(i)},\, x^{(j)} \in X} d(x^{(i)}, x^{(j)}))$, — ультраметрические, так как для любых трех элементов i, j, k справедливо СНТ, которое является главным признаком ультраметрического пространства и записывается в виде $d(x_i, x_k) \le \max(d(x_i, x_1), d(x_1, x_k))$ или $d(x_i, x_k) > \min(d(x_i, x_1), d(x_1, x_k))$.

Ультраметрика (ультраметрическое расстояние) по определению удовлетворяет СНТ. Усиление метрики естественным образом порождает таксономические отношения между объектами, иерархически объединяя их в кластеры, но при этом приводит к неожиданным математическим результатам. Аксиома Архимеда о том, что любой отрезок можно перекрыть конечным числом наложений меньшего отрезка, для ультраметрического расстояния не выполняется. Поэтому в ультраметрическом пространстве невозможно пройти большой путь, совершив серию малых перемещений. Любое число шагов фиксированной длины в целом составит путь длиной не больше одного шага. Исследовать ультраметрическое пространство «малыми шагами» невозможно, необходимо делать шаги, сопоставимые с размерами исследуемой области. Заметим, что НМ и УМ, на котором определено данное НМ, в ультраметрическом пространстве в ряде случаев обладают одинаковыми свойствами.

Несоответствие ультраметрического пространства архимедовой метрике делает проблематичным описание процессов вещественными числами, поскольку движение в ультраметрическом пространстве нельзя описать с помощью малых перемещений. В этой связи использование дифференциального исчисления и всех дифференциальных уравнений математической физики становится проблематичным (и даже невозможным), что также ставит под сомнение значимость ФП и всех парадигм теории НМ.

P-адическая топология. Пусть p — простое число в целых $\mathbb{Z}$. Используя p, можно определить метрику на рациональных числах Q через ограничение на $\mathbb{Z}$. Для каждого $a \in \mathbb{Z}$ определим p-величину $\nu_p(a)$ как наибольшую степень k, для которой p^k делит a (при условии $\nu_p(0) := \infty$). Такая функция есть расширенной p-адической оценкой ν_p: $Q \to \mathbb{Z}$ через $\nu_p(a/b) = \nu_p(a) - \nu_p(b)$ для всех рациональных чисел a/b .

Расстояние между двумя рациональными числами, x и y, можно определить как $d(x, y) = p^{-\nu_p(x-y)}$. Нетрудно видеть, что это есть определение метрики на Q, в котором близость к нулю эквивалентна высшей делимости на простое p. Пополнение рациональных чисел в этой топологии является полем p-адических чисел Q_p, а пополнение $\mathbb{Z}$ — подкольцом p-адических целых — $\mathbb{Z}_p$. Любое p-адическое целое имеет уникальное расширение (как сходящийся ряд) в форме $\sum_{n=0}^{\infty} a_p p^n$, где a_p — целое в диапазоне $0 \le a_p < p$.

Приведем несколько определений, необходимых для дальнейшего понимания изложения [19—21] :

1. Элемент $x \in \mathbb{Z}_p$ имеет инверсию в $\mathbb{Z}_p$, если и только если $|x|_p = 1$.

2. Если x — ненулевой элемент из $\mathbb{Z}_p$, то $x = p^{\mathrm{ord}_p(x)} y$, где $y \in \mathbb{Z}_p$, $|y|_p = 1$.

Запишем множество $p\mathbb{Z}_p \triangleq \{py : y \in \mathbb{Z}_p\}$. Тогда $p\mathbb{Z}_p$ — максимальный идеал $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{Z}_p / p\mathbb{Z}_p$ есть поле из p элементов. Аддитивное комножество $p\mathbb{Z}_p$, $1 + p\mathbb{Z}_p, ..., p-1+p\mathbb{Z}_p$ формирует разбиение на $\mathbb{Z}_p$. Для каждого $j \in \{0, 1, 2, ..., p-1\}$ имеем $j + p\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x-j|_p < 1\} = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x-j|_p < p^{-1}\}$.

