ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ И СРЕДСТВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК 681.3:519.711.3:517.958:621.313:669

В.Ф. Евдокимов, чл.-кор. НАН Украины,
Е.И. Петрушенко, канд. техн. наук
Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел. 4241063, e-mail: dep_7@voliacable.com)

Интегральная модель трехмерного распределения вихревых токов в непрерывно литой заготовке квадратного сечения при электромагнитном перемешивании в вертикальной МНЛЗ. II

Разработана интегральная модель трехмерного распределения вихревых токов в системе непрерывно литая заготовка квадратного сечения — кристаллизатор при электромагнитном перемешивании в вертикальной МНЛЗ. В основе ее лежит ВСИУ, полученная в результате обобщения ВСИУ для одного массивного проводника на систему двух близко расположенных изолированных массивных проводников, какими являются заготовка и кристаллизатор МНЛЗ. Исходная ВСИУ преобразована к СкСИУ в декартовой системе координат. Поскольку токи в обмотках ЭМП изменяются синусоидально во времени, СкСИУ записывается в комплексной форме. Вещественная СкСИУ вытекает из комплексной в результате преобразования комплексов в алгебраическую форму.

Розроблено інтегральну модель тривимірного розподілу вихрових струмів в системі безперервно лита заготовка квадратного перерізу — кристалізатор при електромагнітному перемішуванні в вертикальній МБЛЗ. В основу її покладено векторну систему інтегральних рівнянь (ВСІР), отриману в результаті узагальнення ВСІР для одного масивного провідника на систему двох ізольованих близько розташованих масивних провідників, якими є заготовка і кристалізатор МБЛЗ. Вихідну ВСІР перетворено до скалярної системи інтегральних рівнянь (СкСІР) в декартовій системі координат. Оскільки струми в обмотках ЕМП змінюються синусоїдально, СкСІР записується у комплексній формі. Дійсна СкСІР випливає з комплексної в результаті перетворення комплексів в алгебраїчну форму.

Ключевые слова: интегральная модель, трехмерное распределение, вихревые токи, непрерывно литая заготовка, векторная система интегральных уравнений, скалярная система интегральных уравнений, комплексная форма, алгебраическая форма, электромагнитное перемешивание, вертикальная МНЛЗ.

Векторная СИУ, описывающая трехмерное распределение ВТ в системе НЛЗ—кристаллизатор в ЭМП. Заготовка квадратного сечения и близко расположенный к ней изолированный кристаллизатор находятся в

© В.Ф. Евдокимов, Е.И. Петрушенко, 2014

магнитном поле индуктора, в обмотке которого протекает синусоидальный ток. В основе модели трехмерного распределения ВТ в системе НЛЗ—кристаллизатор лежит ВСИУ, полученная в результате обобщения ВСИУ для уединенной заготовки [1] на систему двух близко расположенных изолированных проводников, какими являются заготовка и кристаллизатор МНЛЗ. Исходная ВСИУ преобразована к СкСИУ в декартовой системе координат. Поскольку токи в обмотках ЭМП изменяются синусоидально во времени, то СкСИУ записывается в комплексной форме. Вещественная СкСИУ вытекает из комплексной в результате преобразования комплексов в алгебраическую форму.

Пусть НЛЗ находится в кристаллизаторе [1, см. рисунок]. Распределение ВТ в заготовке зависит от их распределения в кристаллизаторе, и наоборот. Считая что заготовка и кристаллизатор изолированы друг от друга, для описания распределения ВТ в объеме каждого проводника воспользуемся системой уравнений Максвелла [1].

Вектор плотности токов в обмотке индуктора обозначим через $\overline{\delta}_o$, а объем, занимаемый обмотками, — через V_o [1]. В заготовке, представляющей собой массивное проводящее тело объема V_c, индуктируются ВТ плотностью $\overline{\delta}_c$. В кристаллизаторе, который представляет собой массивное проводящее тело объема V_k, индуктируются ВТ плотностью $\overline{\delta}_k$.

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в объеме заготовки V_c сводятся к уравнениям [1]

$$\Delta\overline{A}_c = -\mu_0\overline{\delta}_c, \tag{1}$$

$$\Delta\varphi_c = 0. \tag{2}$$

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в объеме кристаллизатора V_k сводятся к уравнениям [1]

$$\Delta\overline{A}_k = -\mu_0\overline{\delta}_k, \tag{3}$$

$$\Delta\varphi_k = 0. \tag{4}$$

В пространстве, окружающем объемы V_c и V_k, уравнения Максвелла сводятся к уравнению

$$\Delta\overline{A}_o = -\mu_0\overline{\delta}_o. \tag{5}$$

В однородной в магнитном отношении среде решение уравнений (1), (3), (5) имеет вид

$$\overline{A}(Q,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V_o}\frac{\overline{\delta}_o(M,t)}{r_{QM}}d\upsilon_M + \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V_c}\frac{\overline{\delta}_c(M,t)}{r_{QM}}d\upsilon_M + \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V_k}\frac{\overline{\delta}_k(M,t)}{r_{QM}}d\upsilon_M, \tag{6}$$

где r_{QM} — расстояние между точками $Q\ (x_Q, y_Q, z_Q)$ и $M\ (x_M, y_M, z_M)$. Однако в (6) входят ВТ плотностью $\overline{\delta}_c$ в объеме заготовки V_c и плотностью $\overline{\delta}_k$ в объеме кристаллизатора V_k, которые неизвестны. Для их определения необходимо воспользоваться соотношением (4) из [1]:

$$\overline{E}_c(Q,t) = -\frac{\partial \overline{A}_c(Q,t)}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi_c(Q,t),\ Q \in V_c, \tag{7}$$

$$\overline{E}_k(Q,t) = -\frac{\partial \overline{A}_k(Q,t)}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi_k(Q,t),\ Q \in V_k, \tag{8}$$

