
УДК 519.6

Д.А. Верлань, аспирант
Киевский национальный университет им. Т. Шевченко
(Украина, 03127, Киев, просп. Академика Глушкова, 4д,
тел. (+38) 0632779797, e-mail: dmitriverlan@gmail.com)

Метод вырожденных ядер при численной реализации интегральных динамических моделей

Рассмотрены возможности численной реализации интегральных динамических моделей, которые являются непараметрическими и представлены интегральными уравнениями Вольтерры II и I рода, а также интегро-дифференциальными уравнениями. Разработаны рекуррентные численные алгоритмы решения указанных уравнений. Для построения алгоритмов использован метод вырожденных (разделяющихся) ядер. Предложен оптимизационный метод аппроксимации ядер интегральных операторов Вольтерры.

Розглянуто можливості чисельної реалізації інтегральних динамічних моделей, які є непараметричними і представлені інтегральними рівняннями Вольтерри II і I роду, а також інтегро-диференціальними рівняннями. Розроблено чисельні алгоритми розв'язування зазначених рівнянь. Для побудови алгоритмів використано метод вироджених (що розділяються) ядер. Запропоновано оптимізаційний метод апроксимації ядер інтегральних операторів Вольтерри.

Ключевые слова: интегральные уравнения, алгоритмы, аппроксимация, резольвента, интегро-дифференциальные уравнения.

Одним из актуальных направлений развития численных и компьютерных методов математического моделирования динамических систем является применение непараметрических динамических моделей в виде интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Ядра интегральных операторов, составляющих основу указанных моделей, представляют собой функции двух переменных и отображают динамические характеристики исследуемых объектов. Важными для численной реализации интегральных операторов являются сглаживающие свойства и устойчивость операций интегрирования.

Интегральные уравнения Вольтерры II рода, имеющие вид

$$y(t) + \int_a^t K(t, \tau) y(\tau) d\tau = f(t), \quad (1)$$

© Д.А. Верлань, 2014

где ядро $K(t, \tau)$ и функция $f(t)$ заданы, а функция $y(\tau)$ — искомая, получают все большее распространение в качестве моделей динамических объектов различной физической природы и назначения [1]. Особенно важна роль этих уравнений при исследовании систем управления объектами с сосредоточенными и распределенными параметрами. При этом особое значение имеют задачи формирования и реализации моделей, предназначенных для синтеза управляющих систем в случаях, когда управляющая часть системы (регулятор) построена в виде приложений, организованных по заданной динамической модели. В этом случае к алгоритмам и программам реализации динамических моделей предъявляются высокие требования относительно производительности, т.е. программы должны обеспечивать функционирование системы в реальном времени. Это свидетельствует о наличии соответствующих требований к разработке численных алгоритмов для решения соответствующих уравнений.

Известно [2], что наиболее распространенные квадратурные методы решения интегрального уравнения (1), имеющие ряд преимуществ (простота алгоритма, высокая устойчивость расчетного процесса), для ядер произвольного вида обладают таким свойством, что при каждом новом шаге расчетов число операций возрастает.

Эффективным подходом к преодолению данной трудности может быть применение метода вырожденных ядер [3], позволяющего строить алгоритмы решения, в которых число операций на каждом шаге дискретизации не зависит от номера шага. Действительно, интегральное уравнение (1) с вырожденным ядром

$$K(t, \tau) \cong \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \beta_i(\tau), \quad (2)$$

где $\alpha_i(t)$ и $\beta_i(\tau)$ — заданные функции, принимает вид

$$y(t) + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \int_a^{t_j} \beta_i(\tau) y(\tau) = f(t). \quad (3)$$

Преобразуем уравнение (3) в дискретную форму:

$$y(t_j) + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t_j) \int_a^t \beta_i(\tau) y(\tau) = f(t_j), \quad j = \overline{1, n}.$$

Это позволяет применить для решения интегрального уравнения одну из квадратурных формул [4] и получить рекуррентное выражение

$$y_l = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^N \alpha_i(x_l) \beta_i(x_l)} \left(f_l + \sum_{i=1}^N \alpha_i(x_l) \sum_{j=1}^{l-1} \beta_i(x_j) A_j y_j \right), \quad l = \overline{2, n}, \quad y_1 = f_1,$$

из которого видно, что количество вычислений на каждом шаге остается неизменным, так как для вычисления каждой из N сумм $\sum_{j=1}^{l-1} \beta_i(x_j) A_j y_j$

можно воспользоваться результатом вычислений на предыдущем шаге:

$$\sum_{j=1}^{l-1} \beta_i(x_j) A_j y_j = \sum_{j=1}^{l-2} \beta_i(x_j) A_j y_j + \beta_i(x_{j-1}) A_{j-1} y_{j-1}, \quad l = \overline{3, n}.$$

Именно поэтому целесообразно использовать при решении особенность разделения ядер.

