УДК 681.3: 658.56.

Ю.А. Кулаков, д-р техн. наук,
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический ин-т»
(Украина, 03056, Киев, ул. Политехническая, 16, корпус 18,
тел. (044) 4549292, e-mail: ya.kulakov@gmail.com),
В.В. Воротников, канд. техн. наук
Житомирский военный ин-т им. С.П. Королева
Государственного университета телекоммуникаций
(Украина, 10004, Житомир, пр. Победы, 22,
тел.(096) 3734865, e-mail: vvvorotnik@ukr.net)

Кластеризация ассоциативной сети на основе полиномиально-вычислимых спектральных инвариантов графов

Рассмотрено применение полиномиальных инвариантов графов в качестве основной информации для разбиения графа. Для кластеризации узлов сети предложено использование целевой функции — взвешенной суммы квадратов расстояний между узлами сети. Для минимизации целевой функции при соблюдении условия симметричности и положительной определенности матрицы Лапласа использован метод неопределенных множителей Лагранжа.

Розглянуто застосування поліноміальних інваріантів графів в якості основної інформації для розбиття графа. Для кластеризації вузлів мережі запропоновано використання цільової функції — зваженої суми квадратів відстаней між вузлами мережі. Для мінімізації цільової функції при виконанні умов симетричності і додатної визначеності матриці Лапласа використано метод невизначених множників Лагранжа.

Ключевые слова: *кластеризация, ассоциативная сеть, спектральный анализ, инвариант графа, собственные значения, характеристический многочлен.*

В настоящее время в связи с широким распространением беспроводных технологий методы управления телекоммуникационными сетями существенно усложнились. Наметившаяся тенденция многоуровневого управления мобильной телекоммуникационной сетью подняла на новый уровень важность решения задач оптимального разделения узлов сети на кластеры.

Существующие методы кластеризации можно разделить на две группы: иерархические и распределенные [1—4]. Иерархические методы предоставляют структурную информацию — дендрограммы, но применимы только для небольших наборов данных. С увеличением размера (масштаба сети) вычислительные затраты возрастают в связи с необходимостью рассчитывать матрицу близости при условии, что каждый элемент сравнивается с каждым. Разделяющие методы менее требовательны к ресурсам. К таким методам относятся метод *K*-средних, самоорганизующиеся карты Кохонена, спектральный анализ графов [2, 5—8].

В условиях постоянного изменения структуры мобильной сети наиболее значимыми являются задачи определения пространства состояний графа, которое позволяет ввести понятие устойчивости изменений структуры графа во времени (графовых траекторий) по отношению к малым возмущениям, а именно: задача определения в графе подграфа, который не меняется или незначительно меняется во времени; задача о сохранении кластера, т.е. выделение группы узлов, которые при изменении структуры графа остаются в составе своего кластера, и др.

Следовательно, разработка методов спектрального анализа графов с изменяемой во времени структурой является актуальным направлением.

Обзор последних публикаций. Спектральный анализ графов применяется для нахождения собственных значений (частот) при анализе поведения мостов, зданий, летательных аппаратов и других объектов, в телекоммуникациях — при анализе трафика с малыми смещениями (девиацией) от положения равновесия. Характеристическое уравнение, с его собственными значениями и собственными векторами, является основным в теории механических или электрических колебаний на макроскопическом или микроскопическом уровнях [3, 5, 6].

Анализ литературы [1—3, 5, 7] свидетельствует о том, что теория спектрального анализа, применимая к графам, оперирует инвариантами как наиболее показательными характеристиками графов, пригодными для проверки изоморфизма графов различного вида.

Методы спектрального анализа широко используются для нахождения минимальных путей распределения «центров», покрывающих заданную область (задачи размещения телевизионных или радиопередающих станций, предприятий, центров торговли и др.) и решения задач классификации (отнесение определенного объекта к одному из нескольких попарно не пересекающихся множеств). Алгоритм спектрального анализа предназначен для работы с взвешенным планарным неориентированным графом связности. Кластеризация сводится к поиску собственных значений матрицы Лапласа.

Кластеризация узлов однородной мобильной сети на основе анализа спектра ее матрицы смежности. Кластером ассоциативной сети называется ее подграф, обладающий следующими свойствами:

элементы подграфа сильно связаны между собой и слабо связаны с элементами ассоциативной сети, не входящими в данный подграф;

подграф ассоциативной сети выполняет интерпретируемую функцию в рамках функционирования автоматизированной системы управления, описываемой этой сетью.