Подставляя в (7) и (8) выражение (6), получаем ВСИУ:

$$\overline{E}_c(Q,t) + \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V_c} \gamma_c(M)\frac{\partial \overline{E}_c(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M + \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V_k} \gamma_k(M)\frac{\partial \overline{E}_k(M,t)}{\partial t} \times$$

$$\times \frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V_o} \frac{\partial \overline{\delta}_o(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M - \operatorname{grad}\varphi_c,\quad Q \in V_c, \tag{9}$$

$$\overline{E}_k(Q,t) + \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V_k} \gamma_k(M)\frac{\partial \overline{E}_k(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M +$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V_c} \gamma_c(M)\frac{\partial \overline{E}_c(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V_o} \frac{\partial \overline{\delta}_o(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M - \operatorname{grad}\varphi_k,\quad Q \in V_k. \tag{10}$$

Для определения скалярных потенциалов $\varphi_c(Q,t)$, $Q \in V_c$, и $\varphi_k(Q,t)$, $Q \in V_k$, необходимо решить задачу Неймана для уравнений (2) и (4) при граничных условиях

$$\left.\frac{\partial \varphi_c(Q,t)}{\partial n}\right|_{Sc} = -\left.\frac{\partial A_{cn}(Q,t)}{\partial t}\right|_{Sc},$$

$$\left.\frac{\partial \varphi_k(Q,t)}{\partial n}\right|_{Sk} = -\left.\frac{\partial A_{nk}(Q,t)}{\partial t}\right|_{Sk},$$

где A_{cn} — проекция вектора $\overline{A}_c$ на нормаль $\overline{n}_Q$ к поверхности заготовки S_c в точке Q; A_{kn} — проекция вектора $\overline{A}_k$ на нормаль $\overline{n}_Q$ к поверхности кристаллизатора S_k в точке Q. Принято положительное направление нормали $\overline{n}_Q$ из объемов заготовки V_c и кристаллизатора V_k в окружающее пространство.

Решение этих задач будем искать с помощью потенциала простого слоя плотностью τ_c на поверхности S_c,

$$\varphi_c(Q,t)=\frac{1}{4\pi}\int_{S_c}\frac{\tau_c(M,t)}{r_{QM}}ds_M,\quad Q\in V_c, \tag{11}$$

и плотностью τ_k на поверхности S_k,

$$\varphi_k(Q,t)=\frac{1}{4\pi}\int_{S_k}\frac{\tau_k(M,t)}{r_{QM}}ds_M,\quad Q\in V_k. \tag{12}$$

При этом для нахождения плотности τ_c на поверхности S_c необходимо решить ИУ Фредгольма второго рода

$$\tau_c(Q,t)+\frac{1}{2\pi}\int_{S_c}\tau_c(M,t)\frac{\cos(\hat{n}_Q\,\bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2}ds_M=-2\frac{\partial A_{cn}(Q,t)}{\partial t},\quad Q\in S_c, \tag{13}$$

а для нахождения плотности τ_k на поверхности S_k — следующее ИУ Фредгольма второго рода:

$$\tau_k(Q,t)+\frac{1}{2\pi}\int_{S_k}\tau_k(M,t)\frac{\cos(\hat{n}_Q\,\bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2}ds_M=-2\frac{\partial A_{kn}(Q,t)}{\partial t},\quad Q\in S_k. \tag{14}$$

Подставив в уравнение (9) потенциал φ_c (11), получим

$$\bar{E}_c(Q,t)+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_c}\gamma_c(M)\frac{\partial\bar{E}_c(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_k}\gamma_k(M)\frac{\partial\bar{E}_k(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+\frac{1}{2\pi}\int_{S_c}\tau_c(M,t)\,\mathrm{grad}_Q\frac{1}{r_{QM}}ds_M=$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_o}\frac{\partial\bar{\delta}_o(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\quad Q\in V_c. \tag{15}$$

Подставив в (15) выражение (13) из [1], получим

$$\mathrm{grad}_Q\frac{1}{r_{QM}}=\frac{x_M-x_Q}{r_{QM}^3}\bar{e}_X+\frac{y_M-y_Q}{r_{QM}^3}\bar{e}_Y+\frac{z_M-z_Q}{r_{QM}^3}\bar{e}_Z=\frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3}. \tag{16}$$

Если, кроме того, в (15) вектор $\overline{E}_c(Q,t)$ заменить вектором $\overline{\delta}_c(Q,t)$, то получим следующее ИУ:

$$\frac{\overline{\delta}_c(Q,t)}{\lambda\gamma_c(Q)}+\int_{V_c}\frac{\partial\overline{\delta}_c(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+\int_{V_k}\frac{\partial\overline{\delta}_k(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_c}\tau_c(M,t)\frac{\overline{r}_{QM}}{r_{QM}^3}ds_M=-\int_{V_o}\frac{\partial\overline{\delta}_o(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\;\; Q\in V_c. \tag{17}$$

Теперь, подставив в ИУ (13) выражение (6), запишем

$$\tau_c(Q,t)+\frac{1}{2\pi}\int_{S_c}\tau_c(M,t)\frac{\cos(\hat{n}_Q\,\overline{r}_{QM})}{r_{QM}^2}ds_M+2\lambda\int_{V_c}\frac{\partial\delta_{cnQ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+2\lambda\int_{V_k}\frac{\partial\delta_{knQ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M=-2\lambda\int_{V_o}\frac{\partial\delta_{onQ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\;\; Q\in S_c. \tag{18}$$