Пусть $p^n\mathbb{Z}_p \triangleq \{p^n y : y \in \mathbb{Z}_p\}$ ($n \in N$). Комножества $p^n\mathbb{Z}_p, 1 + p^n\mathbb{Z}_p, ...$ $..., p^{n-1} + p\mathbb{Z}_p$ формируют разделение $\mathbb{Z}_p$. Для каждого $j \in \{0, 1, \ldots, p^n - 1\}$ имеем $j + p^n\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x-j|_p < p^{-n+1}\} = \{x \in j + p^n\mathbb{Z}_p : |x-j|_p \le p^{-n}\}$.

Пусть $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ — простое число. Для произвольного ненулевого целого числа a положим $\mathrm{ord}_p\, a$ равным кратности вхождения p в разложение a на простые множители, т.е. наибольшему целому неотрицательному числу m, для которого $a \equiv 0 \pmod{p^m}$. Запись $a \equiv b \pmod{c}$ означает, что c делит $(a - b)$. Например, $\mathrm{ord}_5 35 = 1$, $\mathrm{ord}_5 250 = 3$, $\mathrm{ord}_2 96 = 5$, $\mathrm{ord}_2 97 = 0$. Если $a = 0$, то принимают $\mathrm{ord}_p\, 0 = \infty$. Определим на Q следующее отображение $|\cdot|_p$:

$$|x|_p = \begin{cases} \dfrac{1}{p^{\mathrm{ord}_p x}}, & x \ne 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Функция $|\cdot|_p$ является нормой на поле Q. Множества $a + p^N Z_p$ называют интервалами (дисками) и обозначают также через $a + (p^N)$. Все интервалы одновременно замкнуты и открыты [20]. Заметим, что функция $|\cdot|_p$ может принимать только «дискретное» множество значений, а именно

$\{p^n, n \in \mathbb{Z}\} \bigcup \{0\}$. Если $a, b \in \mathbb{N}$, то $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, p^n)$ тогда и только тогда, когда $|a-b|p \le 1/p^n$. Отображение $|\cdot|_p$ является неархимедовой нормой на $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}\,p$ — пополнение поля $\mathbb{Q}$ по p-адической норме $|-|p$.

Сечение p-адического числа $A = (a_0, a_1, a_2, ...)_p$ длины n — целое неотрицательное число $A_n = a_0 p^0 + ... + a_1 p^1 + a_2 p^2 + ... + a_n p^n$. Сумма p-адических чисел A и B есть $C = A + B$ такое, что для любого n выполняется равенство $C_n = A_n + B_n \,(\mathrm{mod}\, p^{n+1})$. Аналогично определяется произведение целых чисел.

Единица есть p-адическое число $E = (1, 0, 0, 0, \ldots)_p$. Натуральному числу n сопоставим p-адическое число N, равное сумме $E + E + \ldots + E$ из n сла гаемых. Например, число 14 в 2-адической записи имеет вид (0, 1, 1, 1) или $0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3$, в 3-адической записи — соответственно $(2, 1, 1, 0, \ldots)_3$ или $2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^3 + \mathrm{O}(3^4)$.

Множество X с заданной в нем метрикой d называется метрическим пространством. Одно множество X может включать много различных структур метрического пространства (X, d). Часто в качестве множества X рассматривают поля — множества с двумя бинарными операциями, «+» и «·», такими, что поле (F) является коммутативной группой относительно операции «+», а $F \bigcup \{0\}$ — относительно операции «·» при выполнении закона дистрибутивности. Будем рассматривать поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и поле вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Основную норму на поле рациональных чисел определяет абсолютная величина $|x|$. Индуцированная ею метрика $d(x, y) = |x - y|$ совпадает с обычным расстоянием на числовой прямой. Приведем определение из работы [20]. Две точки близки, если их разница делима на большую степень простого p: $d(x, y) = |x - y|_p$. Таким образом, два целых числа $x, y \in \mathbb{Z}$ будут близкими в соответствии с p-адической метрикой, если $p^n | x - y$ при большом значении n, т.е. если $x \equiv y \bmod p^n$ при большом значении n.