Рассмотрим алгоритм кластеризации [1, 3, 7]. На первом шаге ассоциативная сеть преобразуется во взвешенный планарный неориентированный граф. Все объекты в сети заданы как вершины одного типа. Все связи в сети также заданы как связь одного типа. Тип связи и типы объектов учитываются при определении веса для связи между вершинами. Вес связи является входным параметром метода и задается пользователем. По умолчанию веса́ для всех типов связей — одинаковы.

Для преобразованного графа ассоциативной сети строится матрица смежности A и матрица степеней D. По ним вычисляется матрица Лапласа L. Для каждой вершины графа по матрице Лапласа степенным методом или методом Якоби находятся собственные значения и соответствующие им собственные векторы. Собственный вектор, соответствующий наименьшему собственному значению, дает вырожденное (нулевое) решение. Второе по величине, наименьшее собственное значение и соответствующий ему собственный вектор (Fielder-вектор), дают желаемую информацию о кластеризации. Все вершины, имеющие одинаковые компоненты в этом векторе, объединяются в кластер.

Формулировка и решение задачи. Пусть задан граф связности узлов мобильной сети $G = G(V, E)$. Две вершины, v_i, v_j, считаются связанными ребром e_{ij}, если существует связь заданного уровня между узлами в мобильной сети. Вершины и ребра имеют соответственно веса $w(v_i)$ и $w(v_i, v_j)$. Требуется найти такое разбиение $R(V) = (V_1, ..., V_p)$ вершин на заданное число кластеров p, при котором целевая функция F принимает минимальное значение:

$$\min_{R(V)} \left\{ F = \max_{k=1,\ldots,p} \sum_{v_i \in V_k} \left(w(v_i) + \alpha \sum_{v_i \notin V_k} w(v_i, v_j) \right) \right\}, \tag{1}$$

$$V = \bigcup_{k=1}^{p} V_k, \quad V_i \bigcap V_j = \varnothing, \quad i \neq j. \tag{2}$$

Мультипликативная константа α обеспечивает согласование единиц измерения весов вершин и ребер, что позволяет формализовать требования выравнивания межкластерной нагрузки, сводя задачу к минимизации F [7, 8].

В качестве целевой функции используем взвешенную сумму F квадратов расстояний между узлами сети. Задача (1), (2) относится к классу

NP-полных задач и в общем случае ее точное решение в реальном масштабе времени невозможно, что оправдывает использование эвристических алгоритмов.

При использовании спектральных методов связями первого уровня будем считать все непосредственные связи между вершинами, связи второго уровня определяются в том случае, если два узла связаны через один общий транзитный, связи третьего уровня — если два узла связаны через два транзитных и так далее. Таким образом, имеем для мобильной сети взвешенный неориентированный планарный граф связности, характеризуемый симметричной $n \times n$ матрицей инцидентности (смежности) $A = A(G)$:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } v_i, v_j \text{ связаны,} \\ \dfrac{1}{\rho_{\text{ij}}}, & \text{если вершины } v_i, v_j \text{ не связаны,} \end{cases}$$

где $i, j = 1, \ldots, N$, $i \neq j$; ρ_{ij} — уровень связи (наикратчайшее расстояние) между вершинами сети v_i и v_j.

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, являющиеся решениями характеристического уравнения $|A - \lambda * I| = 0$, где I — единичная матрица размерности n, называются характеристическими (собственными) значениями матрицы A. Соответствующие каждому λ_i, $i = 1, \ldots, n$, ненулевые векторы X, удовлетворяющие системе

$$(A - \lambda_i * I)\, X = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

называются собственными векторами или спектром матрицы A.

Используем свойства собственных значений матрицы Лапласа и соответствующих им собственных векторов для разбития сети на кластеры. В литературе различают полную и частичную проблему собственных значений, когда необходимо найти весь спектр (все собственные значения) и собственные векторы либо часть спектра, например его спектральный радиус [1, 3].

Решение задачи кластеризации ассоциативной сети аналогично решению второй задачи линейной алгебры [9]. По матрице A строим матрицу степеней D:

$$d_{ij} = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{N} a_{kj} & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Матрица Лапласа L имеет вид $L = D - A$ и обладает следующими свойствами:

$$X^T L X = \sum_{ij} L_{ij} x_i x_j \geq 0, \tag{4}$$

т.е. является симметричной и положительно определенной. Минимальное собственное значение матрицы равно нулю и достигается на векторе $X = \left(\frac{1}{\sqrt{N}}, \frac{1}{\sqrt{N}}, ..., \frac{1}{\sqrt{N}}\right)$, где N — размерность матрицы.