Подставив в (10) потенциал φ_k (12), получим

$$\overline{E}_k(Q,t)+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_k}\gamma_k(M)\frac{\partial\overline{E}_k(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_c}\gamma_c(M)\frac{\partial\overline{E}_c(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+\frac{1}{2\pi}\int_{S_k}\tau_k(M,t)\,\mathrm{grad}_Q\frac{1}{r_{QM}}ds_M=$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_o}\frac{\partial\overline{\delta}_o(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\;\; Q\in V_c. \tag{19}$$

Если подставить в (19) выражение (16) и, кроме того, в (19) вектор $\overline{E}_k(Q,t)$ заменить вектором $\overline{\delta}_k(Q,t)$, то получим следующее ИУ:

$$\frac{\overline{\delta}_k(Q,t)}{\lambda\gamma_k(Q)}+\int_{V_k}\frac{\partial\overline{\delta}_k(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+\int_{V_c}\frac{\partial\overline{\delta}_c(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_k}\tau_k(M,t)\frac{\overline{r}_{QM}}{r_{QM}^3}ds_M=-\int_{V_o}\frac{\partial\overline{\delta}_o(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\;\; Q\in V_k. \tag{20}$$

Теперь, подставив в ИУ (14) выражение (6), получим

$$\tau_k(Q,t)+\frac{1}{2\pi}\int_{S_k}\tau_k(M,t)\frac{\cos(\hat{n}_Q\,\bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2}ds_M+2\lambda\int_{V_c}\frac{\partial\delta_{cnQ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+2\lambda\int_{V_k}\frac{\partial\delta_{knQ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M=-2\lambda\int_{V_o}\frac{\partial\delta_{onQ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\quad Q\in S_k. \tag{21}$$

С помощью ВСИУ (17), (18), (20), (21) при заданных начальных условиях $\bar{\delta}_c(Q,O), Q\in V_c, \bar{\delta}_k(Q,O), Q\in V_k, \bar{\delta}_o(Q,O), Q\in V_o$, можно решить задачу расчета ВТ в системе НЛЗ—кристаллизатор в нестационарных режимах.

Преобразование ВСИУ (17), (18), (20), (21) к СкСИУ в декартовой системе координат. Представим векторы, входящие в ВСИУ (17), (18), (20), (21) в следующем виде [1]:

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}_c(Q,t)&=\delta_{cX}(Q,t)\bar{e}_X+\delta_{cY}(Q,t)\bar{e}_Y+\delta_{cZ}(Q,t)\bar{e}_Z,\\
\bar{\delta}_k(Q,t)&=\delta_{kX}(Q,t)\bar{e}_X+\delta_{kY}(Q,t)\bar{e}_Y+\delta_{kZ}(Q,t)\bar{e}_Z,\\
\bar{\delta}_o(Q,t)&=\delta_{oX}(Q,t)\bar{e}_X+\delta_{oY}(Q,t)\bar{e}_Y+\delta_{oZ}(Q,t)\bar{e}_Z.
\end{aligned} \tag{22}$$

Подставив (22) в уравнение (17), получим

$$\frac{1}{\lambda\gamma_c(Q)}\delta_{cX}(Q,t)\bar{e}_X+\frac{1}{\lambda\gamma_c(Q)}\delta_{cY}(Q,t)\bar{e}_Y+\frac{1}{\lambda\gamma_c(Q)}\delta_{cZ}(Q,t)\bar{e}_Z+$$

$$+\int_{V_c}\frac{\partial\delta_{cX}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M\bar{e}_X+\int_{V_c}\frac{\partial\delta_{cY}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M\bar{e}_Y+$$

$$+\int_{V_c}\frac{\partial\delta_{cZ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M\bar{e}_Z+\int_{V_k}\frac{\partial\delta_{kX}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M\bar{e}_X+$$

$$+\int_{V_k}\frac{\partial\delta_{kY}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M\bar{e}_Y+\int_{V_k}\frac{\partial\delta_{kZ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M\bar{e}_Z+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_c}\tau_c(M,t)\frac{\alpha_r(Q,M)}{r_{QM}^2}ds_M\bar{e}_X+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_c}\tau_c(M,t)\frac{\beta_r(Q,M)}{r_{QM}^2}ds_M\bar{e}_Y+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_c}\tau_c(M,t)\frac{\gamma_r(Q,M)}{r_{QM}^2}ds_M\bar{e}_Z=-\int_{V_o}\frac{\partial\delta_{oX}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M\bar{e}_X-$$

$$-\int_{V_o}\frac{\partial\delta_{oY}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M\bar{e}_Y-\int_{V_o}\frac{\partial\delta_{oZ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M\bar{e}_Z,\ \ Q\in V_c. \quad (23)$$

Приравнивая выражения при одноименных ортах справа и слева в (23), получаем три скалярных ИУ:

$$\frac{1}{\lambda\gamma_c(Q)}\delta_{cX}(Q,t)+\int_{V_c}\frac{\partial\delta_{cX}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+\int_{V_k}\frac{\partial\delta_{kX}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_c}\tau_c(M,t)\frac{\alpha_r(Q,M)}{r_{QM}^2}ds_M=-\int_{V_o}\frac{\partial\delta_{oX}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\ \ Q\in V_c, \quad (24)$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma_c(Q)}\delta_{cY}(Q,t)+\int_{V_c}\frac{\partial\delta_{cY}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+\int_{V_k}\frac{\partial\delta_{kY}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_c}\tau_c(M,t)\frac{\beta_r(Q,M)}{r_{QM}^2}ds_M=-\int_{V_o}\frac{\partial\delta_{oY}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\ \ Q\in V_c, \quad (25)$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma_c(Q)}\delta_{cZ}(Q,t)+\int_{V_c}\frac{\partial\delta_{cZ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+\int_{V_k}\frac{\partial\delta_{kZ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_c}\tau_c(M,t)\frac{\gamma_r(Q,M)}{r_{QM}^2}ds_M=-\int_{V_o}\frac{\partial\delta_{oZ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\ Q\in V_c. \quad (26)$$