Пример. В 7-адической метрике $d(2, 51)_7 < d(1, 2)_7$, так как $d(2, 51) = |51-2|_7 = |49|_7 = |7^2|_7 \to 7^{-2} = \frac{1}{49}$, $d(1,2) = |2-1|_7 = |1|_7 = |7^0|_7 \to 7^0 = 1$. В 2-адической метрике $d(2, 51)_2 = d(1,2)_2$, так как $d(2,51)_2 = |51-2|_2 = |49|_2 = |2^0 + 2^4 + 2^5|_2 \to 2^0 = 1$, $d(1,2)_2 = |2-1|_2 = |1|_2 = |2^0|_2 \to 2^0 = 1$. Поле p-адических чисел является неупорядоченым, имеется несколько важных частичных порядков, связанных с $\mathbb{Q}_p$.

P-адическая абсолютная величина индуцирует метрику на $\mathbb{Q}$ через установку $d_p(a, b) = |a-b|_p$, что действительно является расстоянием (выполняются аксиомы расстояния). В соответствии с этой метрикой два элемента, a и b, близки, если $|a-b|_p$ мало, а значит, в том числе, что

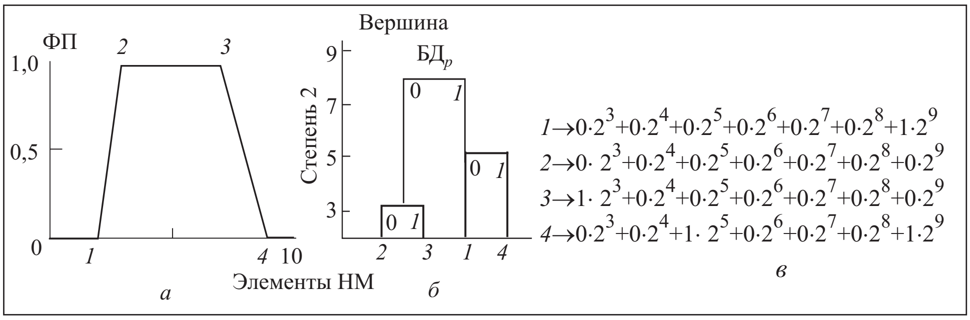

Рис. 2. Пример анализа НМ в 2-адическом базисе: *а* — НМ; *б* — БДр, соответствующее НМ $\tilde{5}_{\text{trapmf}}$; *в* —пути элементов *1 — 4* на БДр от начала к вершине

$\text{ord}_p\,(a-b)$ велико, т.е. большая степень p делит $a-b$. Особенности строения p-адических чисел придают их совокупностям, т.е. полям $\mathbb{Q}_m$ и $\mathbb{Q}_p$ ($m > 0$) p-адических чисел кластерную, или фрактальную структуру. Все множество натуральных чисел в p-адической норме сжимается до кластера $\mathbb{Z}_p = [1, 2, 3, ..., p-1]^n$. В общем случае поле $\mathbb{Z}_p$ (или $\mathbb{Q}_p$) состоит из своих копий $\mathbb{Z}_p = \bigcup\limits_{n\to\infty} p^n \mathbb{Z}_p$, где умножение на степень p означает увеличение степени разрешения наблюдения кластера в p раз.

Экспериментальное исследование НМ в *p*-адическом базисе. Множество p-адических чисел представим в виде дерева с ветвлением на p частей в каждой вершине. Такое дерево называют иерархическим, или лексикографическим. Если следовать по некоторому выделенному пути дерева (по его ветвям — векторизация матрицы БДр), последовательно выписывая цифры в вершинах, получим конкретное число, т.е. каждому пути соответствует определенное число, и наоборот.

На рис. 2 показаны $\text{НМ}_{\tilde{5}_{\text{trapmf}}} \overset{\Delta}{=} \{2/0\ 3/1\ 7/1\ 9/0\}$, $\tilde{5}_{\text{trapmf}} \in U = \{2\,3\,7\,9\}$, БДр НМ, закодированное алфавитом {0, 1}, и вычислены 2-адическое (фрактальное) число и 2-адический порядок для НМ $\tilde{5}_{\text{trapmf}} \to a := 1064$; $>\text{evalp}\,(a, 2, 9) \to 2^3 + 2^5 + 2^{10}$; $>\text{ordp}(a, 2) \to 3$ (вычисления выполнены в ПММ Maple).

