УДК 004.942

Я.А. Калиновский, д-р техн. наук, **А.С. Туренко,** аспирантка
Ин-т проблем регистрации информации НАН Украины
(Украина, 03113, Киев, ул. Н.Шпака, 2,
e-mail: kalinovsky@i.ua; asturenko@mail.ru),
Ю.Е. Бояринова, канд. техн. наук, **Я.В. Хицко**
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический ин-т»
(Украина, 03056, Киев, пр-т Победы, 37,
e-mail: ub@ua.fm; yannuary@yandex.ua)

Исследование вычислительных операций в гиперкомплексной числовой системе антикватернионов

Рассмотрены основные свойства обобщения гиперкомплексной системы кватернионов — антикватернионов. Введено определение и исследованы сопряжения антикватернионов, их норма и делитель нуля, а также правила выполнения операций с ними. Построено представление экспоненты антикватернионной переменной с помощью ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений.

Розглянуто основні властивості узагальнення гіперкомплексної системи кватерніонів — антикватерніонів. Введено визначення та досліджено спряження антикватерніонів, їх норма та дільник нуля, а також правила виконання операцій з ними. Побудовано представлення експоненти антикватерніонної змінної за допомогою асоційованої системи лінійних диференціальних рівнянь.

К л ю ч е в ы е с л о в а: *кватернион, антикватернион, гиперкомплексная числовая система, делитель нуля, экспонента, псевдонорма, сопряженный антикватернион.*

Гиперкомплексные числовые системы широко применяются в различных методах представления и обработки информации. Важную роль при этом играют элементарные трансцендентные функции от гиперкомплексных переменных, применение которых повышает эффективность как вычислительных процедур, так и синтез математических моделей.

Применение системы кватернионов позволяет решать такие важные практические задачи, как навигация и управление подвижными объектами, задачи механики, электродинамики, криптографии, цифровой обработки сигналов и др. Широкое применение кватернионов обусловлено их

© Я.А. Калиновский, А.С. Туренко, Ю.Е. Бояринова, Я.В. Хицко, 2014

свойствами, позволяющими эффективно выполнять различные операции с векторами в трехмерной декартовой системе координат. Поэтому целесообразно рассмотреть свойства и функции других гиперкомплексных числовых систем, например такого обобщения кватернионов, как система антикватернионов, что дает возможность сформулировать и решить новые практические задачи или повысить эффективность решения задач, рассмотренных ранее.

Постановка задачи. Исследуем гиперкомплексную числовую систему антикватернионов, как результат применения к системе комплексных чисел процедуры удвоения Грассмана — Клифорда системой двойных чисел, а также рассмотрим основные свойства антикватернионов и алгоритмы выполнения алгебраических операций, необходимых для применения системы антикватернионов в математическом моделировании и построения на их основе экспоненты антикватернионной переменной.

Определение и основные свойства антикватернионов. Как известно [1, 2], системой кватернионов H называется гиперкомплексная четырехмерная система чисел с базисом $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, таблица умножения элементов которого имеет вид

H	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2
e_4	e_4	e_3	$-e_2$	$-e_1$

.

Кватернионы являются результатом антикоммутативного удвоения с помощью процедуры Грассмана — Клифорда системы комплексных чисел C той же системой чисел. Используя систему обозначений, введенную в [3], можно записать $H = Д\,(C, C)$. Если антикоммутативно удвоить систему комплексных чисел C системой двойных чисел $W\,(e, 2)$ с таблицей умножения

W	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	e_1

,

то получим систему антикватернионов AH, или, используя оператор удвоения $Д$, — $AH = Д\,(C\,(e, 2), W(f, 2))$. Действительно, взяв композицию базисов $\{e_1, e_2\}$ и $\{f_1, f_2\}$, получим базис $\{e_1 f_1, e_2 f_1, e_1 f_2, e_2 f_2\}$.

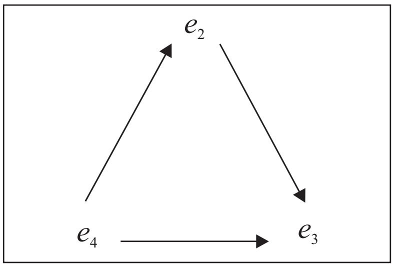

Рис. 1. Схематическое изображение таблицы умножения базисных элементов системы антикватернионов

Таблицу умножения полученной гиперкомплексной числовой системы построим с помощью перемножения элементов этого базиса. При этом будем считать, что базисные элементы, принадлежащие одному базису, перемножаются по правилам систем C и W. При умножении их между собой коммутативность сохраняется только тогда, когда хотя бы один множитель есть e_1 или f_1. Базисные элементы e_2 и f_2 антикоммутируют: $e_2 f_2 = -f_2 e_2$.