Преобразуем скалярное ИУ (18) в декартовой системе координат. Для этого запишем нормаль в точке $Q\in S_c$:

$$\bar{n}_Q=\alpha(Q)\bar{e}_X+\beta(Q)\bar{e}_Y+\gamma(Q)\bar{e}_Z,$$

$$\alpha(Q)=\cos(\bar{n}_Q,\bar{e}_X),\ \ \beta(Q)=\cos(\bar{n}_Q,\bar{e}_Y),\ \ \gamma(Q)=\cos(\bar{n}_Q,\bar{e}_Z). \quad (27)$$

Подставив (27) в выражение для $\cos(\bar{n}_Q,\bar{r}_{QM})$, получим

$$\cos(\bar{n}_Q,\bar{r}_{QM})=\alpha(Q)\alpha_r(Q,M)+\beta(Q)\beta_r(Q,M)+\gamma(Q)\gamma_r(Q,M). \quad (28)$$

Аналогично находим

$$\delta_{cn_Q}(M,t)=\delta_{cx}(M,t)\alpha(Q)+\delta_{cy}(M,t)\beta(Q)+\delta_{cz}(M,t)\gamma(Q),$$

$$\delta_{kn_Q}(M,t)=\delta_{kx}(M,t)\,\alpha(Q)+\delta_{ky}(M,t)\,\beta(Q)+\delta_{kz}(M,t)\,\gamma(Q),$$

$$\delta_{on_Q}(M,t)=\delta_{ox}(M,t)\,\alpha(Q)+\delta_{oy}(M,t)\,\beta(Q)+\delta_{oz}(M,t)\,\gamma(Q).$$

Подставив (28) в ИУ (18), получим

$$\tau_c(Q,t)+\frac{1}{2\pi}\int_{S_c}\tau_c(M,t)\frac{\cos(\hat{n}_Q\,\bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2}ds_M+2\lambda\int_{V_c}\frac{\partial\alpha(Q)\delta_{cx}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+2\lambda\int_{V_c}\frac{\partial\beta(Q)\delta_{cy}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+2\lambda\int_{V_c}\frac{\partial\gamma(Q)\delta_{cz}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+2\lambda\int_{V_k}\frac{\partial\alpha(Q)\delta_{kx}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+2\lambda\int_{V_k}\frac{\partial\beta(Q)\delta_{ky}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+2\lambda\int_{V_k}\frac{\partial\gamma(Q)\delta_{kz}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M=-2\lambda\int_{V_o}\frac{\partial\alpha(Q)\delta_{ox}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M-$$

$$-2\lambda\int_{V_o}\frac{\partial\beta(Q)\delta_{oy}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M-2\lambda\int_{V_o}\frac{\partial\gamma(Q)\delta_{oz}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\quad Q\in S_c. \tag{29}$$

Подставляя (22) в (20) и приравнивая выражения при одноименных ортах справа и слева, получаем три скалярных ИУ:

$$\frac{1}{\lambda\gamma_k(Q)}\delta_{kX}(Q,t)+\int_{V_k}\frac{\partial\delta_{kX}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+\int_{V_c}\frac{\partial\delta_{cX}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_k}\tau_k(M,t)\frac{\alpha_r(Q,M)}{r_{QM}^2}ds_M=-\int_{V_o}\frac{\partial\delta_{oX}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\ Q\in V_k, \tag{30}$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma_k(Q)}\delta_{kY}(Q,t)+\int_{V_k}\frac{\partial\delta_{kY}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+\int_{V_c}\frac{\partial\delta_{cY}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_k}\tau_{kc}(M,t)\frac{\beta_r(Q,M)}{r_{QM}^2}ds_M=-\int_{V_o}\frac{\partial\delta_{oY}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\ Q\in V_k, \tag{31}$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma_k(Q)}\delta_{kZ}(Q,t)+\int_{V_k}\frac{\partial\delta_{kZ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+\int_{V_c}\frac{\partial\delta_{cZ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int\limits_{S_k}\tau_k(M,t)\frac{\gamma_r(Q,M)}{r_{QM}^2}ds_M=-\int\limits_{V_o}\frac{\partial\delta_{oZ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\quad Q\in V_k. \quad (32)$$

Преобразуем скалярное ИУ (20) к декартовой системе координат. Для этого запишем нормаль в точке $Q\in S_k$:

$$\bar{n}_Q=\alpha(Q)\bar{e}_X+\beta(Q)\bar{e}_Y+\gamma(Q)\bar{e}_Z,$$

$$\alpha(Q)=\cos(\bar{n}_Q,\bar{e}_X),\ \beta(Q)=\cos(\bar{n}_Q,\bar{e}_Y),\ \gamma(Q)=\cos(\bar{n}_Q,\bar{e}_Z). \quad (33)$$

Подставляя (33) в выражение для $\cos(\bar{n}_Q,\bar{r}_{QM})$, получаем

$$\cos(\bar{n}_Q,\bar{r}_{QM})=\alpha(Q)\alpha_r(Q,M)+\beta(Q)\beta_r(Q,M)+\gamma(Q)\gamma_r(Q,M).$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned}\delta_{cn_Q}(M,t)&=\delta_{cx}(M,t)\alpha(Q)+\delta_{cy}(M,t)\beta(Q)+\delta_{cz}(M,t)\gamma(Q),\\ \delta_{kn_Q}(M,t)&=\delta_{kx}(M,t)\alpha(Q)+\delta_{ky}(M,t)\beta(Q)+\delta_{kz}(M,t)\gamma(Q),\\ \delta_{on_Q}(M,t)&=\delta_{ox}(M,t)\alpha(Q)+\delta_{oy}(M,t)\beta(Q)+\delta_{oz}(M,t)\gamma(Q).\end{aligned} \quad (34)$$