Применение общей квадратурной формулы с постоянным шагом $h = h_i = \text{const}$ позволяет получить расчетное выражение в виде

$$y_l = \frac{1}{1 - \frac{h}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i(x_l) \beta_i(x_l)} \left(f_l + h \sum_{i=1}^N \alpha_i(x_l) \sum_{j=1}^{l-1} \beta_i(x_j) A_j \tilde{y}_j \right), \quad l = \overline{2, n},$$

$$\tilde{y}_1(a) = f_1(a),$$

где $l = \overline{2, 3, \dots, n}$; $x_l = a + h(i-1)$;

$$A_j = \begin{cases} 0,5 & \text{при } j=1, \\ 1 & \text{при } j>1. \end{cases}$$

Аппроксимация ядра. В общем случае для решения уравнения (1), когда ядро имеет произвольный вид, применение метода вырожденных ядер требует предварительной аппроксимации ядра вырожденным ядром и дополнительных вычислений для реализации метода аппроксимации. Это обстоятельство не является препятствием для применения метода вырожденных ядер как в исследовательских задачах, не связанных с требованием к быстродействию алгоритмов, так и при синтезе систем управления, поскольку эти задачи решаются на этапе проектирования системы.

Представление функций двух переменных в удобном для вычисления виде — актуальная задача при решении многих исследовательских и проектных проблем в математической физике, электронике, биофизике, системах измерения, управления и во многих других научных и прикладных областях. В вычислительной математике распространен подход к аппроксимации функций двух переменных, который состоит в предварительном выборе одной или двух систем координатных функций и последующем отыскании коэффициентов разложения исходной функции из условий выбранного критерия оптимальности.

Рассмотрим численные алгоритмы аппроксимации функций двух переменных. При этом функции одной переменной, сумма парных произведений которых аппроксимирует исходную функцию, формируются оптимально по критерию минимума квадратичной невязки. Задача аппроксимации сводится к решению задачи минимизации функционала

$$\Phi = \int_a^b \int_a^b \left[K(t, \tau) - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \beta_i(\tau) \right]^2 dt d\tau. \quad (4)$$

Сначала находим первое приближение заданной функции в виде одного слагаемого $\alpha_1(t) \beta_1(\tau)$, которое формируем следующим образом: задаем $\beta_1^{(0)}(\tau)$ — начальное приближение функции $\beta_1(\tau)$ и из условий минимума функционала

$$\Phi_1^{(0,0)} = \int_a^b \int_a^b [K(t, \tau) - \alpha_1^{(0)}(t) \beta_1^{(0)}(\tau)]^2 dt d\tau \quad (5)$$

получаем $\alpha_1^{(0)}(t)$, т.е. начальное приближение $\alpha_1(t)$. В соответствии с известным вариационным методом для выполнения условия (5) необходимо выполнение равенства

$$\alpha_1^{(0)}(t) = \frac{\int_a^b K(t, \tau) \beta_1^{(0)}(\tau) d\tau}{\int_a^b (\beta_1^{(0)}(\tau))^2 d\tau}.$$

Затем из условия минимума функционала

$$\Phi_1^{(0,1)} = \int_a^b \int_a^b [K(t, \tau) - \alpha_1^{(0)}(t) \beta_1^{(1)}(\tau)]^2 dt d\tau$$

находим первое приближение функции $\beta_1(\tau)$:

$$\beta_1^{(1)}(\tau) = \frac{\int_a^b K(t, \tau) \alpha_1^{(0)}(t) dt}{\int_a^b (\alpha_1^{(0)}(t))^2 dt}$$

и так далее. Процесс прекращается, как только выполняются условия

$$\int_a^b (\beta_1^{(n+1)}(\tau) - \beta_1^{(n)}(\tau))^2 d\tau \leq \varepsilon, \quad \int_a^b (\alpha_1^{(n+1)}(t) - \alpha_1^{(n)}(t))^2 dt \leq \varepsilon,$$

где ε — показатель заданной точности вычисления функций $\beta_1(\tau)$ и $\alpha_1(t)$.

После достижения заданной точности $\alpha_1(t)$ и $\beta_1(\tau)$, аналогично выполняем приближение функции $K(t, \tau) - \alpha_1(t)\beta_1(\tau)$ произведением $\alpha_2(t)\beta_2(\tau)$, исходя из того же критерия оптимальности (4), пока не будет выполнено условие

$$\int_a^b \int_a^b \left[K(t, \tau) - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t)\beta_i(\tau) \right]^2 dt d\tau < \varepsilon_a,$$

где ε_a — заданная точность аппроксимации. Таким образом, получаем ряд $\sum_{j=1}^N \alpha_j(t)\beta_j(\tau)$, который с заданной точностью аппроксимирует исходную функцию $K(t, \tau)$.