Для выполнения процедуры кластеризации необходимо найти такой вектор $X^T = (x_1, x_1, ..., x_N)$, который минимизирует взвешенную сумму F квадратов расстояний между узлами (тривиальное решение $x_i = 0$ для $\forall i$ не учитывается):

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(x_i - x_j)^2 a_{ij} \quad \text{при} \quad XX^T = \mathrm{I}, \tag{5}$$

где N — число вершин в графе; X^T — транспонирование матрицы X.

Перепишем равенство (2) в терминах матрицы Лапласа:

$$F = X^T LX. \tag{6}$$

Действительно,

$$X^T LX = X^T DX - X^T AX =$$

$$= \sum_i d_i x_i^2 - \sum_j x_j \sum_i x_i a_{ij} = \sum_i d_i x_i^2 - \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j.$$

Учитывая (2), согласно [9] получаем тождество

$$\sum_i x_i^2 \sum_j a_{ij} - \sum_i a_{ij} x_i x_j = \sum_{ij}(x_j^2 a_{ij} - x_i x_j a_{ij}) =$$

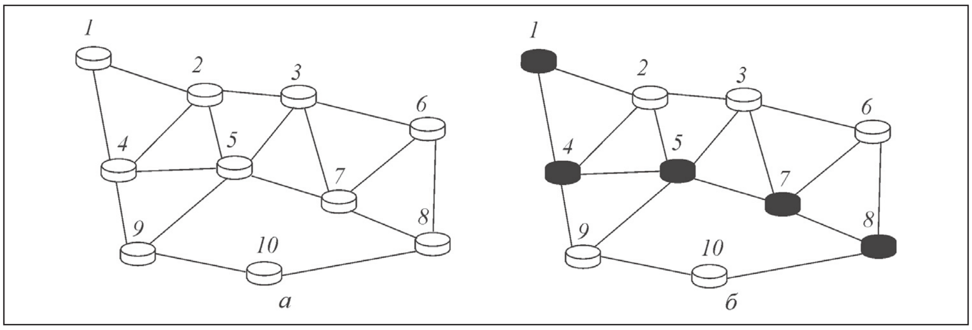
$$= \frac{1}{2}\sum_{ij}(a_{ij}x_i^2 - 2a_{ij}x_i x_j + a_{ij}x_j^2) = \frac{1}{2}\sum_{ij} a_{ij}(x_i - x_j)^2 \equiv F.$$

Методом неопределенных множителей Лагранжа с условиями ограничений (3) найдем $F \to \min$. Для этого введем многочлен Лагранжа $L(X, \lambda) = X^T LX - \lambda(X^T X - \mathrm{I})$ и получим систему уравнений

$$(L - \lambda\mathrm{I})X = 0 \Leftrightarrow |L - \lambda\mathrm{I}| = 0.$$

Таким образом, задача минимизации F сводится к поиску собственных значений матрицы L.

Для поиска второго наименьшего собственного значения и соответствующего ему собственного вектора используют два метода [7]: метод непосредственного развертывания (метод Якоби) и степенной метод (метод итераций). Эти методы поиска спектра графа применимы для действительных симметричных матриц.



Граф мобильной сети, подлежащей кластеризации, (*а*) и разбиение узлов сети на два кластера (*б*): ⬬ — кластер 1; ⬭— кластер 2

Алгоритм Якоби значительно проще других, более эффективных методов, но для матриц размерности больше 10×10 он слишком медленный. Поэтому его целесообразно использовать для небольших тестовых расчетов, когда время выполнения не является критическим.

Степенной метод, как правило, используется для поиска максимального собственного значения симметричной, положительно определенной матрицы. Применяя ортогонализацию метода, можно последовательно получить все собственные значения матрицы.