Подставив (34) в ИУ (21), получим

$$\tau_k(Q,t)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_k}\tau_k(M,t)\frac{\cos(\hat{n}_Q\,\bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2}ds_M+2\lambda\int\limits_{V_k}\frac{\partial\alpha(Q)\delta_{kx}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+2\lambda\int\limits_{V_k}\frac{\partial\beta(Q)\delta_{ky}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+2\lambda\int\limits_{V_k}\frac{\partial\gamma(Q)\delta_{kz}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+2\lambda\int\limits_{V_c}\frac{\partial\alpha(Q)\delta_{cx}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+2\lambda\int\limits_{V_c}\frac{\partial\beta(Q)\delta_{cy}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+2\lambda\int\limits_{V_c}\frac{\partial\gamma(Q)\delta_{cz}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M=-2\lambda\int\limits_{V_o}\frac{\partial\alpha(Q)\delta_{ox}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M-$$

$$-2\lambda\int\limits_{V_o}\frac{\partial\beta(Q)\delta_{oy}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M-2\lambda\int\limits_{V_o}\frac{\partial\gamma(Q)\delta_{oz}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\ Q\in S_k. \quad (35)$$

Таким образом, ВСИУ (17), (18), (20), (21), описывающая трехмерное распределение вихревых токов в системе НЛЗ квадратного сечения — кристаллизатор преобразована к СкСИУ (24)—(26), (29)—(32), (35).

Комплексная форма СкСИУ (24)—(26), (29)—(32), (35). Для расчета синусоидально изменяющихся во времени ВТ необходимо полученную СкСИУ преобразовать в комплексную форму. Для этого мгновенные значения синусоидально изменяющихся величин будем изображать мнимыми частями соответствующих комплексов [1]. Полученную таким образом комплексную систему уравнений представим в следующем виде:

$$\frac{1}{\lambda\gamma_c(Q)}\dot{\delta}_{cXm}(Q)+j\omega\int_{V_c}\dot{\delta}_{cxm}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+j\omega\int_{V_k}\dot{\delta}_{kxm}(M)\,\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_c}\dot{\tau}_{cm}(M)\frac{\alpha_r(Q,M)}{r_{QM}^2}\,ds_M=-j\omega\int_{V_o}\dot{\delta}_{oxm}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M,\ Q\in V_c; \quad (36)$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma_c(Q)}\dot{\delta}_{cym}(Q)+j\omega\int_{V_c}\dot{\delta}_{cym}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+j\omega\int_{V_k}\dot{\delta}_{kym}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_c}\dot{\tau}_{cm}(M)\frac{\beta_r(Q,M)}{r_{QM}^2}\,ds_M=-j\omega\int_{V_o}\dot{\delta}_{oym}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M,\ \ Q\in V_c; \quad (37)$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma_c(Q)}\dot{\delta}_{czm}(Q)+j\omega\int_{V_c}\dot{\delta}_{czm}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+j\omega\int_{V_k}\dot{\delta}_{kzm}(M)\,\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_c}\dot{\tau}_{cm}(M)\frac{\gamma_r(Q,M)}{r_{QM}^2}\,ds_M=-j\omega\int_{V_o}\dot{\delta}_{ozm}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M,\quad Q\in V_c; \quad (38)$$

$$\dot{\tau}_{cm}(Q)+\frac{1}{2\pi}\int_{S_c}\dot{\tau}_{cm}(M)\frac{\cos(\hat{n}_Q\bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2}\,ds_M+2\lambda\alpha(Q)\,j\omega\int_{V_c}\dot{\delta}_{cxm}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+$$

$$+2\lambda\beta(Q)\,j\omega\int_{V_c}\dot{\delta}_{cym}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+2\lambda\gamma(Q)\,j\omega\int_{V_c}\dot{\delta}_{czm}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+$$

$$+2\lambda\alpha(Q)\,j\omega\int_{V_k}\dot{\delta}_{kxm}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+2\lambda\beta(Q)\,j\omega\int_{V_k}\dot{\delta}_{kym}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+$$

$$+2\lambda\gamma(Q)\,j\omega\int_{V_k}\dot{\delta}_{kzm}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M=-2\lambda\alpha(Q)\,j\omega\int_{V_o}\dot{\delta}_{oxm}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M-$$

$$-2\lambda\beta(Q)\,j\omega\int_{V_o}\dot{\delta}_{oym}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M-2\lambda\gamma(Q)\,j\omega\int_{V_o}\dot{\delta}_{ozm}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M,\quad Q\in S_c; \quad (39)$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma_k(Q)}\dot{\delta}_{kxm}(Q)+j\omega\int_{V_k}\dot{\delta}_{kxm}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+j\omega\int_{V_c}\dot{\delta}_{cxm}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_k}\dot{\tau}_{km}(M)\frac{\alpha_r(Q,M)}{r_{QM}^2}ds_M=-j\omega\int_{V_o}\dot{\delta}_{oxm}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\quad Q\in V_k; \tag{40}$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma_k(Q)}\dot{\delta}_{kym}(Q)+j\omega\int_{V_k}\dot{\delta}_{kym}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+j\omega\int_{V_c}\dot{\delta}_{cym}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_k}\dot{\tau}_{km}(M)\frac{\beta_r(Q,M)}{r_{QM}^2}ds_M=-j\omega\int_{V_o}\dot{\delta}_{oym}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\quad Q\in V_k; \tag{41}$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma_k(Q)}\dot{\delta}_{kzm}(Q)+j\omega\int_{V_k}\dot{\delta}_{kzm}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+j\omega\int_{V_c}\dot{\delta}_{czm}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int_{S_k}\dot{\tau}_{km}(M)\frac{\gamma_r(Q,M)}{r_{QM}^2}ds_M=-j\omega\int_{V_o}\dot{\delta}_{ozm}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\quad Q\in V_k; \tag{42}$$