Приведем несколько примеров умножения базисных элементов с учетом этих правил:

$$e_1 f_1 \cdot e_1 f_1 = e_1 e_1 \cdot f_1 f_1 = e_1 f_1,$$
$$e_2 f_1 \cdot e_2 f_1 = e_2 e_2 \cdot f_1 f_1 = -e_1 f_1,$$
$$e_2 f_2 \cdot e_2 f_2 = -e_2 e_2 \cdot f_2 f_2 = e_1 f_1.$$

Если двухсимвольные имена базисных элементов переименовать в односимвольные, $e_1 f_1 \to e_1$, $e_2 f_1 \to e_2$, $e_1 f_2 \to e_3$, $e_2 f_2 \to e_4$, то получим следующую таблицу умножения базисных элементов системы антикватернионов [4]:

AH	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	e_1	$-e_2$
e_4	e_4	e_3	e_2	e_1

. (1)

Принцип умножения базисных элементов схематически представлен на рис. 1, на котором базисные элементы системы антикватернионов являются вершинами треугольника. Произведение любых двух элементов из этой тройки равно третьему, если движение от первого ко второму множителю совпадает с направлением стрелки. Если движение от первого ко второму множителю противоположно направлению стрелки, то их произведение равно третьему элементу со знаком минус. Следовательно, антикватернионы — это числа вида $w = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$, где $a_i \in R$.

Сложение и умножение антикватернионов. Сумма двух антикватернионов, $w_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4$ и $w_2 = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4$, есть антикватернион w_3:

$$w_3 = w_1 + w_2 = (a_1 + b_1)\, e_1 + (a_2 + b_2)\, e_2 + (a_3 + b_3)\, e_3 + (a_4 + b_4)\, e_4.$$

Произведение двух антикватернионов, w_1 и w_2, есть антикватернион w_3:

$$w_3 = w_1w_2 = (a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)\, e_1 + (a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_4 + a_4b_3)\, e_2 +$$

$$+ (a_1b_3 + a_3b_1 - a_2b_4 + a_4b_2)\, e_3 + (a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2)\, e_4. \qquad (2)$$

Эти операции обладают следующими свойствами.

1. Операция сложения коммутативна: $w_1 + w_2 = w_2 + w_1$.
2. Операция сложения ассоциативна: $(w_1 + w_2) + w_3 = w_1 + (w_2 + w_3)$.
3. Операция умножения некоммутативна:

$$w_1w_2 \neq w_2w_1. \qquad (3)$$

Действительно,

$$w_1w_2 = (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4)(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4) =$$
$$= (a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)\, e_1 + (a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_4 + a_4b_3)\, e_2 +$$
$$+ (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2)\, e_3 + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1)\, e_4,$$

однако согласно (3)

$$w_2w_1 = (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4)(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4) =$$
$$= (b_1a_1 - b_2a_2 + b_3a_3 + b_4a_4)\, e_1 + (b_1a_2 + b_2a_1 - b_3a_4 + b_4a_3)\, e_2 +$$
$$+ (b_1a_3 - b_2a_4 + b_3a_1 + b_4a_2)\, e_3 + (b_1a_4 + b_2a_3 - b_3a_2 + b_4a_1)\, e_4 =$$
$$= (a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)\, e_1 + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)\, e_2 +$$
$$+ (a_1b_3 + a_2b_4 + a_3b_1 - a_4b_2)\, e_3 + (a_1b_4 - a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1)\, e_4 \neq w_1w_2.$$

4. Операция умножения ассоциативна: $w_1(w_2w_3) = (w_1w_2)\, w_3$. Это можно доказать, используя (2).

5. Операция умножения дистрибутивна относительно сложения: $w_1(w_2 + w_3) = w_1w_2 + w_1w_3$. Это так же можно доказать, используя (2).

6. Определено действие умножения на скаляр $k \in R$: $kw_1 = ka_1e_1 + ka_2e_2 + ka_3e_3 + ka_4e_4$.

7. Для $\forall k_1, k_2 \in R$ справедливо равенство $(k_1w_1)(k_2w_2) = k_1k_2(w_1w_2)$.

Определение нормы антикватернионов. В работе [2] норма гиперкомплексного числа в общем случае определяется по формуле

$$N(w)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ij}^{k}a_i,$$

где γ_{ij}^{k} — структурные константы гиперкомплексной числовой системы антикватернионов AH, определяемые из (1). Таким образом,

$$N(w)=\begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Вычислив детерминант матрицы (4), получим норму антикватерниона w:

$$N(w)=(a_1^2+a_2^2-a_3^2-a_4^2)^2. \tag{5}$$

По аналогии с теорией кватернионов будем называть псевдонормой антикватернионов квадратный корень из нормы (5), которую также обозначим $N(w)$:

$$N(w)=a_1^2+a_2^2-a_3^2-a_4^2. \tag{6}$$

Как видно из (6), псевдонорма может быть отрицательной. В работе [5] показано, что псевдонорма мультипликативна:

$$N(w_1w_2)=N(w_1)\,N(w_2). \tag{7}$$

Определение и свойства сопряженных антикватернионов. Введем определение сопряженного антикватерниона

$$w=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4 \tag{8}$$

на основе равенства

$$w\overline{w}=N(w), \tag{9}$$

как предложено в работе [2]. Подставив (9) в (2) и (5) и приравняв коэффициенты при одинаковых базисных элементах, получим линейную алгебраическую систему относительно переменных b_1, b_2, b_3, b_4,

$$a_1b_1-a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4=a_1^2+a_2^2-a_3^2-a_4^2,$$

$$a_1b_2+a_2b_1-a_3b_4+a_4b_3=0,$$

$$a_1b_3+a_3b_1-a_2b_4+a_4b_2=0,$$

$$a_1b_4+a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2=0,$$

решения которой имеют вид $b_1 = a_1$, $b_2 = -a_2$, $b_3 = -a_3$, $b_4 = -a_4$. Поэтому, если исходным является антикватернион (8), то сопряженный к нему антикватернион имеет вид $\overline{w} = a_1e_1 - a_2e_2 - a_3e_3 - a_4e_4$.

Определим некоторые свойства сопряженных антикватернионов.

1. Сумма и произведение сопряженных антикватернионов — действительные числа.

2. Число, сопряженное к сумме, является суммой сопряженных чисел: $\overline{w_1 + w_2} = \overline{w}_1 + \overline{w}_2$.

3. Число, сопряженное к произведению, является произведением сопряженных чисел, $\overline{w_1 w_2} = \overline{w}_1 \overline{w}_2$, что можно проверить непосредственно.

Делители нуля и их свойства. В соответствии с теоремой Фробениуса [1] в системе антикватернионов существуют делители нуля. Отличный от нуля антикватернион $w_1 \neq 0$ называется делителем нуля, если существует такой антикватернион $w_2 \neq 0$, что их произведение равно нулю, $w_1 w_2 = 0$. Это означает такое же соотношение между их псевдонормами:

$$N(w_1 w_2) = 0. \tag{10}$$

Согласно (7) псевдонорма делителя нуля должна равняться нулю:

$$N(w_1) = 0. \tag{11}$$

Но из (10) следует, что $w_2 = \overline{w}_1$, т.е. если $w \in AH$ — делитель нуля, то и $\overline{w}$ — тоже делитель нуля. Таким образом, (11) является признаком делителя нуля в системе антикватернионов AH: $a_1^2 + a_2^2 = a_3^2 + a_4^2$.

Операция деления антикватернионов. Ввиду некоммутативности умножения антикватернионов существуют два вида деления: левое и правое. Частное от левого деления антикватерниона w_1 на антикватернион w_2 есть решение уравнения

$$w_2 x = w_1. \tag{12}$$

Для того чтобы решить уравнение (12), необходимо умножить слева обе его части сначала на $\overline{w}_2$, а затем на $1/|w_2|^2$, где $|w_2|^2 \neq 0$. Получим

$$x_l = \frac{1}{|w_2|^2} \overline{w}_2 w_1. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), выясняем, что данное выражение (13) является решением уравнения (12). Правое деление вводим на основе уравнения

$$x w_2 = w_1, \tag{14}$$

откуда находим $x_r = \dfrac{1}{|w_2|^2} w_1 \overline{w}_2$. Поскольку произведение антикватернионов зависит от порядка сомножителей, справедливо неравенство $x_l \neq x_r$.

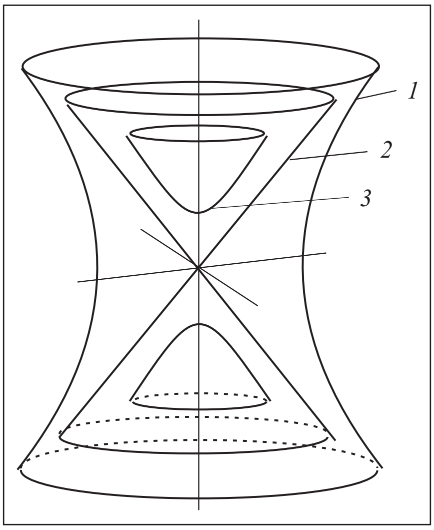

Рис. 2. Геометрическая форма антикватернионов в трехмерном мнимом пространстве: *1* — $a_1^2 - p > 0$; *2* — $a_1^2 - p = 0$; *3* — $a_1^2 - p < 0$

Таким образом, решение уравнения (12) называется левым частным, а уравнения (14) — правым частным [3,6]. Следует заметить, что операция деления антикватернионов, в отличие от полей действительных и комплексных чисел, невозможна не только на нуль, но и на делители нуля.