Пример. Пусть задана мобильная сеть $G = G(10,17)$, состоящая из однородных узлов *1—10* (см. рисунок *а*). Необходимо выполнить кластеризацию узлов сети. Для данной сети матрица расстояний между узлами X имеет вид

$$X = \left| \begin{array}{rrrrrrrrrrr} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 0 & 90 & 170 & 85 & 157 & 290 & 256 & 335 & 173 & 266 \\ 2 & 90 & 0 & 80 & 76 & 77 & 200 & 167 & 248 & 125 & 192 \\ 3 & 170 & 80 & 0 & 141 & 64 & 121 & 99 & 182 & 141 & 155 \\ 4 & 85 & 76 & 141 & 0 & 98 & 248 & 201 & 271 & 88 & 190 \\ 5 & 157 & 77 & 64 & 98 & 0 & 151 & 103 & 178 & 76 & 115 \\ 6 & 290 & 200 & 121 & 248 & 151 & 0 & 62 & 98 & 210 & 148 \\ 7 & 256 & 167 & 99 & 201 & 103 & 62 & 0 & 83 & 152 & 90 \\ 8 & 135 & 248 & 182 & 271 & 178 & 98 & 83 & 0 & 204 & 102 \\ 9 & 173 & 125 & 141 & 88 & 76 & 210 & 152 & 204 & 0 & 109 \\ 10 & 266 & 192 & 155 & 190 & 115 & 148 & 90 & 102 & 109 & 0 \end{array} \right| .$$

Построим матрицу инцидентности (смежности) сети и матрицу степеней D (2):

$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array},$$

$$D=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} & \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \end{array}.$$

Для простоты вычислений рассмотрим связи только первого уровня, так что

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } v_i, v_j \text{ связаны}, \\ 0, & \text{если вершины } v_i, v_j \text{ не связаны}. \end{cases}$$

Тогда матрица Лапласа графа сети примет следующий вид :

$$L = D - A = \left|\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 4 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right|.$$

В соответствии с (4) для каждой вершины графа по матрице Лапласа методом Якоби найдем собственные значения и соответствующие им собственные векторы.

Для выполнения условия (5) нормируем векторы расстояний матрицы X, соответствующие каждой вершине, и представим их в виде $X_{\text{н}} X_{\text{н}}^{T} = \mathrm{I}$:

$$X_{\text{н}1}^{T} = (0\ \ 0{,}72\ \ 0\ \ 0{,}70\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0);$$

$$X_{\text{н}2}^{T} = (0{,}53\ \ 0\ \ 0{,}5\ \ 0{,}49\ \ 0{,}49\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0);$$

$$X_{\text{н}3}^{T} = (0\ \ 0{,}47\ \ 0\ \ 0\ \ 0{,}42\ \ 0{,}58\ \ 0{,}52\ \ 0\ \ 0\ \ 0);$$

$$X_{\text{н}4}^{T} = (0{,}49\ \ 0{,}47\ \ 0\ \ 0\ \ 0{,}53\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0);$$

$$X_{\text{н}5}^{T} = (0\ \ 0{,}43\ \ 0{,}39\ \ 0{,}48\ \ 0\ \ 0\ \ 0{,}5\ \ 0\ \ 0{,}43\ \ 0);$$

$$X_{\text{н}6}^{T} = (0\ \ 0\ \ 0{,}66\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0{,}47\ \ 0{,}59\ \ 0\ \ 0);$$

$$X_{\text{н}7}^{T} = (0\ \ 0\ \ 0{,}53\ \ 0\ \ 0{,}54\ \ 0{,}42\ \ 0\ \ 0{,}49\ \ 0\ \ 0);$$

$$X_{\text{н}8}^{T} = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0{,}59\ \ 0{,}54\ \ 0\ \ 0\ \ 0{,}6);$$

$$X_{\text{н}9}^{T} = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0{,}57\ \ 0{,}53\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0{,}63);$$

$$X_{\text{н}10}^{T} = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0{,}7\ \ 0{,}72\ \ 0).$$

Выражение (6) можно представить в виде $F = X_{\text{н}}^{T} L X_{\text{н}}$. С помощью метода Якоби найден вектор собственных значений первой кратности матрицы Z:

$$\lambda^{T} = (7{,}302\quad 6{,}115\quad 4{,}721\quad 1{,}736\quad 1{,}503\quad 1{,}118\quad 0\quad 0{,}399\quad 0{,}349\quad 0{,}142).$$

Собственный вектор матрицы, соответствующий наименьшему собственному значению $\lambda_7 = 0$, дает вырожденное (нулевое) решение. Второе по величине наименьшее собственное значение $\lambda_{10} = 0{,}142$ и соответствующий ему собственный вектор $P(\lambda_{10}) = (0{,}02\ \ -0{,}438\ \ -0{,}508\ \ 0{,}3\ \ 0{,}217\ \ -0{,}091\ \ 0{,}419\ \ 0{,}148\ \ -0{,}046\ \ -0{,}453)$ дают необходимую информацию для кластеризации [7].