$$\dot{\tau}_{km}(Q)+\frac{1}{2\pi}\int_{S_k}\dot{\tau}_{km}(M)\frac{\cos(\hat{n}_Q\,\bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2}ds_M+2\lambda\alpha(Q)\,j\omega\int_{V_k}\dot{\delta}_{kxm}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+2\lambda\beta(Q)\,j\omega\int_{V_k}\dot{\delta}_{kym}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+2\lambda\gamma(Q)\,j\omega\int_{V_k}\dot{\delta}_{kzm}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+2\lambda\alpha(Q)\,j\omega\int_{V_c}\dot{\delta}_{cxm}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+2\lambda\beta(Q)\,j\omega\int_{V_c}\dot{\delta}_{cym}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+2\lambda\gamma(Q)\,j\omega\int_{V_c}\dot{\delta}_{czm}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M=-2\lambda\alpha(Q)\,j\omega\int_{V_o}\dot{\delta}_{oxm}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M-$$

$$-2\lambda\beta(Q)\,j\omega\int_{V_o}\dot{\delta}_{oym}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M-2\lambda\gamma(Q)\,j\omega\int_{V_o}\dot{\delta}_{ozm}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\quad Q\in S_k. \tag{43}$$

Для краткости запишем СкСИУ (36) — (43) в операторной форме:

$$\frac{1}{\lambda\gamma_c(Q)}\dot{\delta}_{cxm}(Q)+j\omega T_{cc}\dot{\delta}_{cxm}+j\omega T_{ck}\dot{\delta}_{kxm}+\frac{1}{\mu_0}P_{cc}^{\alpha}\dot{\tau}_{cm}=-j\omega T_{co}\dot{\delta}_{oxm},\quad Q\in V_c; \tag{44}$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma_c(Q)}\dot{\delta}_{cym}(Q)+j\omega T_{cc}\dot{\delta}_{cym}+j\omega T_{ck}\dot{\delta}_{kym}+\frac{1}{\mu_0}P_{cc}^{\beta}\dot{\tau}_{cm}=-j\omega T_{co}\dot{\delta}_{oym},\quad Q\in V_c; \tag{45}$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma_c(Q)}\dot{\delta}_{czm}(Q)+j\omega T_{cc}\dot{\delta}_{czm}+j\omega T_{ck}\dot{\delta}_{kzm}+\frac{1}{\mu_0}P^{\gamma}_{cc}\dot{\tau}_{cm}=-j\omega T_{co}\dot{\delta}_{ozm},\ Q\in V_c; \tag{46}$$

$$\dot{\tau}_{cm}(Q)+\frac{1}{2\pi}P_{cc}\dot{\tau}_{cm}+2\lambda\ j\omega T^{\alpha}_{cc}\dot{\delta}_{cxm}+2\lambda\ j\omega T^{\beta}_{cc}\dot{\delta}_{cym}+2\lambda\ j\omega T^{\gamma}_{cc}\dot{\delta}_{czm}+$$
$$+2\lambda\ j\omega T^{\alpha}_{ck}\dot{\delta}_{kxm}+2\lambda\ j\omega T^{\beta}_{ck}\dot{\delta}_{kym}+2\lambda\ j\omega T^{\gamma}_{ck}\dot{\delta}_{kzm}=$$
$$=-2\lambda\ j\omega T^{\alpha}_{co}\dot{\delta}_{oxm}-2\lambda\ j\omega T^{\beta}_{co}\dot{\delta}_{oym}-2\lambda\ j\omega T^{\gamma}_{co}\dot{\delta}_{ozm},\ Q\in S_c; \tag{47}$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma_k(Q)}\dot{\delta}_{kxm}(Q)+j\omega T_{kk}\dot{\delta}_{kxm}+j\omega T_{kc}\dot{\delta}_{cxm}+\frac{1}{\mu_0}P^{\alpha}_{kk}\dot{\tau}_{km}=$$
$$=-j\omega T_{ko}\dot{\delta}_{oxm},\quad Q\in V_k; \tag{48}$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma_k(Q)}\dot{\delta}_{kym}(Q)+j\omega T_{kk}\dot{\delta}_{kym}+j\omega T_{kc}\dot{\delta}_{cym}+\frac{1}{\mu_0}P^{\beta}_{kk}\dot{\tau}_{km}=$$
$$=-j\omega T_{ko}\dot{\delta}_{oym},\quad Q\in V_k; \tag{49}$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma_k(Q)}\dot{\delta}_{kzm}(Q)+j\omega T_{kk}\dot{\delta}_{kzm}+j\omega T_{kc}\dot{\delta}_{czm}+\frac{1}{\mu_0}P^{\gamma}_{kk}\dot{\tau}_{km}=$$
$$=-j\omega T_{ko}\dot{\delta}_{ozm},\quad Q\in V_k; \tag{50}$$

$$\dot{\tau}_{km}(Q)+\frac{1}{2\pi}P_{kk}\dot{\tau}_{km}+2\lambda\ j\omega T^{\alpha}_{kk}\dot{\delta}_{kxm}+2\lambda\ j\omega T^{\beta}_{kk}\dot{\delta}_{kym}+2\lambda\ j\omega T^{\gamma}_{kk}\dot{\delta}_{kzm}+$$
$$+2\lambda\ j\omega T^{\alpha}_{kc}\dot{\delta}_{cxm}+2\lambda\ j\omega T^{\beta}_{kc}\dot{\delta}_{cym}+2\lambda\ j\omega T^{\gamma}_{kc}\dot{\delta}_{czm}=$$
$$=-2\lambda\ j\omega T^{\alpha}_{ko}\dot{\delta}_{oxm}-2\lambda\ j\omega T^{\beta}_{ko}\dot{\delta}_{oym}-2\lambda\ j\omega T^{\gamma}_{ko}\dot{\delta}_{ozm},\quad Q\in S_k. \tag{51}$$