Геометрический смысл антикватернионов. Векторные части антикватернионов $\mathrm{Vec}\,(w) = a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$ образуют трехмерное линейное пространство, которое назовем мнимым пространством антикватернионов. Будем его изображать в трехмерном евклидовом пространстве.

Рассмотрим случай $\forall w \in AH$. Пусть $p = N(w)$. Зафиксируем скалярную часть. Тогда $a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 = p - a_1^2 \Rightarrow a_3^2 + a_4^2 - a_2^2 = a_1^2 - p$. Данное выражение в трехмерном мнимом пространстве антикватернионов представлено в геометрической форме на рис. 2, где рассмотрены следующие случаи.

1. Если $a_1^2 - p > 0$, то множество антикватернионов образует однополостной гиперболоид:

$$\frac{a_3^2}{a_1^2 - p} + \frac{a_4^2}{a_1^2 - p} - \frac{a_2^2}{a_1^2 - p} = 1\,.$$

2. Если $a_1^2 - p = 0$, то множество антикватернионов образует конус:

$$a_3^2 + a_4^2 - a_2^2 = 0.$$

3. Если $a_1^2 - p < 0$, то множество антикватернионов вида (8), где $a_1^2 < p$ образует двухполостной гиперболоид:

$$\frac{a_3^2}{a_1^2 - p} + \frac{a_4^2}{a_1^2 - p} - \frac{a_2^2}{a_1^2 - p} = -1.$$

Построение экспоненты от гиперкомплексной переменной заключается в следующем [2, 7, 8]. Представление экспоненты в системе $\Gamma\,(e, n)$

от числа $M \in \Gamma(e, n)$ является частным решением гиперкомплексного линейного дифференциального уравнения

$$\dot{X} = MX, \tag{15}$$

с начальным условием

$$\mathrm{Exp}(0) = e_1. \tag{16}$$

Для построения решения гиперкомплексного линейного дифференциального уравнения (15) представим его в векторно-матричной форме, $\dot{\overline{X}} = (\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)^r$, а вектор-столбец $\overline{MX}$, полученный из гиперкомплексного числа MX, — в виде матричного произведения некоторой матрицы М размерами $n \times n$, элементами которой являются линейные комбинации компонент гиперкомплексного числа M на вектор-столбец $\overline{X}$: $\overline{MX} = \mathrm{M}\overline{X}$. Тогда гиперкомплексное уравнение (15) можно представить в виде системы из n линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\overline{X} = \mathrm{M}\overline{X}. \tag{17}$$

Затем необходимо найти характеристические числа $\lambda_1, ..., \lambda_i$ матрицы M, т.е. решить характеристическое уравнение

$$M - \lambda E = 0. \tag{18}$$

Таким образом, характеристические числа $\lambda_1, ..., \lambda_i$ зависят от компонентов гиперкомплексного числа M.

Далее строим общее решение, зависящее от n^2 произвольных констант, из которых $n^2 - n$ линейно зависимы от n произвольных переменных. Для получения этих линейных зависимостей необходимо решить систему линейных уравнений [1], после чего получим общее решение (17), зависящее от произвольных констант, $\overline{X}(t, C_1, ..., C_n)$, значения которых определяются с помощью начального условия (16). Комоненты вектор-столбца решения $\overline{X}$ являются компонентами представления экспоненты от гиперкомплексного числа M:

$$\mathrm{Exp}(M) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i e_i. \tag{19}$$

Построение представления экспоненты антикватернионной переменной. Пусть $M \in AH(e, 4)$. Вычисляем правую часть уравнения (15). Согласно (1)

$$MX = (m_1 e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4)(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4) =$$
$$= (m_1 x_1 - m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4) e_1 + (m_1 x_2 + m_2 x_1 - m_3 x_4 + m_4 x_3) e_2 +$$
$$+ (m_1 x_3 - m_2 x_4 + m_3 x_1 + m_4 x_2) e_3 + (m_1 x_4 + m_2 x_3 - m_3 x_2 + m_4 x_1) e_4.$$

Поэтому уравнение (15) принимает вид

$$\dot{X} = (m_1x_1 - m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4)\, e_1 + (m_2x_1 + m_1x_2 + m_4x_3 - m_3x_4)\, e_2 +$$

$$+ (m_3x_1 + m_4x_2 + m_1x_3 - m_2x_4)\, e_3 + (m_4x_1 - m_3x_2 + m_2x_3 + m_1x_4)\, e_4.$$

Отсюда получаем ассоциированную систему в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= m_1x_1 - m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4, \\ \dot{x}_2 &= m_2x_1 + m_1x_2 + m_4x_3 - m_3x_4, \\ \dot{x}_3 &= m_3x_1 + m_4x_2 + m_1x_3 - m_2x_4, \\ \dot{x}_4 &= m_4x_1 - m_3x_2 + m_2x_3 + m_1x_4. \end{aligned} \tag{20}$$

