УДК 681.3:519.711.3:517.958:621.313:669

В.Ф. Евдокимов, чл.-кор. НАН Украины,
Е.И. Петрушенко, канд. техн. наук
Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
e-mail: dep_7@ voliacable .com)

Интегральная модель трехмерного распределения вихревых токов в непрерывно литой заготовке круглого сечения при электромагнитном перемешивании в вертикальной МНЛЗ. I

Получена скалярная система интегральных уравнений, описывающая в цилиндрической системе координат трехмерное распределение вихревых токов в системе непрерывно литая заготовка (НЛЗ) круглого сечения—кристаллизатор при электромагнитном перемешивании в вертикальной машине НЛЗ. Исходной является векторная система интегральных уравнений. Рассмотрена вспомогательная задача, когда влияние вихревых токов в кристаллизаторе не учитывается.

Отримано скалярну систему інтегральних рівнянь, яка описує в циліндричній системі координат тривимірний розподіл вихрових струмів в системі безперервно лита заготовка (БЛЗ) круглого перерізу—кристалізатор при електромагнітному перемішуванні у вертикальній машині БЛЗ. Вихідною є векторна система інтегральних рівнянь. Розглянуто допоміжну задачу, коли вплив вихрових струмів в кристалізаторі не враховано.

К л ю ч е в ы е с л о в а: *интегральная модель, трехмерное распределение, вихревые токи, непрерывно литая заготовка, круглое сечение, электромагнитное перемешивание.*

При электромагнитном перемешивании трехмерное распределение вихревых токов в непрерывно литых заготовках (НЛЗ) как квадратного, так и круглого сечения [1, рис. 1] описываются векторной системой интегральных уравнений (ВСИУ) [2]. Однако, преобразование ВСИУ к скалярной СИУ (СкСИУ) в случаях квадратного и круглого сечения осуществляется по-разному: в первом случае используется декартова система координат, во втором — цилиндрическая система координат.

Векторная СИУ, описывающая трехмерное распределение вихревых токов в уединенной НЛЗ, находящейся в магнитном поле индуктора, в обмотках которого протекают изменяющиеся во времени токи. Пусть в однородной в магнитном отношении среде электромагнитное поле возбуждается квазистационарными токами в обмотках. Вектор плотности этих токов обозначим $\overline{\delta}_0$, а объем, занимаемый ими, — V_{o}. В заготовке, представляющей собой массивное проводящее тело объемом V_{c}, индуктируются вихревые токи плотностью $\overline{\delta}$.

Уравнения Максвелла для квазистационарного поля в проводящей среде с помощью соотношений $\overline{B} = \operatorname{rot} \overline{A}$, $\operatorname{div} \overline{A} = 0$,

$$\overline{E} = -\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \tag{1}$$

можно свести к уравнениям

$$\Delta \overline{A} = -\mu_0 \overline{\delta}, \tag{2}$$

$$\Delta \varphi = 0. \tag{3}$$

В однородной среде решение уравнения (2) имеет вид

$$\overline{A}\,(Q,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{V_{\text{o}}} \frac{\overline{\delta}_{\text{o}}(M,t)}{r_{QM}}\, d\upsilon_M + \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{V_{\text{c}}} \frac{\overline{\delta}\,(M,t)}{r_{QM}}\, d\upsilon_M. \tag{4}$$

Для определения входящих в (4) вихревых токов, плотность $\overline{\delta}$ которых неизвестна, необходимо воспользоваться соотношением (1). Подставляя (4) в (1), получаем

$$\frac{\overline{\delta}\,(Q,t)}{\lambda \gamma_{\text{c}}(Q)} + \int\limits_{V_{\text{c}}} \frac{\partial \overline{\delta}\,(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}}\, d\upsilon_M = -\int\limits_{V_{\text{o}}} \frac{\partial \overline{\delta}_{\text{o}}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}}\, d\upsilon_M - \frac{1}{\lambda} \operatorname{grad} \varphi,$$
$$Q \in V_{\text{c}}, \tag{5}$$

где

$$\lambda = \mu_0 / 4\pi. \tag{6}$$

Для определения скалярного потенциала φ в объеме проводника необходимо решить задачу Неймана для уравнения (3) при граничном условии

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{S_{\text{c}}} = -\left.\frac{\partial A_n}{\partial t}\right|_{S_{\text{c}}}, \tag{7}$$

где A_n— проекция вектора $\widetilde{A}$ на нормаль $\overline{n}_Q$ к поверхности проводника S_{c} в точке Q. Положительное направление нормали $\overline{n}_Q$ принято соответственно объему проводника V_{c} в окружающее пространство. Условие (7) является следствием условия $\delta_n = 0$ на $S_\text{с}$ и соотношения (1). С помощью потенциала простого слоя плотностью τ на поверхности $S_\text{с}$,

$$\varphi(Q,t) = \frac{1}{4\pi}\int_{S_\text{с}} \frac{\tau(M,t)}{r_{QM}}\, ds_M, \tag{8}$$