Рассмотренный алгоритм аппроксимации, как и его модификации [5, 6], обладает свойством максимально возможной минимизации числа N членов аппроксимирующего ряда, что выгодно отличает его от традиционных аналогов, основанных на использовании каких-либо наборов координатных функций, получаемых, например, посредством разложения в ряд Тейлора, Фурье и др. [7]. Решение многочисленных тестовых примеров и прикладных задач подтверждает указанное свойство алгоритма.

На рис. 1 (см. вклейку) графически представлен результат применения рассматриваемого алгоритма при аппроксимации осциллирующей функции $K(x, s) = e^{\sin(-xs)}$ в области $0 \leq x, s \leq 2\pi$ с шагом $h = 0,01$ и результирующей точностью $e_{appr} = 0,1^{-5}$. Графики полученного набора аппроксимирующих функций одной переменной приведены на рис. 2. Аппроксимирована функция при $h = 0,01$.

Резольвента. Решение интегральных уравнений с помощью резольвенты [2] является одним из эффективных методов исследования многих задач физики, биологии, техники. Но сложности этого подхода существенно ограничивают возможность его применения как в аналитическом, так и в числовом виде. В случае вырожденного ядра интегрального уравнения эффективность реализации метода значительно повышается.

Решение уравнения (1) посредством резольвенты имеет вид

$$y(t) = \int_a^t R(t, \tau) f(\tau) d\tau + f(t).$$

При этом основным способом получения (вычисления) резольвенты является представление ее в виде суммы бесконечного ряда

$$R(t, \tau) = K(t, \tau) + \sum_{n=2}^{\infty} K_n(t, \tau) = K(t, \tau) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{\tau}^t K(t, \nu) K_{n-1}(\nu, \tau) d\nu,$$

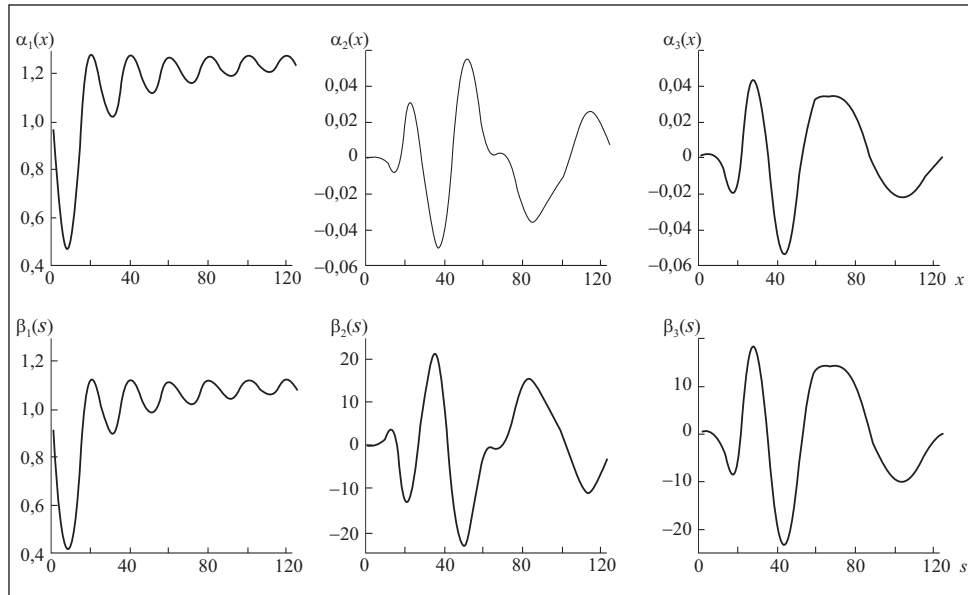


Рис. 2

где $K_{n-1}(t, \tau), n = 2, 3, \dots$, — интегрированные ядра (очевидно, $K_1(t, \tau) = K(t, \tau)$). Как видим, определение резольвенты связано с многократным получением результатов интегрирования парных произведений функций двух переменных и их суммированием, т.е. является достаточно сложной вычислительной задачей. Другим способом определения резольвенты является решение интегрального уравнения

$$R(t, \tau) = K(t, \tau) + \int_{\tau}^t R(t, \nu) K(\nu, \tau) d\nu,$$

что не упрощает вычислительную задачу.

Если в уравнении (1) ядро является вырожденным, то решение посредством резольвенты принимает вид

$$y(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(x),$$

где

$$\varphi_n(x) = \int_a^b \sum_{i=1}^{l_n} \alpha_i(x) \beta_i(s) \varphi_{n-1} ds.$$

При этом интегрированные ядра определяются из выражения

$$K_n(x, s) = \sum_{i=1}^{l_n} \alpha_i^n(x) \beta_i^n(s) = \sum_{i=1}^{l_{n-1}} \sum_{j=1}^l \alpha_i^{n-1}(x) \beta_j(s) \int_a^b \beta_i^{n-1}(t) \alpha_j(t) dt.$$

Таким образом, все вычисления для получения резольвенты выполняются посредством операций над функцией одной переменной, что свидетельствует об эффективности метода вырожденных ядер.