Для решения (20) необходимо найти корни характеристического уравнения (18), где

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} m_1 & -m_2 & m_3 & m_4 \\ m_2 & m_1 & m_4 & -m_3 \\ m_3 & m_4 & m_1 & -m_2 \\ m_4 & -m_3 & m_2 & m_1 \end{pmatrix};$$

E — единичная матрица. С учетом изложенного выше характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} m_1-\lambda & -m_2 & m_3 & m_4 \\ m_2 & m_1-\lambda & m_4 & -m_3 \\ m_3 & m_4 & m_1-\lambda & -m_2 \\ m_4 & -m_3 & m_2 & m_1-\lambda \end{pmatrix} = 0\,. \tag{21}$$

Вычислив (21), получим уравнение $((m_1-\lambda)^2 - m_3^2 + m_2^2 - m_4^2)^2 = 0,$ откуда определяются характеристические числа

$$\lambda_{1,2,3,4} = m_1 \pm \sqrt{m_3^2 + m_4^2 - m_2^2}. \tag{22}$$

Характеристические числа могут быть различными в зависимости от того, какой знак имеет подкоренное выражение. Рассмотрим частные случаи.

I. $m_3^2 + m_4^2 - m_2^2 < 0.$ Введем обозначение $\overline{m} = \sqrt{m_3^2 + m_4^2 - m_2^2}$. Тогда получим кратные комплексно сопряженные корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2,3,4} = m_1 \pm i\sqrt{m_2^2 - m_3^2 - m_4^2}.$

Для удобства введем обозначение $\widetilde{m}=\sqrt{m_2^2-m_3^2-m_4^2}$. Тогда корни характеристического уравнения (21) примут вид

$$\lambda_{1,2,3,4}=m_1\pm i\widetilde{m}. \qquad (23)$$

Согласно (23) решение системы (20) найдем в следующей форме:

$$X_k(t)=e^{m_1 t}((A_k+B_k t)\cos\widetilde{m}t+(C_k+D_k t)\sin\widetilde{m}t),\ k=1,\dots,4. \qquad (24)$$

Вычисляем первую производную:

$$\dot{X}(t)=e^{m_1 t}((m_1A_k+B_k+\widetilde{m}C_k+(m_1B_k+\widetilde{m}D_k)\,t)\cos\widetilde{m}t+$$

$$+(m_1C_k+D_k-\widetilde{m}A_k+(m_1D_k-\widetilde{m}B_k)\,t)\sin\widetilde{m}t),\ k=1,\dots,4. \qquad (25)$$

Подставив равенства (24) и (25) в ассоциированную систему (20) и использовав метод неопределенных коэффициентов, получим систему 16 уравнений с 16 неизвестными, которую можно свести к векторно-матричной системе, введя следующие обозначения:

$$Q=\begin{vmatrix} 0 & -m_2 & m_3 & m_4 \\ m_2 & 0 & m_4 & -m_3 \\ m_3 & m_4 & 0 & -m_2 \\ m_4 & -m_3 & m_2 & 0 \end{vmatrix},\ \overline{A}=\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{vmatrix},\ \overline{B}=\begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{vmatrix},\ \overline{C}=\begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{vmatrix},\ \overline{D}=\begin{vmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{vmatrix}.$$

Матрица Q имеет такое свойство:

$$QQ=-\widetilde{m}^2E. \qquad (26)$$

Тогда векторно-матричная система примет вид

$$\begin{aligned} \overline{B}+\widetilde{m}\overline{C}&=Q\overline{A},\\ \widetilde{m}\overline{D}&=Q\overline{B},\\ -\widetilde{m}\overline{A}+\overline{D}&=Q\overline{C},\\ -\widetilde{m}\overline{B}&=Q\overline{D}. \end{aligned} \qquad (27)$$

Если четвертое уравнение системы (27) умножить на матрицу Q, то получим $-\widetilde{m}Q\overline{B}=QQ\overline{D}$. Если воспользоваться соотношением (26) и сократить на $\widetilde{m}$, то получим второе уравнение системы (27). Это означает, что второе и четвертое уравнения линейно зависимы. Из второго уравнения выразим $\overline{D}$ через $\overline{B}$, $\overline{D}=Q\overline{B}/\widetilde{m}$, и подставим в третье уравнение, а первое уравнение умножим слева на Q. С учетом (26) получим следующую систему:

$$\begin{gathered} Q\overline{B} + \tilde{m}Q\overline{C} = QQ\overline{A}, \\ -\tilde{m}\overline{A} + \frac{1}{\tilde{m}}\overline{B}Q = Q\overline{C}. \end{gathered} \tag{28}$$

В результате сложения уравнений системы (28) получим уравнение $2Q\overline{B} = 0$, из которого следует

$$\overline{B} = \overline{D} = 0, \tag{29}$$

т.е.