эта задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\tau(Q,t) + \frac{1}{2\pi}\int_{S_\text{с}} \tau(M,t)\frac{\cos(\widehat{\bar n_Q \bar r_{QM}})}{r_{QM}^2}\, ds_M = -2\frac{\partial A_n(Q,t)}{\partial t}, \quad Q \in S_\text{с}. \tag{9}$$

Подставив в уравнение (5) потенциал φ (8), а в уравнение (9) — потенциал $\bar A(Q,t)$ (4), получим

$$\frac{\bar\delta(Q,t)}{\lambda\gamma_\text{с}(Q)} + \int_{V_\text{с}} \frac{\partial\bar\delta(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\, d\upsilon_M + \frac{1}{\mu_0}\int_{S_\text{с}} \tau(M,t)\frac{\bar r_{QM}}{r_{QM}^3}\, ds_M =$$
$$= -\int_{V_\text{о}} \frac{\partial\bar\delta_\text{о}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\, d\upsilon_M, \quad Q \in V_\text{с}, \tag{10}$$

$$\tau(Q,t) + \frac{1}{2\pi}\int_{S_\text{с}} \tau(M,t)\frac{\cos(\widehat{\bar n_Q \bar r_{QM}})}{r_{QM}^2}\, ds_M + 2\lambda\int_{V_\text{с}} \frac{\partial\delta_{nQ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\, d\upsilon_M =$$
$$= -2\lambda\int_{V_\text{о}} \frac{\partial\delta_{0nQ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\, d\upsilon_M, \quad Q \in S_\text{с}. \tag{11}$$

С помощью ВСИУ (10) и (11) при заданных начальных условиях

$$\bar\delta(Q,O), \quad Q \in V_\text{с}, \quad \bar\delta_\text{о}(Q,O), \quad Q \in V_\text{о}, \tag{12}$$

можно рассчитать вихревые токи в массивном проводнике сложной формы в нестационарных режимах. Для преобразования ВСИУ (10),(11) к СкСИУ потребуются выражения ортов $\bar e_\rho(M)$, $\bar e_\psi(M)$ через орты $\bar e_\rho(Q)$, $\bar e_\psi(Q)$ [3, рис. 2] :

$$\bar e_\rho(M) = \bar e_\rho(Q)\cos(\psi_M - \psi_Q) + \bar e_\psi(Q)\sin(\psi_M - \psi_Q), \tag{13}$$

$$\bar e_\psi(M) = -\bar e_\rho(Q)\sin(\psi_M - \psi_Q) + \bar e_\psi(Q)\cos(\psi_M - \psi_Q). \tag{14}$$

Нетрудно показать, что вектор $\bar r_{QM}$ можно выразить через орты $\bar e_\rho(Q)$, $\bar e_\psi(Q)$, $\bar e_z$:

$$\bar r_{QM} = \bar e_\rho(Q)\, r_{QM}^{\rho_Q} + \bar e_\psi(Q)\, r_{QM}^{\psi_Q} + \bar e_z(Q)\, r_{QM}^{z_Q},$$

$$r_{QM}^{\rho_Q} = \rho_M \cos(\psi_M - \psi_Q) - \rho_Q\,,$$

$$r_{QM}^{\psi_Q} = \rho_M \sin(\psi_M - \psi_Q)\,,$$

$$r_{QM}^{z_Q} = (z_M - z_Q)\,,$$

$$\bar{r}_{QM}^{2} = (r_{QM}^{\rho_Q})^2 + (r_{QM}^{\psi_Q})^2 + (r_{QM}^{z_Q})^2 =$$

$$= \rho_M^2 + \rho_Q^2 - 2\rho_M \rho_Q \cos(\psi_M - \psi_Q) + (z_M - z_Q)^2,$$

$$r_{QM} = \sqrt{\rho_M^2 + \rho_Q^2 - 2\rho_M \rho_Q \cos(\psi_M - \psi_Q) + (z_M - z_Q)^2}.$$

Преобразование векторного интегрального уравнения (ВИУ)(10) для распределения вихревых токов в уединенной заготовке круглого сечения к СкСИУ в цилиндрической системе координат. Преобразуем ВИУ (10) к СкСИУ в цилиндрической системе координат. Для этого векторы $\bar{\delta}(Q,t)$, $\bar{\delta}(M,t)$, $\bar{\delta}_0(M_0,t)$, входящие в (10), запишем в цилиндрической системе координат:

$$\bar{\delta}(Q,t) = \delta_{\rho Q}(Q,t)\,\bar{e}_\rho(Q) + \delta_{\psi Q}(Q,t)\,\bar{e}_\psi(Q) + \delta_Z(Q,t)\,\bar{e}_Z,$$

$$\bar{\delta}(M,t) = \delta_{\rho M}(M,t)\,\bar{e}_\rho(M) + \delta_{\psi M}(M,t)\,\bar{e}_\psi(M) + \delta_Z(M,t)\,\bar{e}_z, \tag{15}$$

$$\bar{\delta}_{\text{o}}(M_{\text{o}},t) = \delta_{\text{o}\rho M_{\text{o}}}(M_{\text{o}},t)\,\bar{e}_\rho(M_{\text{o}}) + \delta_{\text{o}\psi M_{\text{o}}}(M_{\text{o}},t)\,\bar{e}_\psi(M_{\text{o}}) + \delta_{\text{o}ZM_{\text{o}}}(M_{\text{o}},t)\,\bar{e}_z.$$