Представим комплексные величины, входящие в СкСИУ (44) —(51), в алгебраической форме:

$$\begin{gathered}\dot{\delta}_{cxm}(Q)=\delta'_{cx}(Q)+j\delta''_{cx}(Q),\quad \dot{\delta}_{kzm}(Q)=\delta'_{kz}(Q)+j\delta''_{kz}(Q),\\ \dot{\delta}_{cym}(Q)=\delta'_{cy}(Q)+j\delta''_{cy}(Q),\quad \dot{\delta}_{oxm}(M)=\delta'_{ox}(M)+j\delta''_{ox}(M),\\ \dot{\delta}_{czm}(Q)=\delta'_{cz}(Q)+j\delta''_{cz}(Q),\quad \dot{\delta}_{oym}(M)=\delta'_{oy}(M)+j\delta''_{oy}(M),\\ \dot{\delta}_{kxm}(Q)=\delta'_{kx}(Q)+j\delta''_{kx}(Q),\quad \dot{\delta}_{ozm}(M)=\delta'_{oz}(M)+j\delta''_{oz}(M),\\ \dot{\delta}_{kym}(Q)=\delta'_{ky}(Q)+j\delta''_{ky}(Q),\quad \dot{\tau}_{cm}(Q)=\tau'_{c}(Q)+j\tau''_{c}(Q),\\ \dot{\tau}_{km}(Q)=\tau'_{k}(Q)+j\tau''_{k}(Q).\end{gathered} \tag{52}$$

Подставив комплексные величины (52) в ИУ (44), получим равенство, эквивалентное следующим двум ИУ:

$$\frac{1}{\lambda\gamma_c(Q)}\delta'_{cx}(Q)-\omega T_{cc}\delta''_{cx}-\omega T_{ck}\delta''_{kx}+\frac{1}{\mu_0}P^{\alpha}_{cc}\tau'_c=\omega T_{co}\delta''_{ox}, Q\in V_c, \qquad (53)$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma_c(Q)}\delta''_{cx}(Q)+\omega T_{cc}\delta'_{cx}-\omega T_{ck}\delta'_{kx}+\frac{1}{\mu_0}P^{\alpha}_{cc}\tau''_c=-\omega T_{co}\delta'_{ox},\ Q\in V_c. \qquad (54)$$

Подставив в ИУ (45) комплексные величины в алгебраической форме (52), получим равенство, эквивалентное следующим двум ИУ:

$$\frac{1}{\lambda\gamma_c(Q)}\delta'_{cy}(Q)-\omega T_{cc}\delta''_{cy}-\omega T_{ck}\delta''_{ky}+\frac{1}{\mu_0}P^{\beta}_{cc}\tau'_c=\omega T_{co}\delta''_{oy},\ Q\in V_c, \qquad (55)$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma_c(Q)}\delta''_{cy}(Q)+\omega T_{cc}\delta'_{cy}+\omega T_{ck}\delta'_{ky}+\frac{1}{\mu_0}P^{\alpha}_{cc}\tau''_c=-\omega T_{co}\delta'_{oy},\ Q\in V_c. \qquad (56)$$

Подставив в ИУ (46) комплексные величины в алгебраической форме (52), получим равенство, эквивалентное следующим двум ИУ:

$$\frac{1}{\lambda\gamma_c(Q)}\delta'_{cz}(Q)-\omega T_{cc}\delta''_{cz}-\omega T_{ck}\delta''_{kz}+\frac{1}{\mu_0}P^{\gamma}_{cc}\tau'_c=\omega T_{co}\delta''_{oz},\ Q\in V_c, \qquad (57)$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma_c(Q)}\delta''_{cz}(Q)+\omega T_{cc}\delta'_{cz}+\omega T_{ck}\delta'_{kz}+\frac{1}{\mu_0}P^{\gamma}_{cc}\tau''_c=-\omega T_{co}\delta'_{oz},\ Q\in V_c. \qquad (58)$$

Подставив в ИУ (47) комплексные величины в алгебраической форме (52), получим равенство, эквивалентное следующим вещественным ИУ:

$$\tau'_c(Q)+\frac{1}{2\pi}P_{cc}\tau'_c-2\lambda\omega T^{\alpha}_{cc}\delta''_{cx}-2\lambda\omega T^{\beta}_{cc}\delta''_{cy}-2\lambda\omega T^{\gamma}_{cc}\delta''_{cz}-$$

$$-2\lambda\omega T^{\alpha}_{ck}\delta''_{kx}-2\lambda\omega T^{\beta}_{ck}\delta''_{ky}-2\lambda\omega T^{\gamma}_{ck}\delta''_{kz}=$$

$$=2\lambda\omega T^{\alpha}_{co}\delta''_{ox}+2\lambda\omega T^{\beta}_{co}\delta''_{oy}+2\lambda\omega T^{\gamma}_{co}\delta''_{oz},\ Q\in S_c, \qquad (59)$$

$$\tau''_c(Q)+\frac{1}{2\pi}P_{cc}\tau''_c+2\lambda\omega T^{\alpha}_{cc}\delta'_{cx}+2\lambda\omega T^{\beta}_{cc}\delta'_{cy}+2\lambda\omega T^{\gamma}_{cc}\delta'_{cz}+$$

$$+2\lambda\omega T^{\alpha}_{ck}\delta'_{kx}+2\lambda\omega T^{\beta}_{ck}\delta'_{ky}+2\lambda\omega T^{\gamma}_{ck}\delta'_{kz}=$$

$$=-2\lambda\omega T^{\alpha}_{co}\delta'_{ox}-2\lambda\omega T^{\beta}_{co}\delta'_{oy}-2\lambda\omega T^{\gamma}_{co}\delta'_{oz},\ Q\in S_c. \qquad (60)$$