Рассмотрим дендрограмму D, изображенную на рис. 2, *б*. Если двигаться вниз от вершины вдоль маршрута в D, то данные $x = x_i$ будут получать метки 0 или *1* вдоль пути. Получаем 2-адическое кодирование $x = \sum\limits_{\text{уровень } \nu} a_\nu 2^\nu \in \mathbb{Q}_2$, где коэффициент a_ν — число, помеченное на уровне ν (0 либо *1*). Следует заметить, что эта процедура порождает конечные 2-адические расширения рациональных чисел. Суть дендрограммы состоит в том, что грани можно интерпретировать как p-адические диски, края которых определяются максимальным нетривиальным их включением. Известно, что каждый диск имеет точно p максимально меньших поддисков, лежащих в точно одном минимально большом диске. Следовательно, каждая вершина имеет точно p граней- детей и одну родительскую вершину.

Пусть p — простое число. Если x — любое рациональное число, отличное от нуля, то его можно представить в форме $x = p^n \dfrac{a}{b}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$ — просты относительно p и $n \in \mathbb{Z}$. Можно определить $|x|_p = p^{-n}$, $|0|_p = 0$ и $\operatorname{ord}_p(x) = n$, $\operatorname{ord}_p(0) = \infty$, что удовлетворяет следующим свойствам:

1) $|x|_p \geq 0, |x|_p = 0$, если и только если $x = 0$;

2) $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$ (строгое неравенство треугольника), $|x+y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$, если $|x|_p \neq |y|_p$;

3) $|x \cdot y|_p = |x|_p \cdot |y|_p$.

Подставив ord_p вместо $|\cdot|_p$, свойства 2 и 3 запишем в виде:

$$\operatorname{ord}_p(x+y) \geq \min\{\operatorname{ord}_p(x), \operatorname{ord}_p(y)\}, \; \operatorname{ord}_p(x \cdot y) = \operatorname{ord}_p(x) + \operatorname{ord}_p(y),$$

где $|\cdot|_p$ — p-адическая величина; $\operatorname{ord}_p(\cdot)$ — p-адический порядок. Сложение и умножение p-адических чисел определены на $\mathbb{Q}_p$ на основе расширения Гензеля [18—21]:

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n p^n + \sum_{n=M}^{\infty} a_n p^n = \sum_{n=\min(N,M)}^{\infty} (a_n + b_n) p^n,$$

$$\left(\sum_{n=N}^{\infty} a_n p^n\right)\left(\sum_{n=M}^{\infty} a_n p^n\right) = \sum_{n=N+M}^{\infty} \left(\sum_{i=N}^{n-M} a_i b_{n-i}\right) p^n.$$

Любой алгоритм кластеризации с использованием p-адической метрики не предполагает ее изменения при измерении расстояния между непересекающимися кластерами C_1 и C_2, так как $\operatorname{dist}_p(C_1, C_2) = |x-y|_p$ для любого $x \in C_1$, $y \in C_2$. Для НМ кластеры, как правило, соответствуют α-уровням.

На рис. 3 показаны НМ$_{\tilde{5}_{\text{trapmf}}} \triangleq \{2/0 \;\; 3/1 \;\; 7/1 \;\; 9/0\}$, $\tilde{5}_{\text{trapmf}} \in U = \{2 \;\; 3 \;\; 7 \;\; 9\}$, БДр НМ и УМ, закодированное алфавитом $\{0, 1\}$, структурные матрицы БДр и вычислены 2-адическое (фрактальное) число и 2-адический порядок для НМ и УМ: $\tilde{5}_{\text{trapmf}} \to a := 1064, U = \{2 \;\; 3 \;\; 7 \;\; 9\} \to a := 1064 :> \text{evalp}\,(a, 2, 9) \to$ $\to 2^3 + 2^5 + 2^{10}$; $>$ ordp $(a, 2) \to 3$.