Для того чтобы выразить векторы (15) через орты $\bar{e}_\rho(Q)$, $\bar{e}_\psi(Q)$, $\bar{e}_z$, используем выражения ортов $\bar{e}_\rho(M)$, $\bar{e}_\psi(M)$ через орты $\bar{e}_\rho(Q)$, $\bar{e}_\psi(Q)$ (13), (14):

$$\bar{\delta}(M,t) = \delta_{\rho M}(M,t)\,\bar{e}_\rho(M) + \delta_{\psi M}(M,t)\,\bar{e}_\psi(M) + \delta_Z(M,t)\,\bar{e}_z =$$

$$= \delta_{\rho M}(M,t)\,[\bar{e}_\rho(Q)\cos(\psi_M - \psi_Q) + \bar{e}_\psi(Q)\sin(\psi_M - \psi_Q)] +$$

$$= \delta_{\psi M}(M,t)\,[-\bar{e}_\rho(Q)\sin(\psi_M - \psi_Q) + \bar{e}_\psi(Q)\cos(\psi_M - \psi_Q)] +$$

$$+ \bar{e}_Z \bar{\delta}_Z(M,t) = \bar{e}_\rho(Q)\,\delta_{\rho Q}(M,t) + \bar{e}_\psi(Q)\,\delta_{\psi Q}(M,t) + \bar{e}_Z \delta_Z(M,t)\,, \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} \delta_{\rho Q}(M,t) &= \delta_{\rho M}(M,t)\cos(\psi_M - \psi_Q) - \delta_{\psi M}(M,t)\sin(\psi_M - \psi_Q),\\ \delta_{\psi Q}(M,t) &= \delta_{\rho M}(M,t)\sin(\psi_M - \psi_Q) + \delta_{\psi M}(M,t)\cos(\psi_M - \psi_Q). \end{aligned} \tag{17}$$

Аналогично преобразуем выражение для $\bar{\delta}_{\text{o}}(M_0,t)$:

$$\bar{\delta}_{\text{o}}(M_{\text{o}},t) = \delta_{\text{o}\rho M_{\text{o}}}(M_{\text{o}},t)\,\bar{e}_\rho(M_{\text{o}}) + \delta_{\text{o}\psi M_{\text{o}}}(M_{\text{o}},t)\,\bar{e}_\psi(M_{\text{o}}) + \delta_{\text{o}ZM_{\text{o}}}(M_{\text{o}},t)\,\bar{e}_z =$$

$$= \bar{e}_\rho(Q)\,\delta_{\text{o}\rho Q}(M_{\text{o}},t) + \bar{e}_\psi(Q)\,\delta_{\text{o}\psi Q}(M_{\text{o}},t) + \bar{e}_Z \delta_{\text{o}Z}(M_{\text{o}},t), \tag{18}$$

где

$$\delta_{\text{o}\rho Q}(M_{\text{o}},t)=$$
$$=\delta_{\text{o}\rho M_{\text{o}}}(M_{\text{o}},t)\cos(\psi_{M_{\text{o}}}-\psi_Q)-\delta_{\text{o}\psi M_{\text{o}}}(M_{\text{o}},t)\sin(\psi_{M_{\text{o}}}-\psi_Q),$$
$$\delta_{\text{o}\psi Q}(M_{\text{o}},t)=$$
$$=\delta_{\text{o}\rho M_{\text{o}}}(M_{\text{o}},t)\sin(\psi_{M_{\text{o}}}-\psi_Q)+\delta_{\text{o}\psi M_{\text{o}}}(M_{\text{o}},t)\cos(\psi_{M_{\text{o}}}-\psi_Q). \quad (19)$$

Подставим в (10) выражения (15), (16), (18):

$$\frac{\delta_{\rho Q}(Q,t)\,\bar{e}_\rho(Q)+\delta_{\psi Q}(Q,t)\,\bar{e}_\psi(Q)+\delta_{ZQ}(Q,t)\,\bar{e}_Z(Q)}{\lambda\gamma_{\text{c}}(Q)}+$$
$$+\int_{V_{\text{c}}}\frac{\partial\,[\delta_{\rho Q}(M,t)\,\bar{e}_\rho(Q)+\delta_{\psi Q}(M,t)\,\bar{e}_\psi(Q)+\delta_{ZQ}(M,t)\,\bar{e}_Z(M)]}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,dv_M+$$
$$+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_{\text{c}}}\tau\,(M,t)\frac{\bar{e}_\rho(Q)\,r_{QM}^{\rho Q}+\bar{e}_\psi(Q)\,r_{QM}^{\psi Q}+\bar{e}_Z r_{QM}^{ZQ}}{r_{QM}^3}\,ds_M=$$
$$=-\int_{V_{\text{o}}}\frac{\partial\,[\delta_{\text{o}\rho Q}(M_{\text{o}},t)\bar{e}_\rho(Q)+\delta_{\text{o}\psi Q}(M_{\text{o}},t)\bar{e}_\psi(Q)+\delta_{\text{o}ZQ}(M_{\text{o}},t)\bar{e}_Z(M_{\text{o}})]}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M. \quad (20)$$