$$\overline{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \overline{D} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Тогда, подставив (29) в первое уравнение системы (27), получим

$$\overline{C} = \frac{1}{\tilde{m}} Q\overline{A}, \tag{30}$$

где $\overline{A}$ — произвольная. С учетом (24), (29) и (30) запишем

$$\overline{X}(t) = e^{m_1 t}\left(\overline{A}\cos(\tilde{m}t) + \frac{1}{\tilde{m}} Q\overline{A}\sin(\tilde{m}t) \right). \tag{31}$$

В выражение (31) входит произвольный вектор-столбец, состоящий из четырех констант интегрирования, для определения которых используем начальное условие, т.е. рассмотрим опорную точку $t = 0$, $K = 0$. Подставив эти значения в ряд для экспоненты, получим

$$\mathrm{Exp}\,(0) = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4, \tag{32}$$

откуда

$$\overline{X}(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \tag{33}$$

Подставляя (33) в (24), находим $A_1 = 1, A_2 = 0, A_3 = 0, A_4 = 0$. Решение системы получим, подставив значения A_1, A_2, A_3, A_4 в (24):

$$x_1 = e^{m_1 t} \cos(\widetilde{m} t),$$

$$x_2 = \frac{m_2}{\widetilde{m}} e^{m_1 t} \sin(\widetilde{m} t),$$

$$x_3 = \frac{m_3}{\widetilde{m}} e^{m_1 t} \sin(\widetilde{m} t),$$

$$x_4 = \frac{m_4}{\widetilde{m}} e^{m_1 t} \sin(\widetilde{m} t).$$

С помощью общих решений запишем экспоненциальную функцию от антикватернионной переменной, приняв $m_i t \approx m_i$:

$$\operatorname{Exp}(M) = e^{m_1}\left(\cos\widetilde{m} e_1 + \frac{\sin\widetilde{m}}{\widetilde{m}}(m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4)\right) =$$

$$= e^{m_1}\left(\cos\sqrt{\left|m_2^2 - m_3^2 - m_4^2\right|}\, e_1 + \frac{\sin\sqrt{\left|m_2^2 - m_3^2 - m_4^2\right|}}{\sqrt{\left|m_2^2 - m_3^2 - m_4^2\right|}}(m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4)\right).$$

Используя связи тригонометрических функций с гиперболическими, можем записать

$$\operatorname{Exp}(M) = e^{m_1}\left(\operatorname{ch}\sqrt{\left|-m_2^2 + m_3^2 + m_4^2\right|}\, e_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{(m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4)}{\sqrt{\left|-m_2^2 + m_3^2 + m_4^2\right|}} \operatorname{sh}\sqrt{\left|-m_2^2 + m_3^2 + m_4^2\right|}\right), \tag{34}$$

II. $m_3^2 + m_4^2 - m_2^2 > 0$. В этом случае имеем два кратных действительных корня: $\lambda_{1,2,3,4} = m_1 \pm \overline{m}$. Решение системы (7) находим в следующем виде:

$$X_k(t) = e^{(m_1 + \overline{m})t}(A_k + B_k t) + e^{(m_1 + \overline{m})t}(C_k + D_k t) =$$

$$= e^{m_1 t}(e^{\overline{m} t}(A_k + B_k t) + e^{-\overline{m} t}(C_k + D_k t)), \quad k = 1, \ldots, 4. \tag{35}$$

Вычисляем первую производную:

$$\frac{dX_k(t)}{dt} = e^{m_1 t}(e^{\overline{m} t}((A_k + B_k t)(m_1 + \overline{m}) + B_k) +$$

$$+ e^{-\overline{m} t}((C_k + D_k t)(m_1 - \overline{m}) + D_k)), \quad k = 1, \ldots, 4. \tag{36}$$

Как и в случае I, подставим равенства (35) и (36) в ассоциированную систему (20) и используем метод неопределенных коэффициентов. В результате получим систему 16 уравнений с 16 неизвестными, решив которую запишем следующие общие решения:

$$x_1 = e^{(m_1+\overline{m})t}\left(\frac{m_3\overline{m}-m_2m_4}{m_4^2+m_3^2}A_3+\frac{m_4\overline{m}+m_2m_3}{m_4^2+m_3^2}A_4\right)+$$

$$+e^{(m_1-\overline{m})t}\left(\frac{-m_3\overline{m}-m_2m_4}{m_4^2+m_3^2}C_3+\frac{-m_4\overline{m}+m_2m_3}{m_4^2+m_3^2}C_4\right),$$

$$x_2 = e^{(m_1+\overline{m})t}\left(\frac{m_4\overline{m}+m_2m_3}{m_4^2+m_3^2}A_3+\frac{m_2m_4-m_3\overline{m}}{m_4^2+m_3^2}A_4\right)+$$

$$+e^{(m_1-\overline{m})t}\left(\frac{-m_4\overline{m}+m_2m_3}{m_4^2+m_3^2}C_3+\frac{m_2m_4+m_3\overline{m}}{m_4^2+m_3^2}C_4\right),$$

$$x_3 = e^{(m_1+\overline{m})t}A_3+e^{(m_1-\overline{m})t}C_3,\quad x_4 = e^{(m_1+\overline{m})t}A_4+e^{(m_1-\overline{m})t}C_4.$$