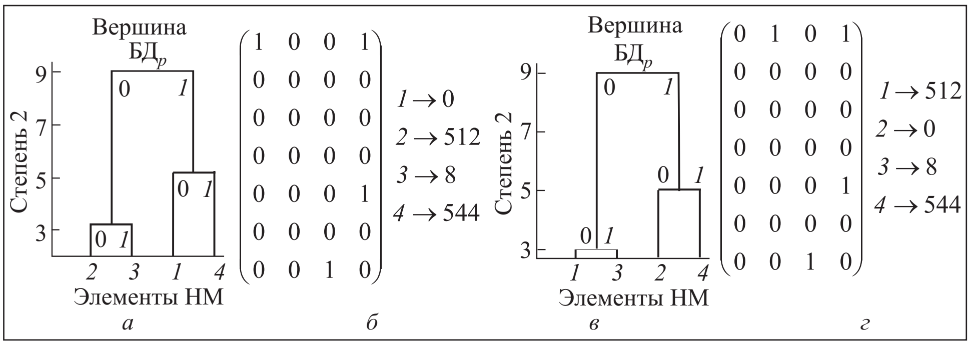

Рис. 3. Иерархические структуры и двуадические матрицы бинарных деревьев: *а* — НМ $\tilde{5}_{\text{trapmf}}$; *б, г* — фрактальное число $\sum\limits_{1+2+3+4} = 1064 = 2^3 + 2^5 + 2^{10}$; *в, г* — УМ $U = \{2\ 3\ 7\ 9\}$

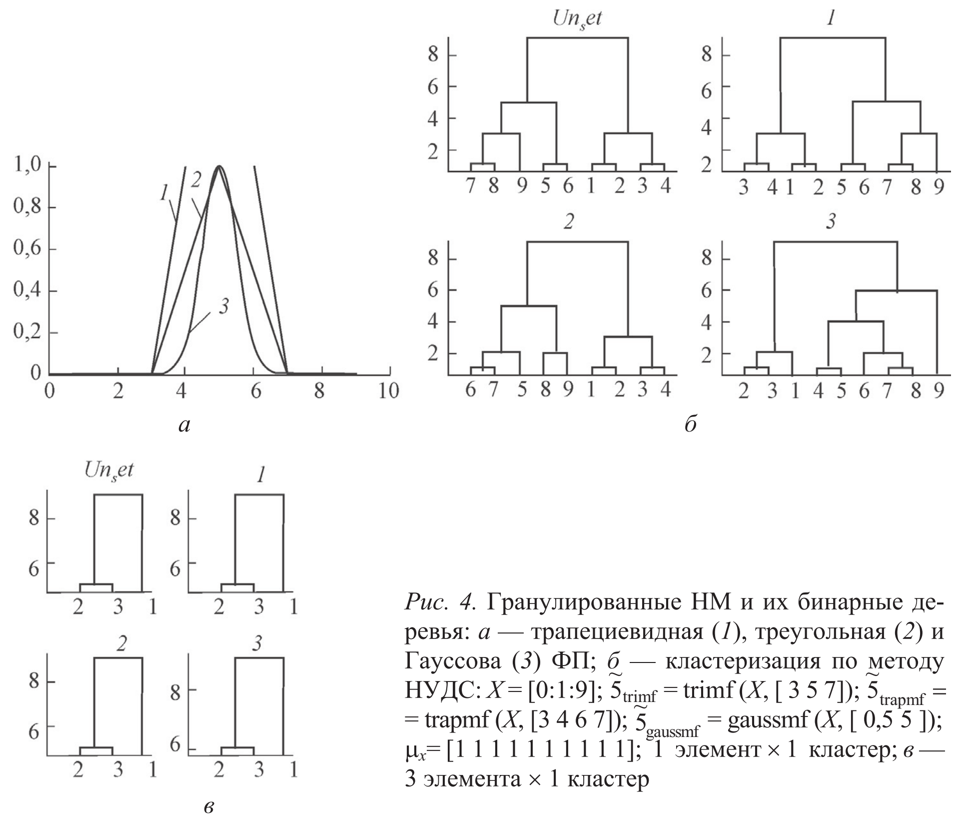

Рис. 4. Гранулированные НМ и их бинарные деревья: *а* — трапециевидная (*1*), треугольная (*2*) и Гауссова (*3*) ФП; *б* — кластеризация по методу НУДС: $X = [0{:}1{:}9]$; $\tilde{5}_{\text{trimf}} = \text{trimf}\,(X, [\ 3\ 5\ 7])$; $\tilde{5}_{\text{trapmf}} = \text{trapmf}\,(X, [3\ 4\ 6\ 7])$; $\tilde{5}_{\text{gaussmf}} = \text{gaussmf}\,(X, [\ 0{,}5\ 5\ ])$; $\mu_x = [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]$; 1 элемент × 1 кластер; *в* — 3 элемента × 1 кластер