Приравнивая выражения при одноименных ортах справа и слева в (20), получаем три скалярных интегральных уравнения. Первое из них, получаемое приравниванием выражения при ортах $\bar{e}_\rho(Q)$, имеет вид

$$\frac{\delta_{\rho Q}(Q,t)}{\lambda\,\gamma_{\text{c}}(Q)}+\int_{V_{\text{c}}}\frac{\partial\delta_{\rho Q}(M,t)}{\partial\tau}\frac{1}{r_{QM}}\,dv_M+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_{\text{c}}}\tau\,(M,t)\frac{r_{QM}^{\rho Q}}{r_{QM}^3}\,ds_M=$$
$$=-\int_{V_{\text{o}}}\frac{\partial\delta_{\text{o}\rho Q}(M_{\text{o}},t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M,\ \ Q\in V_{\text{c}}. \quad (21)$$

Подставив в (21) вместо $\delta_{\rho Q}(Q,t)$, $\delta_{\rho Q}(M,t)$, $\delta_{\text{o}\rho Q}(M_{\text{o}},t)$ их выражения (15), (17), (19), получим

$$\frac{\delta_{\text{c}\rho Q}(Q,t)}{\lambda\gamma_{\text{c}}(Q)}+\int_{V_{\text{c}}}\frac{\partial\,[\delta_{\text{c}\rho M}(M,\,t)\cos(\psi_M-\psi_Q)]}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,dv_M-$$
$$-\int_{V_{\text{c}}}\frac{\partial\,[\delta_{\text{c}\psi M}(M,\,t)\sin(\psi_M-\psi_Q)]}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,dv_M+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_{\text{c}}}\tau_{\text{c}}(M,\,t)\frac{r_{QM}^{\rho Q}}{r_{QM}^3}\,ds_M=$$

$$= -\int\limits_{V_о} \frac{\partial [\delta_{оρM_о}(M_о, t)\cos(\psi_{M_о} - \psi_Q) - \delta_{оψM_о}(M_о, t)\sin(\psi_{M_о} - \psi_Q)]}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}}\, d\upsilon_M,$$

$$Q \in V_с. \qquad (22)$$

Приравнивая выражения при ортах $\bar{e}_\psi(Q)$, получаем второе скалярное интегральное уравнение:

$$\frac{\delta_{\psi Q}(Q,t)}{\lambda\gamma_с(Q)} + \int\limits_{V_с} \frac{\partial\delta_{\psi Q}(M,t)}{\partial\tau} \frac{1}{r_{QM}}\, dv_M + \frac{1}{\mu_0}\int\limits_{S_с} \tau\,(M,t)\frac{r_{QM}^{\psi Q}}{r_{QM}^3}\, ds_M =$$

$$= -\int\limits_{V_о} \frac{\partial\delta_{о\psi Q}(M_о,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}}\, d\upsilon_M, \quad Q \in V_с. \qquad (23)$$

Подставив в (23) вместо $\delta_{\psi Q}(Q,t)$, $\delta_{\psi Q}(M,t)$, $\delta_{о\psi Q}(M_о,t)$ их выражения (15), (17), (19), получим

$$\frac{\delta_{сρQ}(Q,t)\ \sin(\psi_Q - \psi_Q) + \delta_{сψQ}(Q,t)\ \cos(\psi_Q - \psi_Q)}{\lambda\gamma_с(Q)} +$$

$$+ \int\limits_{V_с} \frac{\partial\,[\delta_{сρM}(M,t)\sin(\psi_M - \psi_Q) + \delta_{сψM}(M,t)\cos(\psi_M - \psi_Q)]}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}}\, dv_M +$$

$$+ \frac{1}{\mu_0}\int\limits_{S_с} \tau_с\,(M,t)\frac{r_{QM}^{\psi Q}}{r_{QM}^3}\, ds_M =$$

$$= -\int\limits_{V_о} \frac{\partial\,[\delta_{оρM_о}(M_о, t)\sin(\psi_{M_о} - \psi_Q) + \delta_{сψM_о}(M_о, t)\cos(\psi_{M_о} - \psi_Q)]}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}}\, d\upsilon_M,$$

$$Q \in V_с. \qquad (24)$$

Приравнивая выражения при ортах $\bar{e}_Z$, получаем третье скалярное интегральное уравнение:

$$\frac{\delta_{ZQ}(Q,t)}{\lambda\,\gamma_с(Q)} + \int\limits_{V_с} \frac{\partial\delta_{ZQ}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}}\, d\upsilon_M + \frac{1}{\mu_0}\int\limits_{S_с} \tau\,(M,t)\frac{r_{QM}^{ZQ}}{r_{QM}^3}\, ds_M =$$

$$= -\int\limits_{V_о} \frac{\partial\delta_{оZQ}(M_о,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{QM}}\, d\upsilon_M, \quad Q \in V_с. \qquad (25)$$

Таким образом, ВИУ (10) преобразовано к СкСИУ (22), (24), (25).