Системы уравнений Вольтерры II рода. В системе

$$y_p(x) - \sum_{j=1}^m y_p(x) \int_a^x K_{pj}(x, s) y_j(s) ds = f_p(x), \quad (6)$$

где $K_{pj}(x, s)$ — ядра, $y_p(x)$ — искомые функции, $f_p(x)$ — известные правые части, каждое ядро можно представить в виде билинейного ряда

$$K_{pj}(x, s) \cong \sum_{r=1}^{q_{pj}} \alpha_{pjr}(x) \beta_{pjr}(s),$$

где q_{pj} — число членов соответствующей суммы. Тогда (6) принимает вид

$$y_p(x) - \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^{q_{pj}} \alpha_{pjr}(x) \int_a^x \beta_{pjr}(s) y_j(s) ds = f_p(x). \quad (7)$$

Для решения системы (7) можно использовать замену интеграла формулой трапеций на отрезке $[a, b]$, который разбит на n равных частей так что, что $x_1 = a, x_2, \dots, x_n = b$. Приближенные решения $y_p(x_i), i = 1, 2, \dots, n + 1$, находим из уравнения

$$y_p(x_i) - \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^{q_{pj}} \alpha_{pjr}(x_i) \sum_{l=1}^i A_l \beta_{pjr}(x_l) y_j(x_l) = f_p(x_i), \quad (8)$$

где

$$A_l = \begin{cases} \frac{b-a}{2n}, & \forall l=1, l=i, \\ \frac{b-a}{n}, & \forall l \neq 1, l \neq i. \end{cases}$$

Очевидно, что $y_p(x_1) = f_p(x_1)$, а для определения каждой группы $y_p(x_i), i = 2, 3, \dots, n + 1$, необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений (8) в виде

$$y_p(x_i) - \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^{q_{pj}} \alpha_{pjr}(x_i) \beta_{pjr}(x_i) y_j(x_i) =$$

$$= f_p(x_i) - \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^{q_{pj}} \alpha_{pjr}(x_i) \sum_{l=1}^{i-1} A_l \beta_{pjr}(x_l) y_j(x_l),$$

где значения искомым $y_j(x_l)$ для $l < i$ известны, поэтому

$$\sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^{q_{pj}} \alpha_{pjr}(x_i) \sum_{l=1}^{i-1} A_l \beta_{pjr}(x_l) y_j(x_l)$$

является постоянной величиной. При этом для каждой из $m \otimes q_{pj}$ сумм можно использовать выражение

$$\sum_{l=1}^{i-1} A_l \beta_{pjr}(x_l) y_j(x_l) = A_{i-1} \beta_{pjr}(x_{i-1}) y_j(x_{i-1}) + \sum_{l=1}^{i-2} A_l \beta_{pjr}(x_l) y_j(x_l),$$

что позволяет значительно сократить количество расчетов на каждом шаге.

Для получения ядер вида (2) необходимо построение процедуры минимизации функционала

$$\Phi_{pj} = \int_a^b \int_a^b \left(K_{pj}(x, s) - \sum_{r=1}^{q_{pj}} \alpha_{pjr}(x) \beta_{pjr}(s) \right)^2 dx ds.$$

Слагаемые суммы $(\alpha_{pjr}(x_l) \beta_{pjr}(x_l))$ находим по формулам

$$\alpha_{pjr}^{(t)}(x) = \frac{\int_a^b K_{pjr}(x, s) \beta_{pjr}^{(t)}(s) ds}{\int_a^b (\beta_{pjr}^{(t)}(s))^2 ds}, \quad (9)$$

$$\beta_{pjr}^{(t)}(s) = \frac{\int_a^b K_{pjr}(x, s) \alpha_{pjr}^{(t)}(x) dx}{\int_a^b (\alpha_{pjr}^{(t)}(x))^2 dx}, \quad (10)$$

где t — номер шага вариации; $K_{pjl}(x, s) = K_{pj}(x, s)$; $\beta_{pjr}^{(0)}(s)$ — задаем априорно. При выполнении условий

$$\int_a^b (\beta_{pjr}^{(t)}(s) - \beta_{pjr}^{(t-1)}(s))^2 ds < \varepsilon, \quad \int_a^b (\alpha_{pjr}^{(t)}(x) - \alpha_{pjr}^{(t-1)}(x))^2 dx < \varepsilon, \quad (11)$$

где ε — показатель точности вычисления функций $\alpha_{pjr}^{(t)}(x)$ и $\beta_{pjr}^{(t)}(s)$, определяем $K_{pj(r+1)}(x, s) = K_{pjr}(x, s) - \alpha_{pjr}(x) \beta_{pjr}(s)$. Используя расчетные выражения (9) и (10) до выполнения условия (11), приближаем $\alpha_{pjr}(x) \beta_{pjr}(s)$ к $K_{pj(r+1)}(x, s)$. Продолжаем этот итерационно-вариационный процесс до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$\int_a^b \int_a^b \left(K_{pj}(x, s) - \sum_{r=1}^{q_{pj}} \alpha_{pjr}(x) \beta_{pjr}(s) \right)^2 dx ds < \varepsilon_{\text{appr}},$$

где $\varepsilon_{\text{appr}}$ — заданный показатель точности аппроксимации. В результате получаем ряд

$$\sum_{r=1}^{q_{pj}} \alpha_{pjr}(x) \beta_{pjr}(s),$$

который с заданной точностью аппроксимирует исходное ядро $K_{pj}(x, s)$.