Используя вектор $P(\lambda_{10})$, распределим вершины графа сети на два кластера. Все вершины, имеющие значения одного знака в этом векторе, объединим в один кластер, а остальные вершины — в другой. Результаты кластеризации узлов сети представлены на рисунке *б*, из которого видно, что в первый кластер попадают вершины *1*, *4*, *5*, *7*, *8*, а во второй — вершины *2*, *3*, *6*, *9*, *10*. Это соответствует оптимальному разбиению графа, представленного на рисунке *а*, на две равные части (по количеству узлов). В данном случае кластер 2 не является связным, поэтому в случае необходимости выполнения дальнейшего разбиения следует дополнить его фиктивными ребрами, удалить которые можно после получения окончательного результата.

Выводы

Использование спектральных инвариантов позволяет применять предложенный способ кластеризации ассоциативной сети при решении задач проверки изоморфизма графов. Применение метода Якоби для нахождения спектра матрицы смежности графа ассоциативной сети дает возможность выявить ситуацию с кратными собственными значениями матрицы и исследовать зависимость результата от выбора собственного вектора, соответствующего данному собственному значению. Разбиение, полученное таким методом, как правило, является достаточно хорошим приближением к оптимальному, но может быть улучшено с помощью локального уточнения.

Применение спектральных методов кластеризации на основе полиномиально-вычислимых инвариантов графа сети наиболее перспективно при иерархической маршрутизации в самоорганизующихся мобильных сетях, поскольку позволяет избежать таких недостатков алгоритмов маршрутизации, как неоптимальная структура сети и использование вычислительных ресурсов базовой станции для конфигурирования сети, а также позволяет повысить эффективность распределения узлов сети между кластерами.

Application of polynomial invariants of graphs is considered as basic information for breaking up of a graph. The use of the objective function — a self-weighted sum of squares of distances between the network nodes is offered for clusterization of the network nodes. The method of the Lagrange indefinite multipliers was used for minimization of the objective function, the condition of symmetry and positive definiteness of the Laplace matrix.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев А.М., Можаров Г.П.* Анализ основных характеристик компьютерных систем методами спектральной теории графов // [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.technomag.edu.ru/doc/ 233774.html
2. *Воротников В.В., Кулаков Ю.А.* Определение структурной сложности децентрализованных телекоммуникационных сетей специальных систем управления методами спектральной теории графов // Электроника и связь. — 2013. — № 1. — С. 110—117.
3. *Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.* Спектры графов: Теория и применение // Пер. с англ. В.С. Королюка; под ред. В.С. Королюка. Изд. 2-е. — Киев : Наук. думка, 1984. — 384 с.
4. *Aiello M., Andreozzi F., Catanzariti E. et al.* Fast Convergence for Spectral Clustering // 14th International Conf. on Image Analysis and Processing (ICIAP-2007). — 2007. — P. 641—646.
5. *Бувайло Д.П., Толок В.А.* Быстрый высокопроизводительный алгоритм для разделения нерегулярных графов // Вісн. Запорізького державного університету. — 2002. — № 2. — 10 с.
6. *Ряшко Л.Б., Башкирцева І.А.* Спектральний критерій стохастичної стійкості інваріантних многовидів // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 1. — С. 82—90.
7. *Якобовский М.В.* Обработка сеточных данных на распределенных вычислительных системах // Вопросы атомной науки и техники. Сер. «Математическое моделирование физических процессов». — 2004. — Вып. 2. — С. 40—53.
8. *Barabasi A., Albert R.* Emergence of Csaling in Random Networks // Science. — 1999. — Vol. 286. — P. 500—512.
9. *Парлетт Б.* Симметричная проблема собственных значений. Численные методы: Пер. с англ. — М. : Мир, 1983. — 384 с.

Поступила 29.01.14

КУЛАКОВ Юрий Алексеевич, д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры вычислительной техники факультета информатики и вычислительной техники Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т». В 1971 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — сверхпроизводительные вычислительные сети и системы.

ВОРОТНИКОВ Владимир Владимирович, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры автоматизированных систем управления факультета геоинформационных и космических систем Житомирского военного ин-та им. С.П. Королева Государственного университета телекоммуникаций. В 1994 г. окончил Житомирское военное училище радиоэлектроники. Область научных исследований — моделирование сложных информационных систем.