Геометрическая характеристика поверхности слитка. Слиток, форма которого показана на рис. 1 в работе [3], представляет собой тор прямоугольного сечения. Поверхность тора $S_с$ состоит из четырех канонических участков, $S_с = S_1 \bigcup S_2 \bigcup S_3 \bigcup S_4$, из которых S_1 и S_3— кольца, S_2и S_4— боковые поверхности цилиндра.

Приведем интервалы изменения цилиндрических координат ρ_Q, ψ_Q, z_Q точки Q и выражение нормали $\overline{n}_Q$ через орты цилиндрической системы координат в точке Q в пределах каждого из участков S_1 $i = 1, ..., 4$:

$$Q_1 \in S_1 : R_2 \le \rho_{Q_1} \le R_4, 0 \le \psi_{Q_1} \le 2\pi,\ z_{Q_1} = Z_1, \overline{n}_{Q_1} = \overline{n}_1 = -\overline{e}_z,$$

$$Q_2 \in S_2 : \rho_{Q_2} = R_2, 0 \le \psi_{Q_2} \le 2\pi,\ Z_1 \le z_{Q_2} \le Z_3, \overline{n}_{Q_2} = \overline{n}_2 = -\overline{e}_\rho(Q_2)\,,$$

$$Q_3 \in S_3 : R_2 \le \rho_{Q_3} \le R_4, 0 \le \psi_{Q_3} \le 2\pi,\ z_{Q_3} = Z_3, \overline{n}_{Q_3} = \overline{n}_3 = \overline{e}_z,$$

$$Q_4 \in S_4 : \rho_{Q_4} = R_4, 0 \le \psi_{Q_4} \le 2\pi,\ Z_1 \le z_{Q_4} \le Z_3, \overline{n}_{Q_4} = \overline{n}_4 = \overline{e}_\rho(Q_4)\,.$$

Преобразование скалярного ИУ(11) для распределения вихревых токов в уединенной заготовке круглого сечения в цилиндрической системе координат. Запишем (11) в виде СкСИУ на конанических подобластях поверхности слитка:

$$\tau\,(Q,t) + \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{4}\int_{S_j}\tau\,(M,t)\frac{\cos(\widehat{\overline{n}_{Q_i}\overline{r}_{Q_iM}})}{r_{Q_iM}^2}\,ds_M + 2\lambda\int_{V_с}\frac{\partial\delta_{nQ_i}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_iM}}\,d\upsilon_M =$$

$$= -2\lambda\int_{V_о}\frac{\partial\delta_{0nQ_i}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_iM}}\,d\upsilon_M,\quad Q_i \in S_i,\ i = 1, ..., 4. \tag{26}$$

Ядра СкСИУ (26) вычислим по формулам, приведенным в табл. 1 и 2 в работе [3] . Преобразуем интегралы, входящие в уравнение (26) :

$$\int_{V_с}\frac{\partial\delta_{nQ_i}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_iM}}\,d\upsilon_M,\quad Q_i \in S_i,\quad i = 1, ..., 4, \tag{27}$$

$$\int_{V_о}\frac{\partial\delta_{0nQ_i}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_iM}}\,d\upsilon_M,\quad Q_i \in S_i,\quad i = 1, ..., 4. \tag{28}$$

Запишем интеграл (27) в развернутом виде:

$$\int_{V_с}\frac{\partial\delta_{nQ_i}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_iM}}\,d\upsilon_M = \int_{V_с}\frac{\partial\,(\overline{n}_{Q_i}, \overline{\delta}\,(M,t))}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_iM}}\,d\upsilon_M =$$

$$= \int_{V_с}\frac{\partial\,(\overline{n}_{Q_i}, \overline{e}_\rho(Q_i)\,\delta_{\rho_{Q_i}}(M,t))}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_iM}}\,d\upsilon_M +$$

$$+\int\limits_{V_c} \frac{\partial\,(\bar{n}_{Q_i}, \bar{e}_\psi(Q_i)\,\delta_{\psi_{Q_i}}(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_i M}}\, d\upsilon_M +$$

$$+\int\limits_{V_c} \frac{\partial\,(\bar{n}_{Q_i}, \bar{e}_Z(Q_i)\,\delta_Z\,(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_i M}}\, d\upsilon_M,\; Q_i \in S_i, \quad i=1,\dots,4. \qquad (29)$$

Пусть $i = 1$. Тогда $\bar{n}_{Q_1} = -\bar{e}_Z$. Подставив $\bar{n}_{Q_1}$ в выражение (29), получим

$$\int\limits_{V_c} \frac{\partial\delta_{nQ_1}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_1 M}}\, d\upsilon_M = \int\limits_{V_c} \frac{\partial\,(\bar{n}_{Q_1}, \bar{\delta}\,(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_1 M}}\, d\upsilon_M =$$

$$= \int\limits_{V_c} \frac{\partial\,(\bar{n}_{Q_1}, \bar{e}_\rho(Q_1)\,\delta_{\rho_{Q_1}}(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_1 M}}\, d\upsilon_M +$$

$$+\int\limits_{V_c} \frac{\partial\,(\bar{n}_{Q_1}, \bar{e}_\psi(Q_1)\,\delta_{\psi_{Q_1}}(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_1 M}}\, d\upsilon_M +$$

$$+\int\limits_{V_c} \frac{\partial\,(\bar{n}_{Q_1}, \bar{e}_Z(Q_1)\,\delta_Z(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_1 M}}\, d\upsilon_M = -\int\limits_{V_c} \frac{\partial\,(\delta_Z\,(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_1 M}}\, d\upsilon_M.$$