В результате вычисления фрактальных чисел, соответствующих НМ $\tilde{5}_{\mathrm{trapmf}}$ и УМ $U = \{2\ 3\ 7\ 9\}$, $\tilde{5}_{\mathrm{trapmf}} \in U$, получено практически полное совпадение структурных характеристик данных объектов. Заметим, что все пути на БДр определелены в ультраметрике.

На рис. 4 приведены гранулированные НМ, сформированные на основе нечеткой переменной (НП) с трапециевидной, треугольной и Гауссовой ФП. Построены бинарные деревья для предложенных типов НП при различном числе кластеров (в данном случае 9 и 3). Нетрудно видеть, что и в первом и во втором случаях структуры УМ (Un_set) и НМ трех типов практически совпадают.

Выводы

Теория НМ позволила достаточно просто представлять неопределенности при свободном выборе ФП и посредством дефадзификации получать четкий (единственный) результат. На самом деле неопределенность сложнее моделей, предлагаемых теорией НМ.

В результате изучения строения сложных объектов (в условиях неопределенности объект априори необходимо признавать сложным) установлено, что в них практически до произвольно малых масштабов прослеживается некая структура, никогда не сводимая к одной точке, в то время как дефадзификация НМ обязательно сводится исключительно к точке (одному значению).

Теория НМ практически не рассматривает влияние структуры НМ на его характеристики, хотя игнорирование структуры не может не влиять на представление неопределенности. Для анализа структуры НМ, ее построения применяются методы ИК, что дает возможность естественного перехода к иерархической структуре, позволяет отказаться от традиционных парадигм при анализе данных и открывает новые перспективы в вопросах организации данных, включая, прежде всего, извлечение знаний из огромных, высокоразмерных, разнородных МД, таких, как, например, трафик компьютерных сетей, экономические и другие системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Минаев Ю.Н., Филимонова О.Ю., Минаева Ю.И.* Иерархическая кластеризация нечетких данных // Электрон. моделирование. — 2012. — **34**, № 4. — С. 3—22.
2. *Zadeh L.A.* Toward a theory of fuzzy information granulation and its centralityin human reasoning and fuzzy logic// Fuzzy Sets and Systems. — 1997. — Vol. 90. — P. 111—127.
3. *Zadeh L.A.* Toward a perception-based theory of probabilistic reasoning with imprecise probabilities// J. of Statistical Planning and Inference. — 2002. — Vol. 105. — P. 233—264.
4. *Aja-Fernández S., Alberola-López C.* Fuzzy Granules as a BasicWord Representation for Computing with Words//SPECOM'2004: 9th Conf. Speech and Computer. — St. Petersburg, Russia, September, 20—22. 2004.ISCA Archive. — [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.isca-speech.org/archive