Для нахождения значений произвольных констант используем равенство (32):

$$A_1=\frac{1}{2},\ A_2=\frac{1}{2}\frac{m_2}{\overline{m}},\ A_3=\frac{1}{2}\frac{m_3}{\overline{m}},\ A_4=\frac{1}{2}\frac{m_4}{\overline{m}},\ B_1=0,\ B_2=0,\ B_3=0,\ B_4=0,$$

$$C_1=\frac{1}{2},\ C_2=-\frac{1}{2}\frac{m_2}{\overline{m}},\ C_3=-\frac{1}{2}\frac{m_3}{\overline{m}},\ C_4=-\frac{1}{2}\frac{m_4}{\overline{m}},$$

$$D_1=0,\ D_2=0,\ D_3=0,\ D_4=0.$$

Итак, общее решение для получения представления экспоненты антикватернионной переменной имеет вид

$$\mathrm{Exp}\,(M)=e^{m_1}\left(\mathrm{ch}\sqrt{-m_2^2+m_3^2+m_4^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4)}{\sqrt{-m_2^2+m_3^2+m_4^2}}\mathrm{sh}\sqrt{-m_2^2+m_3^2+m_4^2}\right). \qquad (37)$$

Поскольку рассматривается случай, когда подкоренное выражение больше нуля, (37) можно записать в виде

$$\operatorname{Exp}(M)=e^{m_1}\left(\operatorname{ch}\sqrt{\left|-m_2^2+m_3^2+m_4^2\right|}+\right.$$

$$\left.+\frac{(m_2e_2+m_3e_3+m_4e_4)}{\sqrt{\left|-m_2^2+m_3^2+m_4^2\right|}}\operatorname{sh}\sqrt{\left|-m_2^2+m_3^2+m_4^2\right|}\right). \quad (38)$$

III. $m_3^2+m_4^2-m_2^2=0$. В этом случае имеем один кратный действительный корень:

$$\lambda_{1,2,3,4}=m_1. \quad (39)$$

С учетом (39) решение ассоциированной системы (20) находим в виде

$$X_k(t)=e^{(m_1+\overline{m})t}(A_k+B_kt+C_kt^2+D_kt^3),\quad k=1,\dots,4. \quad (40)$$

Вычисляем первую производную:

$$\frac{dX_k(t)}{dt}=e^{m_1t}(m_1A_k+B_k+(m_1B_k+2C_k)\,t+$$

$$+(m_1C_k+3D_k)\,t^2+m_1D_kt^3),\ k=1,\dots,4. \quad (41)$$

Как и ранее, подставив равенства (40) и (41) в ассоциированную систему (20) и использовав метод неопределенных коэффициентов, получим систему 16 уравнений с 16 неизвестными, решив которую, запишем следующие общие решения:

$$x_1=e^{m_1t}\left(-\frac{m_4}{m_2}A_3+\frac{m_3}{m_2}A_4+\frac{m_3}{m_2^2}B_3+\frac{m_4}{m_2^2}B_4+\left(-\frac{m_4}{m_2}B_3+\frac{m_3}{m_2}B_4\right)t\right),$$

$$x_2=e^{m_1t}\left(\frac{m_3}{m_2}A_3+\frac{m_4}{m_2}A_4+\frac{m_4}{m_2^2}B_3-\frac{m_3}{m_2^2}B_4+\left(\frac{m_3}{m_2}B_3+\frac{m_4}{m_2}B_4\right)t\right),$$

$$x_3=e^{m_1t}(A_3+B_3t),$$

$$x_4=e^{m_1t}(A_4+B_4t).$$

Для нахождения значений произвольных констант используем равенство (32):

$$A_1 = 1,\ B_1 = 0,\ C_1 = 0,\ D_1 = 0,$$

$$A_2 = 0,\ B_2 = m_2,\ C_2 = 0,\ D_2 = 0,$$

$$A_3 = 0,\ B_3 = m_3,\ C_3 = 0,\ D_3 = 0,$$

$$A_4 = 0\,,\ B_4 = m_4,\ C_4 = 0,\ D_4 = 0.$$

Представление экспоненты в этом случае имеет вид

$$\text{Exp}\,(M) = e^{m_1}(e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4)\,. \tag{42}$$

Сравнивая выражения (34), (38) и (42), видим, что представления экспоненты для случаев I и II совпадают. Если при этом устремить подкоренное выражение равенства (22) к нулю, то получим представление экспоненты для случая III.