Пусть $i = 2$. Тогда $\bar{n}_{Q_2} = -\bar{e}_\rho(Q_2)$. Подставив $\bar{n}_{Q_2}$ в выражение (29), получим

$$\int\limits_{V_c} \frac{\partial\delta_{nQ_2}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_2 M}}\, d\upsilon_M = \int\limits_{V_c} \frac{\partial\,(\bar{n}_{Q_2}, \bar{\delta}\,(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_2 M}}\, d\upsilon_M =$$

$$= \int\limits_{V_c} \frac{\partial\,(\bar{n}_{Q_2}, \bar{e}_\rho(Q_2)\delta_{\rho_{Q_2}}(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_2 M}}\, d\upsilon_M +$$

$$+\int\limits_{V_c} \frac{\partial\,(\bar{n}_{Q_2}, \bar{e}_\psi(Q_2)\,\delta_{\psi_{Q_2}}(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_2 M}}\, d\upsilon_M +$$

$$+\int\limits_{V_c} \frac{\partial\,(\bar{n}_{Q_2}, \bar{e}_Z(Q_2)\,\delta_Z\,(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_2 M}}\, d\upsilon_M = -\int\limits_{V_c} \frac{\partial\delta_{\rho_{Q_2}}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_2 M}}\, d\upsilon_M =$$

$$= \int\limits_{V_c} \frac{\partial\,[\delta_{\rho M}(M,t)\cos(\psi_M - \psi_{Q_2}) - \delta_{\psi M}(M,t)\sin(\psi_M - \psi_{Q_2})]}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_2 M}}\, d\upsilon_M.$$

Если $i = 3$, то $\bar{n}_{Q_3} = \bar{e}_Z$. Подставив $\bar{n}_{Q_3}$ в выражение (29), получим

$$\int_{V_c} \frac{\partial \delta_{nQ_3}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_3 M}} d\upsilon_M = \int_{V_c} \frac{\partial (\bar{n}_{Q_3}, \bar{\delta}(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_3 M}} d\upsilon_M =$$

$$= \int_{V_c} \frac{\partial (\bar{n}_{Q_3}, \bar{e}_\rho(Q_3)\, \delta_{\rho_{Q_3}}(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_3 M}} d\upsilon_M +$$

$$+ \int_{V_c} \frac{\partial (\bar{n}_{Q_3}, \bar{e}_\psi(Q_3)\, \delta_{\psi_{Q_3}}(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_3 M}} d\upsilon_M +$$

$$+ \int_{V_c} \frac{\partial (\bar{n}_{Q_3}, \bar{e}_Z(Q_3)\, \delta_Z(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_3 M}} d\upsilon_M = - \int_{V_c} \frac{\partial (\delta_Z(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_3 M}} d\upsilon_M .$$

Если $i = 4$, то $\bar{n}_{Q_4} = \bar{e}_\rho(Q_4)$. Подставив $\bar{n}_{Q_4}$ в выражение (29), получим

$$\int_{V_c} \frac{\partial \delta_{nQ_4}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_4 M}} d\upsilon_M = \int_{V_c} \frac{\partial (\bar{n}_{Q_4}, \bar{\delta}(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_4 M}} d\upsilon_M =$$

$$= \int_{V_c} \frac{\partial (\bar{n}_{Q_4}, \bar{e}_\rho(Q_4)\, \delta_{\rho_{Q_4}}(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_4 M}} d\upsilon_M +$$

$$+ \int_{V_c} \frac{\partial (\bar{n}_{Q_4}, \bar{e}_\psi(Q_4)\, \delta_{\psi_{Q_4}}(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_4 M}} d\upsilon_M +$$

$$+ \int_{V_c} \frac{\partial (\bar{n}_{Q_4}, \bar{e}_Z(Q_4)\, \delta_Z(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_4 M}} d\upsilon_M = \int_{V_c} \frac{\partial \delta_{\rho_{Q_4}}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_4 M}} d\upsilon_M =$$

$$= \int_{V_c} \frac{\partial [\delta_{\rho M}(M,t)\cos(\psi_M - \psi_{Q_4}) - \delta_{\psi M}(M,t)\sin(\psi_M - \psi_{Q_4})]}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_4 M}} d\upsilon_M .$$