5. *Тарасов В.Б.* Нестандартные множества и гранулированные вычисления. Пятые Поспеловские чтения «Искусственный интеллект — проблемы и перспективы». — [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.posp.raai.org/data/posp2011/ tarasov.ppt
6. *Pedrycz W.* Handbook of Granular Computing. Ed. by W. Pedrycz, A. Skowron and V. Kreinovich. — John Wiley & Sons, 2008. — 1150 p.
7. *Simon H.A.* The Sciences of the Artificial. — Cambridge: MIT Press, 1996. — 216 p.
8. *Минаев Ю.Н., Филимонова О.Ю.* Нечеткая математика на основе тензорных моделей неопределенности. I. Тензор-переменная в системе нечетких множеств// Электрон. моделирование. — 2008. — **30**, № 1.— С. 43—59.
9. *Минаев Ю.Н., Филимонова О.Ю.* Нечеткая математика на основе тензорных моделей неопределенности. II.Нечеткая математика в тензорном базисе. — Там же. — 2008. — **30**, № 2. — С. 4—21.
10. *Минаев Ю.Н., Филимонова О.Ю., Минаева Ю.И.* Тензорные модели НМ-гранул и их применение для решения задач нечеткой арифметики// Искусственный интеллект.— 2013. — № 2. — С. 28—32.
11. *Colda T.G., Bader B.W.* Tensor decompositions and applications. // SIAM Review, Algorithm. — 2009. — Vol. 51, No 3. — P. 455—500.
12. *Mirkin B.* Clustering for Data Mining. — Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC. — 2005.
13. *Murtagh F.* On ultrametricity, data coding, and computation// J. Classification. — 2004. — Vol. 21. — P. 167—184.
14. *Bradley P.E.* Mumford dendrograms// The Computer Journal. — 2010. — Vol. 53, No 4. — P. 393—404.
15. *Delgado M., Gómez-Skarmeta A.F., Vila A.* On the Use of Hierarchical Clustering in Fuzzy// Modeling. International Journal of Approximate Reasoning. — 1996. — No 14. — P. 237—257.
16. *Skowron A., Rauszer C.* The discernibility matrices and functions in information systems// Decision Support by Experience-Application of the Rough Sets Theory. Ed. R. Slowinski. — Kluwer Academic Publishers, 1992. — P. 331—362.
17. *Хренников А.Ю.* Неархимедов анализ и его приложения. — М. : «Физматлит», 2003. — 216 с.
18. *Nechaev S.K., Vasilyev O.A.* On metric structure of ultrametric spaces/ arXiv:cond-mat/ 0310079v1 [cond-mat.stat-mech] 3 Oct 2003.
19. *Schikhof W.H.* Ultrametrc calculus. — (Cambridge studies in advansed mathematics; 4) 1. P-adic numbers. — Cambridge University Press, 1984. — 317 p.
20. *Коблиц Н.* Р-адический анализ и дзета-функции/ Пер. с англ. В.В. Шокурова. — М. : Мир, 1981. —192 с.
21. *Каток С.Б. Р*-адический анализ в сравнении с вещественным / Пер. с англ. П.А. Колгушкина. — М. : МЦНМО, 2004. — 112 с.

Yu.N. Minaev, O.Yu. Filimonova, J.I. Minaeva

STRUCTURED FS-GRANULES
IN PROBLEMS OF GRANULAR COMPUTING

The questions of presentation of FS-granules in the form of 2-adical tree as a way of determination of hierarchical structure FS and its account under further use of FS-granules in the system of granular computing are considered. The posibility of the structure account by calculation of 2-adical (fractal) numbers, defined on the basis of structured matrix, characterizing binary tree, and 2-adical order is shown. FS is a subset of ordered pairs {value/ belonging function} obtains an additional objective characteristic in the form of structured matrixes, that extends potentialities of the FS theory in deciding the problems of management in conditions of uncertainty. The presented examples show a degree of the FS structure influence on its characteristics.

K e y w o r d s: fuzzy set, granular computing, p-adical analysis, matrixes of similarity, binary tree.