Таким образом, рассмотренный метод решения систем интегральных уравнений Вольтерры II рода с рекуррентным вычислением сумм позволяет значительно сократить число необходимых итераций и повысить эффективность расчетов по сравнению с прямыми методами без построения вырожденных ядер.

Интегро-дифференциальные уравнения. Наличие интегральных операторов в интегро-дифференциальных уравнениях является основанием для использования при их решении метода вырожденных ядер. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$L[z(x)] = \lambda \int_a^b M[z(y)] K(x, y) dy, \quad (12)$$

где

$$L[z(x)] = \frac{d^n z(x)}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} z(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dz(x)}{dx} + a_n z(x);$$

$$M[z(y)] = b_0 \frac{d^m z(y)}{dy^m} + b_1 \frac{d^{m-1} z(y)}{dy^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dz(y)}{dy} + b_m z(y);$$

$a_1 \dots a_n, b_0, b_1 \dots b_m$, — постоянные числа; λ — параметр; $K(x, y) = \varphi_1(x) \psi_1(y) + \varphi_2(x) \psi_2(y)$ — разделяющее ядро.

Решение уравнения (12) имеет вид

$$z(x) = c_1 z_1(x) + \dots + c_n z_n(x) + F_1(x) + F_2(x),$$

где c_r — произвольные постоянные; $F_1(x), F_2(x)$ — функции, вид которых зависит от вида функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$; $z_r(x)$ — линейно независимые решения дифференциального уравнения $L[z(x)] = 0$.

Пусть $f(l) = 0$ — характеристическое уравнение для дифференциального уравнения $L[z(x)] = 0$, а $g(m) = 0$ — для уравнения $M[z(y)] = 0$. Вначале рассмотрим следующий случай:

$$\varphi_1(x) = \theta_1(x) e^{\alpha x}, \quad \varphi_2(x) = \theta_2(x) e^{\beta x},$$

где $\theta_1(x), \theta_2(x)$ — многочлены соответственно степени p и q . Если α — корень характеристического уравнения $f(l) = 0$ кратности $r \geq 1$, а β — корень характеристического уравнения $g(m) = 0$ кратности $s \geq 1$, то решение уравнения (12) следует искать в форме

$$z(x) = (c_1 + c_2 x + \dots + c_r x^{r-1}) e^{\alpha x} + (c_{r+1} + c_{r+2} x + \dots + c_{r+s} x^{s-1}) e^{\beta x} + \sum_{i=r+s+1}^n c_i z_i(x) + x^r e^{\alpha x} P_1(x) + x^s e^{\beta x} P_2(x), \quad (13)$$

где $P_1(x), P_2(x)$ — многочлены степеней p и q , коэффициенты которых следует подобрать так, чтобы решение (13) удовлетворяло уравнению (12). Подставив (13) в уравнение (12) и приравняв коэффициенты при $e^{\alpha x}$ и $e^{\beta x}$ в правой и левой частях, получим два многочлена степени p и q . Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях этих многочленов, приходим к системе линейных алгебраических уравнений, которая всегда разрешима относительно искомых коэффициентов.

Аналогичное решение можно получить и для ядра $K(x, y) = \varphi_1(x) \psi_1(y) + \dots + \varphi_n(x) \psi_n(y)$. Пусть

$$K(x, y) = e^{\alpha x} [\theta_1(x) \cos \beta x + \theta_2(x) \sin \beta x] \psi(y),$$

где $\theta_1(x), \theta_2(x)$ — многочлены степени k . Заменяя тригонометрические функции показательными, находим

$$K(x, y) = \frac{1}{2} \{ e^{(\alpha+\beta i)x} [\theta_1(x) - i\theta_2(x)] + e^{(\alpha-\beta i)x} [\theta_1(x) + i\theta_2(x)] \} \psi(y).$$

Таким образом, этот случай сводится к предыдущему. Если $\alpha \pm \beta i$ — корень уравнения $f(l) = 0$ кратности r , то согласно (13) решение имеет вид

$$z(x) = e^{\alpha x} [(c_1 + c_2 x + \dots + c_r x^{r-1}) \cos \beta x + (c_{r+1} + c_{r+2} x + \dots + c_{2r} x^{r-1}) \sin \beta x] +$$

$$+ \sum_{i=2r+1}^n c_i z_i(x) + x^r [e^{(\alpha+\beta i)x} P_1(x) + e^{(\alpha-\beta i)x} P_2(x)], \quad (14)$$