Преобразуем интеграл (28). Для этого запишем его в развернутом виде:

$$\int_{V_0} \frac{\partial \delta_{0nQ_i}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_i M}} d\upsilon_M = \int_{V_0} \frac{\partial (\bar{n}_{Q_i}, \bar{\delta}_0(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_i M}} d\upsilon_M =$$

$$= \int\limits_{V_0} \frac{\partial\, (\overline{n}_{Q_i}, \overline{e}_\rho(Q_1)\,\delta_{0\rho_{Q_i}}(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_i M}}\, d\upsilon_M +$$

$$+ \int\limits_{V_0} \frac{\partial\, (\overline{n}_{Q_i}, \overline{e}_\psi(Q_i)\,\delta_{0\psi_{Q_i}}(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_i M}}\, d\upsilon_M +$$

$$+ \int\limits_{V_0} \frac{\partial\, (\overline{n}_{Q_i}, \overline{e}_Z(Q_i)\,\delta_{0Z}\,(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_i M}}\, d\upsilon_M, \quad Q_i \in S_i, \quad i = 1, \ldots, 4. \qquad (30)$$

Пусть $i = 1$. Тогда $\overline{n}_{Q_1} = -\overline{e}_Z$. Подставив $\overline{n}_{Q_1}$ в выражение (30), получим

$$\int\limits_{V_0} \frac{\partial \delta_{0nQ_1}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_1 M}}\, d\upsilon_M = \int\limits_{V_0} \frac{\partial\, (\overline{n}_{Q_1}, \overline{\delta}_0(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_1 M}}\, d\upsilon_M =$$

$$= \int\limits_{V_0} \frac{\partial\, (\overline{n}_{Q_1}, \overline{e}_\rho(Q_1)\,\delta_{0\rho_{Q_1}}(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_1 M}}\, d\upsilon_M +$$

$$+ \int\limits_{V_0} \frac{\partial\, (\overline{n}_{Q_1}, \overline{e}_\psi(Q_1)\,\delta_{0\psi_{Q_1}}(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_1 M}}\, d\upsilon_M +$$

$$+ \int\limits_{V_0} \frac{\partial\, (\overline{n}_{Q_1}, \overline{e}_Z(Q_1)\,\delta_{0Z}\,(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_1 M}}\, d\upsilon_M = -\int\limits_{V_0} \frac{\partial\, (\delta_{0Z}\,(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_1 M}}\, d\upsilon_M.$$

Пусть $i = 2$. Тогда $\overline{n}_{Q_2} = -\overline{e}_\rho(Q_2)$. Подставив $\overline{n}_{Q_2}$ в выражение (30), получим

$$\int\limits_{V_0} \frac{\partial \delta_{0nQ_2}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_2 M}}\, d\upsilon_M = \int\limits_{V_0} \frac{\partial\, (\overline{n}_{Q_2}, \overline{\delta}_0\,(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_2 M}}\, d\upsilon_M =$$

$$= \int\limits_{V_0} \frac{\partial\, (\overline{n}_{Q_2}, \overline{e}_\rho(Q_2)\,\delta_{0\rho_{Q_2}}(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_2 M}}\, d\upsilon_M +$$

$$+ \int\limits_{V_0} \frac{\partial\, (\overline{n}_{Q_2}, \overline{e}_\psi(Q_2)\,\delta_{0\psi_{Q_2}}(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_2 M}}\, d\upsilon_M +$$

$$+ \int\limits_{V_0} \frac{\partial\, (\overline{n}_{Q_2}, \overline{e}_Z(Q_2)\,\delta_{0Z}\,(M,t))}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_2 M}}\, d\upsilon_M = -\int\limits_{V_0} \frac{\partial \delta_{\rho_{Q_2}}(M,t)}{\partial t} \frac{1}{r_{Q_2 M}}\, d\upsilon_M =$$

$$=-\int\limits_{V_0}\frac{\partial\,[\delta_{0\varphi M_0}(M,t)\cos(\psi_{M_0}-\psi_{Q_2})-\delta_{0\psi M_0}(M,t)\sin(\psi_{M_0}-\psi_{Q_2})]}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_2 M}}d\upsilon_M.$$

Если $i = 3$, то $\bar{n}_{Q_3}=\bar{e}_Z$. Подставив $\bar{n}_{Q_3}$ в выражение (30) , получим

$$\int\limits_{V_0}\frac{\partial\delta_{0nQ_3}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_3 M}}d\upsilon_M=\int\limits_{V_0}\frac{\partial\,(\bar{n}_{Q_3},\bar{\delta}_0\,(M,t))}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_3 M}}d\upsilon_M=$$

$$=\int\limits_{V_0}\frac{\partial\,(\bar{n}_{Q_3},\,\bar{e}_\rho(Q_3)\,\delta_{0\rho_{Q_3}}(M,t))}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_3 M}}d\upsilon_M+$$

$$+\int\limits_{V_0}\frac{\partial\,(\bar{n}_{Q_3},\,\bar{e}_\psi(Q_3)\,\delta_{0\psi_{Q_3}}(M,t))}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_3 M}}d\upsilon_M+$$

$$+\int\limits_{V_0}\frac{\partial\,(\bar{n}_{Q_3},\bar{e}_Z(Q_3)\,\delta_{0Z}\,(M,t))}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_3 M}}d\upsilon_M=-\int\limits_{V_0}\frac{\partial\,(\delta_{0Z}\,(M,t))}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_3 M}}d\upsilon_M.$$