Выводы

Из полученных результатов следует, что в гиперкомплексной числовой системе антикватернионов определен набор арифметических и алгебраических операций, который позволяет использовать эту числовую систему для построения математических моделей в различных областях науки и техники. Целесообразно построить представления других функций антикватернионов, таких, как логарифмическая, тригонометрические и гиперболические функции, что может быть предметом дальнейших научных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кантор И.Л., Солодовников А.С.* Гиперкомплексные числа. — М. : Наука, 1973. — 144 с.
2. *Синьков М.В., Бояринова Ю.Е., Калиновский Я.А.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения. — Киев. : Инфодрук, 2010. — 388 с.
3. *Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е.* Высокоразмерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использование для повышения эффективности вычислений. — Киев. : Инфодрук, 2012. — 183 с.
4. *Kuzmina I., Mikes J.* On pseudoconformal models of fibrations determined by the algebra of antiquaternions and projectivization of them // Annales Mathematicae et Informaticae. — 2013. — Vol. 42. — P. 57—64.
5. *Элиович А.А.* О норме бикватернионов и иных алгебр с центральным сопряжением. [Электронный ресурс] — Режим доступа: http://hypercomplex.xpsweb.com/page.php?lang=ru&id=176. 2004.
6. *Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е.* Высокоразмерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их применения. — Киев : Инфодрук, 2012. — 182 с.

7. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е., Федоренко А.В.* Построение некоторых функций в гиперкомплексной числовой системе 4-го порядка// Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2006. — **8**, № 1. — С. 9—16.
8. *Синьков М.В., Калиновский Я.А.* Представления экспонент в изоморфных гиперкомплексных числовых системах // Там же. — 2011. — **13**, № 2. — С. 27—37.

Y. Kalinovsky, J. Boyarinova, A.Turenko, Y. Khitsko

RESEARCH OF COMPUTING OPERATIONS
IN HYPERCOMPLEX NUMBER SYSTEM OF ANTIQUATERNIONS

The main properties of antiquaternions as generalization of hypercomplex system of quaternions are presented in the article. Definitions and rules of performance of operations with antiquaternions, conjugate antiquaternions, their norm and zero divider are introduced and investigated, and representation of exponential function of antiquaternion variable by using the method of associated system of the linear differential equations is constructed as well. Such studies would allow one to formulate and solve new practical problems and improve the efficiency of solving the problems already discussed earlier.

K e y w o r d s: quaternion, antiquaternion, hypercomplex number system, zero divisor, exponent, pseudonorm, conjugate antiquaternion.

REFERENCES

1. *Kantor I.L., Solodovnikov A.S.* Hypercomplex numbers. – Moscow: Nauka, 1973. — 144 p. (in Russian).
2. *Sinkov M.V., Boyarinova J.E., Kalinovsky Y.A.* Finite-dimensional hypercomplex number systems. Fundamentals of the theory. Applications. – Kyiv: Infodruk, 2010. — 388 p. (in Russian).
3. *Kalinovsky Y.A., Boyarinova J.E.* High-dimensional isomorphic hypercomplex number systems and their use for efficiency increase calculations. – Kyiv: Infodruk, 2012. — 183 p. (in Russian).
4. *Kuzmina I., Mikes J.* On pseudoconformal models of fibrations determined by the algebra of antiquaternions and projectivization of them // Annales Mathematicae et Informaticae. — 2013. — Vol. 42. — P. 57—64.
5. *Eliovich A.A*. About norm of biquaternions and other algebras with central interfaces // Hypercomplex numbers in geometry and physics. – 2004 [Online] 4. pp. 24-50. Available from: http://hypercomplex.xpsweb.com/articles/176/ru/pdf/02-04.pdf [Accessed]
6. *Kalinovsky Y.A., Boyarinova J.E.* High-dimensional isomorphic hypercomplex number systems and their applications. — Kyiv: Infodruk, 2012. — 182 p. (in Russian).
7. *Sinkov M.V., Kalinovsky Y.A., Boyarinova J.E., Fedorenko A.V.* Creation of some functions in hypercomplex number system of 4 dimension // Data Recording, Storage and Processing. — 2006. — Vol. 8, № 1. — P. 9—16 (in Russian).
8. *Sinkov M.V., Kalinovsky Y.A.* An exponent representations in isomorphic hypercomplex number systems // Ibid. — 2011. – Vol. 13, № 2 — P. 27—37 (in Russian).

Поступила 28.04.14

КАЛИНОВСКИЙ Яков Александрович, д-р техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины. В 1965 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

ТУРЕНКО Алина Сергеевна, аспирантка Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины. В 2013 г. окончила Житомирский государственный университет. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

БОЯРИНОВА Юлия Евгеньевна, канд. техн. наук, доцент Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т», который окончила в 1997 г. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

ХИЦКО Яна Владимировна, мл. науч. сотр. Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т», который окончила в 2005 г. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.