где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — многочлены степеней k представляют собой сопряженные выражения $P_1(x) = Q_1(x) + iQ_2(x)$ и $P_2(x) = Q_1(x) - iQ_2(x)$. Подставляя P_1, P_2 в (14) и переходя к тригонометрическим функциям, получаем

$$z(x) = e^{\alpha x} [(c_1 + c_2 x + \dots + c_r x^{r-1}) \cos \beta x + (c_{r+1} + c_{r+2} x + \dots + c_{2r} x^{r-1}) \sin \beta x] + \sum_{i=2r+1}^n c_i z_i(x) + x^r e^{\alpha x} [R_1(x) \cos \beta x + R_2(x) \sin \beta x], \quad (15)$$

где $R_1 = 2Q_1(x)$ и $R_2 = -2Q_2(x)$ — многочлены, имеющие такую же степень, как и многочлены $\theta_1(x), \theta_2(x)$, если их степени равны, и наибольшую степень из этих многочленов, если их степени различны.

После подстановки (15) в уравнение (12) приравниваем выражения при $\cos \beta x, \sin \beta x$ в правой и левой частях равенства, в результате чего приходим к равенству двух пар многочленов степени k . Приравняв коэффициенты этих многочленов при одинаковых степенях x , получаем всегда разрешимую $2k$ систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов R_1 и R_2 .

Если правая часть интегро-дифференциального уравнения (12) имеет вид

$$L[z(y)] = \lambda \int_a^b M[z(y)] K(x, y) dy + \omega(x),$$

то его решение принимает вид

$$z(x) = c_1 z_1(x) + \dots + c_n z_n(x) + F_1(x) + F_2(x) + \Omega(x),$$

где $\Omega(x)$ — частное решение уравнения $L[z(x)] = \omega(x)$. Присутствие в решении функции $\Omega(x)$ приведет к изменению только свободных членов в системах для определения коэффициентов.

Следует заметить, что рассмотренный метод может быть применен также для решения интегро-дифференциальных уравнений с ядрами произвольного вида, если воспользоваться соответствующим методом аппроксимации ядер.

Уравнения Вольтерры I рода. Численные алгоритмы решения уравнения Вольтерры I рода

$$\int_0^t K(t-s)y(s) ds = f(t) \quad (16)$$

обычно построены на основе квадратурных методов, реализация которых связана с возрастанием числа операций на каждом последующем шаге вычислений. Рассмотрим построение высокопроизводительного численного алгоритма решения интегрального уравнения Вольтерры I рода на основе соответствующей аппроксимации ядра.

Основой уравнения Вольтерры I рода (16) при моделировании скалярных динамических стационарных объектов является оператор типа свертки

$$\psi(t) + \int_0^t K(t-s)\varphi(s) ds, \quad (17)$$

где интеграл при численном расчете заменяется конечной суммой. При этом могут быть применены различные квадратурные формулы, каждая из которых имеет существенные алгоритмические особенности [2]. Традиционные аппроксимирующие алгебраические зависимости для интегрального оператора (17) и интегрального уравнения Вольтерры I рода (16) получаем с помощью следующих приближенных выражений:

$$\psi(t_i) \cong \sum_{j=1}^i A_j K(t_i - t_j) \varphi(t_j), \quad (18)$$

$$\sum_{j=1}^i A_j K(t_i - t_j) y(t_j) = f(t_i), \quad (19)$$

где $j=1, 2, \dots, i$; $t_i, i=1, n$, — узлы дискретизации; A_i — коэффициенты квадратурной формулы. Если узлы следуют один за другим с постоянным шагом h , то $t_i = (i-1)h$. Отсутствие неизвестной функции под знаком интеграла в уравнении (16) приводит к ряду особенностей. Например, в системе (19) невозможно определить значение, необходимое для дальнейшего рекуррентного получения значений $y(h), y(2h), \dots$.

Для определения $y(0)$ можно воспользоваться выражением $y(0) = \frac{f'(0)}{K(0)}$.

Теперь система (19) позволяет последовательно определить значение

$$y(t_i) = \frac{1}{A_j K(0)} \left(f(t_i) - \sum_{j=1}^i A_j K(t_i - t_j) y(t_j) \right).$$

При вычислении значений $f'(0) = \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=0}$ можно воспользоваться различ-

ными интерполяционными способами, в том числе формулой квадратичной интерполяции

$$f'(0) = \frac{1}{2h} (-3f(0) + 4f(h) - f(2h)).$$

Следует заметить, что при $K(0) = 0$ в интервале интегрирования для приближенного решения интегрального уравнения (16) невозможно применить метод квадратурных формул с использованием формулы трапеций, поскольку при этом необходимо выполнять операцию деления на $K(0)$ согласно расчетным выражениям

$$\begin{aligned} \tilde{y}(0) &= \frac{f'(0)}{K(0)}, \\ \tilde{y}(t_i) &= \frac{2}{A_i K(0)} \left(\frac{f(t_i)}{h} - \sum_{j=1}^{i-1} A_j K(t_i - t_j) \tilde{y}(t_j) \right), \end{aligned} \quad (20)$$