Если $i = 4$, то $\bar{n}_{Q_4}=\bar{e}_\rho(Q_4)$. Подставив $\bar{n}_{Q_4}$ в выражение (30), получим

$$\int\limits_{V_0}\frac{\partial\delta_{0nQ_4}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_4 M}}d\upsilon_M=\int\limits_{V_0}\frac{\partial\,(\bar{n}_{Q_4},\bar{\delta}_0(M,t))}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_4 M}}d\upsilon_M=$$

$$=\int\limits_{V_0}\frac{\partial\,(\bar{n}_{Q_4},\,\bar{e}_\rho(Q_4)\,\delta_{0\rho_{Q_4}}(M,t))}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_4 M}}d\upsilon_M+$$

$$+\int\limits_{V_0}\frac{\partial\,(\bar{n}_{Q_4},\,\bar{e}_\psi(Q_4)\,\delta_{0\psi_{Q_4}}(M,t))}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_4 M}}d\upsilon_M+$$

$$+\int\limits_{V_0}\frac{\partial\,(\bar{n}_{Q_4},\bar{e}_Z(Q_4)\,\delta_{0Z}\,(M,t))}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_4 M}}d\upsilon_M=\int\limits_{V_0}\frac{\partial\delta_{0\rho_{Q_4}}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_4 M}}d\upsilon_M=$$

$$=\int\limits_{V_0}\frac{\partial\,[\delta_{0\varphi M_0}(M,t)\cos(\psi_{M_0}-\psi_{Q_4})-\delta_{0\psi M_0}(M,t)\sin(\psi_{M_0}-\psi_{Q_4})]}{\partial t}\frac{1}{r_{Q_4 M}}d\upsilon_M.$$

Выводы

Решена вспомогательная задача о распределении вихревых токов в уединенной НЛЗ круглого сечения (тор прямоугольного сечения). Получена СкСИУ (22), (24)—(26), описывающая в цилиндрической системе координат трехмерное распределение вихревых токов в указанной заготовке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Евдокимов В.Ф., Петрушенко Е.И.* Интегральная модель трехмерного распределения вихревых токов в непрерывно литой заготовке квадратного сечения при электромагнитном перемешивании в вертикальной МНЛЗ.I // Электрон. моделирование. — 2013. — **35**, № 6 — С. 49—62.
2. *Евдокимов В.Ф., Петрушенко Е.И.* Интегральная модель трехмерного распределения вихревых токов в непрерывно литой заготовке квадратного сечения при электромагнитном перемешивании в вертикальной МНЛЗ.II//Электрон. моделирование. — 2014. — **36**, № 1. — С. 81—95.
3. *Евдокимов В.Ф., Кучаев А.А., Петрушенко Е.И., Кучаев В.А.* Модель трехмерного магнитного поля статора цилиндрического электромагнитного перемешивателя с учетом распределения токов намагниченности по поверхности магнитопровода. I // Электрон. моделирование. — 2012. — **34** , № 1. — С. 81—92.

V.F.Yevdokimov, E.I. Petrushenko

INTEGRAL MODEL OF THREE-DIMENSIONAL
DISTRIBUTION OF EDDY FLOWS IN CONTINUOUS CASTING
OF ROUND CROSS-SECTION UNDER ELECTROMAGNETIC
STIRRING IN VERTICAL MCC. I

The scalar set of integral equations has been obtained which describes in cylindrical system of coordinates the three-dimensional distribution of eddy flows in the system continuous casting (CC) of round cross-section — mould under electromagnetic stirring in vertical CC. It is based on the vector set of integral equations. An auxiliary problem is considered in Part I of the paper: scalar integral equations describing three-dimensional distribution of eddy flows in continuous casting of round cross-section. The effect of eddy flows is not taken in the account.

K e y w o r d s: integral model, three-dimensional distribution, eddy flows, continuous casting, round cross-section, electromagnetic stirring.

REFERENCES

1. *Yevdokimov V.F., Petrushenko E.I.* Integral model of three-dimensional distribution of eddy flows in continuous casting of square cross-section under electromagnetic stirring in vertical MCC. I // Electronic Modeling. — 2013. — Vol. 35, № 6. — P. 49—62 (in Russian).
2. *Yevdokimov V.F., Petrushenko E.I.* Integral model of three-dimensional distribution of eddy flows in continuous casting of square cross-section under electromagnetic stirring in vertical MCC. II // Electronic Modeling. — 2014. — Vol. 36, № 1. — P. 81—96 (in Russian).

3. *Yevdokimov V.F., Kuchaev A.A., Petrushenko E.I., Kuchaev V.A.* Model of three-dimensional magnetic field of the stator of cylindrical electromagnetic stirrer with allowance for magnetization currents distribution on the magnetic circuit surface. I // Electronic Modeling. — 2012. — Vol. 34, № 1. — P. 81—92 (in Russian).

Поступила 28.05.14

ЕВДОКИМОВ Виктор Федорович, чл.-кор. НАН Украины, директор Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1963 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — теория моделирования процессов и систем в энергетике, теория функционально-ориентированных компьютерных систем, анализ и синтез параллельных вычислительных методов и систем.

ПЕТРУШЕНКО Евгений Иванович, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., зав. отделом моделирования задач электромагнитной гидродинамики Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1960 г. окончил Новочеркасский политехнический ин-т, а в 1963 г. — Ростовский государственный университет. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.