REFERENCES

1. *Minaev Yu.N., Filimonova O.Yu., Minaeva J.I.* Hierarchic clusterization of fuzzy data // Electron. Modeling. — 2012. — Vol. 34, No 4. — P. 3—22 (in Russian).
2. *Zadeh L.A.* Toward a theory of fuzzy information granulation and its centralityin hu-man reasoning and fuzzy logic // Fuzzy Sets and Systems. — 1997.— Vol. 90. — P. 111—127.
3. *Zadeh L.A.* Toward a perception-based theory of probabilistic reasoning with imp-recise probabilities// J. of Statistical Planning and Inference. — 2002.— Vol. 105. — P. 233—264.
4. *Aja-Fernandez S., Alberola-Lopez C.* Fuzzy Granules as a Basic Word Representation for Computing with Words // SPECOM'2004: 9th Conf. Speech and Computer. — St. Petersburg, Russia, September, 20—22, 2004. ISCA Archive. [Electron resource]. — Access regime: http://www.isca-speech.org/archive
5. *Tarasov V.B.* Nonstandard Sets and Granulated Calculations. The Fifth Pospelov's Readings «Artificial Intellect – Problems and Prospects». — [Electron resource]. — Access Regime: http://www.posp.raai.org/data/posp 2011/tarasov.ppt (in Russian).
6. *Pedrycz W.* Handbook of Granular Computing / Ed. by W. Pedrycz, A. Skowron and V. Kreinovich. — John Wiley & Sons, 2008. — 1150 p.
7. *Simon H.A.* The Sciences of the Artificial. — Cambridge: MIT Press, 1996. — 216 p.
8. *Minaev Yu.N., Filimonova O.Yu.* Fuzzy mathematics based on tensor models of indeterminacy. I. Tensor variable in the system of fuzzy sets // Electron. Modeling. — 2008. — Vol. 30, No 1.— P. 43—59 (in Russian).
9. Minaev *Yu.N., Filimonova O.Yu.* Fuzzy mathematics based on tensor models of indeterminacy. II. Fuzzy mathematics in tensor basis. – Ibid. — 2008. — Vol. 30, No 2.— P. 4—21 (in Russian).
10. Minaev *Yu.N., Filimonova O.Yu., Minaeva J.I.* Tensor models of NM-granules and their use to solve the problems of fuzzy arithmetic // Artificial Intellect. — 2013. — No 2. — P. 28—32 (in Russian).
11. *Colda T.G., Bader B.W.* Tensor decompositions and applications. // SIAM Review, Algorithm. — 2009.— Vol. 51, No 3. — P. 455—500.
12. *Mirkin B.* Clustering for Data Mining. — Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC. — 2005.
13. *Murtagh F.* On ultrametricity, data coding, and computation// J. Classification. — 2004. — Vol. 21. — P. 167—184.
14. *Bradley P.E.* Mumford dendrograms // The Computer Journal.— 2010. — Vol. 53, No 4. — P. 393—404.
15. *Delgado M., Gymez-Skarmeta A.F., Vila A.* On the Use of Hierarchical Clustering in Fuzzy// Modeling // International Journal of Approximate Reasoning. — 1996. — No 14. — P. 237—257.
16. *Skowron A. and Rauszer C.* The discernibility matrices and functions in information systems // Decision Support by Experience — Application of the Rough Sets Theory. Ed. R. Slowinski. Kluwer Academic Publishers, 1992. — P. 331—362.
17. *Khrennikov A.Yu.* Non-Archimedian Analysis and Its Applications. — Moscow: Fizmatlit, 2003. — 216 p.(in Russian).
18. *Nechaev S.K., Vasilyev O.A.* On metric structure of ultrametric spaces / arXiv:cond-mat/0310079v1 [cond-mat.stat-mech] 3 Oct. 2003.

19. *Schikhof W.H.* Ultrametric Calculus. — (Cambridge studies in advanced mathematics; 4) 1. P-adic numbers. — Cambridge University Press, 1984. — 317 p.
20. *Coblitz N. R*-Adic Analysis and Dzeta-Functions / Trans. from English by V.V. Shokurov. — Moscow: Мир, 1981. — 192 p.(in Russian).
21. *Katok S.B. R*-Adic Analysis in Comparison with Substantial One / Trans. from English by P.A. Kolgushkin. — Moscow: MCSMA, 2004. — 112 p.(in Russian).

Поступила 23.12.13;
после доработки 16.06.14

МИНАЕВ Юрий Николаевич, д-р техн. наук, профессор кафедры компьютерных систем и сетей Национального авиационного университета Украины. В 1959 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — интеллектуальный анализ данных, применение интеллектуальных технологий в системах принятия решений.

ФИЛИМОНОВА Оксана Юрьевна, канд. техн. наук, доцент Киевского национального университета строительства и архитектуры. В 1989 г. окончила Киевский инженерно-строительный ин-т. Область научных исследований — интеллектуальный анализ данных.

МИНАЕВА Юлия Ивановна, канд. техн. наук, доцент кафедры основ информатики Киевского национального университета строительства и архитектуры, который окончила в 2008 г. Область научных исследований — интеллектуальный анализ данных.