где $t_i = (i-1)h$, $i = 2, 3, \dots$;

$$A_j = \begin{cases} 1/2, & \forall j = 1, \\ 1, & \forall j > 1. \end{cases}$$

Поэтому более целесообразным в данном случае является применение формулы средних прямоугольников, которая позволяет эффективно определить значение искомой функции в узлах $t_{j+1/2}$ ($t_{j+1/2} = (j + \frac{1}{2})h$) с помощью выражений

$$\begin{aligned} \tilde{y}\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{f(h)}{hK\left(\frac{1}{2}h\right)}, \\ \tilde{y}(t_{i+1/2}) &= \frac{1}{K\left(\frac{1}{2}h\right)} \left(\frac{f(t_i)}{h} - \sum_{j=1}^{i-2} A_j K(t_i - t_{j+1/2}) \tilde{y}(t_{j+1/2}) \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Из выражений (18), (20) и (21) видно, что с увеличением номера шага дискретизации возрастает число операций, выполняемых на каждом шаге вычислений, так как ядро имеет произвольный вид.

Импульсные переходные функции рассматриваемого класса динамических объектов являются непрерывными и поэтому могут быть представлены в виде степенного ряда по теореме Вейерштрасса. Это позволяет

во многих практических случаях считать ядро интегрального уравнения (16) вырожденным, т.е. имеющим вид

$$K(t-s) \cong \sum_{l=1}^m \alpha_l(t) \beta_l(s), \quad l = \overline{1, m}. \quad (22)$$

Свойство разделимости ядра (22) в случае, когда импульсная переходная функция $K(t)$ задана аналитически, позволяет записать выражения (16) и (17) в виде

$$\sum_{l=1}^m \alpha_l(t) \int_0^t \beta_l(s) y(s) ds = f(t), \quad (23)$$

$$\psi(t) = \sum_{l=1}^m \alpha_l(t) \int_0^t \beta_l(s) \varphi(s) ds. \quad (24)$$

Применяя к выражениям (23) и (24) квадратурные формулы, получаем соответственно формулу для численной реализации оператора

$$\psi(t_i) = \sum_{l=1}^m \alpha_l(t_i) \sum_{j=1}^{i-1} \beta_l(t_j) \varphi(t_j) \quad (25)$$

и рекуррентные выражения для решения уравнений

$$\tilde{y}(0) = \frac{f'(0)}{K(0)}, \quad (26)$$

$$\tilde{y}(t_i) = \frac{2}{A_i K(0)} \left(f(t_i) - \sum_{l=1}^m \alpha_l(t_i) \sum_{j=1}^{i-1} A_j \beta_l(t_j) \tilde{y}(t_j) \right).$$

Выражения (25) и (26), представляющие собой аналитическое описание модифицированного алгоритма, отличаются от (18) и (20) тем, что количество вычислений на каждом шаге остается неизменным, поскольку слагаемые $\sum_{j=1}^{i-1} A_j \beta_l(t_j) \tilde{y}(t_j)$ зависят только от одной свободной переменной t_j .

Широкий класс ядер может быть представлен аналитическим способом в виде разделяющихся ядер. Например, ядро $K(t-s) = e^{t-s} \sin(t-s)$ может быть представлено в виде

$$K(t-s) = e^t (\sin(t) e^{-s} \sin(s) - \cos(t) e^{-s} \sin(s)),$$

а соответствующий оператор свертки — в виде

$$\psi(t) = e^t (\sin(t) \int_0^t e^{-s} \sin(s) ds - \cos(t) \int_0^t e^{-s} \sin(s) ds).$$

Таким образом можно модифицировать алгоритм при наличии аналитического выражения для ядра. Однако выражения (26) нельзя применить, если $K(t)$ имеет экспериментальное происхождение. В таком случае практический путь определения аналитического вида функции $K(t)$ состоит в получении переходной характеристики как реакции исследуемого объекта на единичную функцию и последующей аппроксимации $P(t)$ простым аналитическим выражением и его дифференцированием, так как $K(t) = dP(t)/dt$.

Эффективным аппаратом приближения функции на отрезке $[0, T]$ с помощью простых аналитических выражений (полиномов) являются интерполяционные полиномиальные сплайны [8], принадлежащие классу $C_{[0, T]}$. В этом случае применение сплайнов при $K(t) \neq 0$ и непрерывных функциях $K(t)$ та $f'(t)$ на отрезке $[0, T]$ приводит к следующей процедуре получения приближенного решения уравнения (16).

1. Аппроксимируя экспериментально полученные функции $P(t)$ и $K(t)$ интерполяционными сплайнами n -го порядка на равномерной сетке

$$\Delta_m^{\text{def}} = \{t_i: t_i = iH; H = T/m; i = \overline{0, m}\},$$

получаем $Z_{m,n}(P(t))$, $Z_{m,n}(f(t))$, где m — число точек интерполяции.

2. Определив производную $Z'_{m,n}(P(t))$ и подставив ее в уравнение (16) вместо $K(t-s)$, а $Z_{m,n}(P(t))$ — вместо $f(t)$, получим

$$\int_0^t Z'_{m,n}(P(t-s)) \tilde{y}(s) ds = Z_{m,n}(f(t)), \quad (27)$$

где $\tilde{y}(t)$ — решение этого уравнения.

3. Дифференцируя уравнение (27) по t , получаем интегральное уравнение Вольтерры II рода

$$K(0) \tilde{y}(t) + \int_0^t Z''_{m,n}(P(t-s)) \tilde{y}(s) ds = Z'_{m,n}(f(t)). \quad (28)$$

4. Исходя из квадратурных формул вида

$$\int_0^{ih} \varphi(s) ds = h \sum_{j=0}^i W_{ij} \psi_{ij}(jh) + R_i[\psi],$$

где $i = \overline{1, N}$, $N = 1, 2, \dots$; $h \stackrel{\text{def}}{=} T / N$; hw_{ij} — веса; $R_i[\psi]$ — остатки этих формул, получаем систему расчетных уравнений

$$K(0) \tilde{y}(ih) + \sum_{j=0}^i W_{ij} Z'_{m,n}(P(ih-jh)) \tilde{y}(jh) = Z'_{m,n}(f(ih)), \quad (29)$$

где $\tilde{y}(ih)$ — решение системы (29). Уравнение (28) и система (29) позволяют, используя свойство (22) ядра, получить расчетные выражения, представляющие собой модифицированный алгоритм метода квадратурных формул.

Таким образом, рассмотренный модифицированный алгоритм метода квадратурных формул для решения интегральных уравнений Вольтерры I рода имеет ряд необходимых для численной реализации свойств, в частности небольшое и постоянное число операций для получения очередного дискретного значения искомой функции. Это делает данный алгоритм пригодным для программных или аппаратных специализированных вычислительных средств при решении задач в реальном времени.

Выводы

Интегральные динамические модели, представленные интегральными уравнениями Вольтерры I и II рода, а также интегро-дифференциальными уравнениями с оператором Вольтерры, относятся к классам непараметрических моделей и формируются на основе динамических характеристик объектов моделирования. Продуктивный способ построения рекуррентных численных алгоритмов решения указанных уравнений, обеспечивающий высокую скорость процесса моделирования, основан на применении вырожденных (разделяющихся) ядер при реализации оператора Вольтерры. Предлагаемый оптимизационный метод аппроксимации функций двух переменных позволяет эффективно по критерию «сложность—точность» решать задачу приближения ядер произвольного вида вырожденными ядрами, что, в свою очередь, обеспечивает разработку быстродействующих алгоритмов и программ численного исследования динамических систем с использованием непараметрических моделей.

The possibilities of numerical implementation of integral dynamic models are considered. The models are non-parametric and are presented by Volterra integral equations of type II and type I, and also by integro-differential equations. Recurrent numerical algorithms for solving these equations are developed. The degenerate (separable) kernels method is used for constructing the algorithms. The optimization method of approximation for kernels of the Volterra integral operators is proposed.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами : Справ. пособие. — М. : Наука, 1979. — 224 с.
2. Манжиров А.В., Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. — М.: Факториал Пресс, 2000. — 384с.
3. Верлань Д.А. Аппроксимация функции двух переменных в задачах управления // 36. праць «Математичне та комп'ютерне моделювання». Сер.: Технічні науки. Вип. 5. — Кам'янець-Подільський національний ун-т ім. Івана Огієнка. — 2011. — С. 62—70.
4. Никольский С.М. Квадратурные формулы. 4-е изд. доп. — М.: Наука, 1988. — 254 с.
5. Верлань Д.А. Итерационные алгоритмы аппроксимации функции двух переменных // «Математичне та комп'ютерне моделювання». Сер.: Технічні науки. Вип. 2. — Кам'янець-Подільський національний ун-т ім. Івана Огієнка. — 2009. — С. 24—32.
6. Верлань Д.А. Градиентный алгоритм билинейной аппроксимации ядер при решении интегральных уравнений Фредгольма II-го рода // «Электрон. моделирование». — 2013. — 35, № 1.— С. 73—80.
7. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Бином, 2003. — 630 с.
8. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. — М.: Наука, 1976. — 248 с.

Поступила 29.04.14

ВЕРЛАНЬ Дмитрий Анатольевич, аспирант Киевского национального университета им. Т. Шевченко, который окончил в 2011 г. Область научных исследований — аппроксимация функций и решение интегральных уравнений.