Аналогично сводятся к вещественным комплексные ИУ (48)—(51). Опуская подробные выкладки, приведем эти уравнения. Уравнение (48) эквивалентно следующим двум:

$$\frac{1}{\lambda\gamma_k(Q)}\delta'_{kx}(Q)-\omega T_{kk}\delta''_{kx}-\omega T_{kc}\delta''_{cx}+\frac{1}{\mu_0}P^{\alpha}_{kk}\tau'_k=\omega T_{ko}\delta''_{ox},\quad Q\in V_k, \tag{61}$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma_k(Q)}\delta''_{kx}(Q)+\omega T_{kk}\delta'_{kx}+\omega T_{kc}\delta'_{cx}+\frac{1}{\mu_0}P^{\alpha}_{kk}\tau''_k=-\omega T_{ko}\delta'_{ox},\quad Q\in V_k. \tag{62}$$

Уравнение (49) эквивалентно следующим двум:

$$\frac{1}{\lambda\gamma_k(Q)}\delta'_{ky}(Q)-\omega T_{kk}\delta''_{ky}-\omega T_{kc}\delta''_{cy}+\frac{1}{\mu_0}P^{\beta}_{kk}\tau'_k=\omega T_{ko}\delta''_{oy},\ Q\in V_k, \tag{63}$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma_k(Q)}\delta''_{ky}(Q)+\omega T_{kk}\delta'_{ky}+\omega T_{kc}\delta'_{ky}+\frac{1}{\mu_0}P^{\beta}_{kk}\tau''_k=-\omega T_{ko}\delta'_{oy},\ Q\in V_k. \tag{64}$$

Уравнение (50) эквивалентно следующим двум:

$$\frac{1}{\lambda\gamma_k(Q)}\delta'_{kz}(Q)-\omega T_{kk}\delta''_{kz}-\omega T_{kc}\delta''_{cz}+\frac{1}{\mu_0}P^{\gamma}_{kk}\tau'_k=\omega T_{ko}\delta''_{oz},\ Q\in V_k, \tag{65}$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma_k(Q)}\delta''_{kz}(Q)+\omega T_{kk}\delta'_{kz}+\omega T_{kc}\delta'_{cz}+\frac{1}{\mu_0}P^{\gamma}_{kk}\tau''_k=-\omega T_{ko}\delta'_{oz},\ Q\in V_k. \tag{66}$$

Уравнение (51) эквивалентно следующим двум:

$$\begin{aligned}\tau'_k(Q)&+\frac{1}{2\pi}P_{kk}\tau'_k-2\lambda\omega T^{\alpha}_{kk}\delta''_{kx}-2\lambda\omega T^{\beta}_{kk}\delta''_{ky}-2\lambda\omega T^{\gamma}_{kk}\delta''_{kz}-\\&-2\lambda\omega T^{\alpha}_{kc}\delta''_{cx}-2\lambda\omega T^{\beta}_{kc}\delta''_{cy}-2\lambda\omega T^{\gamma}_{kc}\delta''_{cz}=\\&=2\lambda\omega T^{\alpha}_{ko}\delta''_{ox}+2\lambda\omega T^{\beta}_{ko}\delta''_{oy}+2\lambda\omega T^{\gamma}_{ko}\delta''_{oz},\quad Q\in S_k,\end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}\tau''_k(Q)&+\frac{1}{2\pi}P_{kk}\tau''_k+2\lambda\omega T^{\alpha}_{kk}\delta'_{kx}+2\lambda\omega T^{\beta}_{kk}\delta'_{ky}+2\lambda\omega T^{\gamma}_{kk}\delta'_{kz}+\\&+2\lambda\omega T^{\alpha}_{kc}\delta'_{cx}+2\lambda\omega T^{\beta}_{kc}\delta'_{cy}+2\lambda\omega T^{\gamma}_{kc}\delta'_{cz}=\\&=-2\lambda\omega T^{\alpha}_{ko}\delta'_{ox}-2\lambda\omega T^{\beta}_{ko}\delta'_{oy}-2\lambda\omega T^{\gamma}_{ko}\delta'_{oz},\quad Q\in S_k.\end{aligned} \tag{68}$$

Выводы

В основу разработанной интегральной модели трехмерного распределения ВТ в НЛЗ квадратного сечения при электромагнитном перемешивании в вертикальной МНЛЗ положена ВСИУ, полученная в результате обобщения ВСИУ для одного массивного проводника на систему двух

близко расположенных изолированных массивных проводников, какими являются заготовка и кристаллизатор МНЛЗ. Исходная ВСИУ преобразована к СкСИУ в декартовой системе координат. Поскольку токи в обмотках ЭМП изменяются синусоидально во времени, СкСИУ записывается в комплексной форме. Вещественная СкСИУ (53)—(68) вытекает из комплексной в результате преобразования комплексов в алгебраическую форму.

The integral model of three-dimensional distribution of eddy flows in the system continuous casting of square cross-section — mould under electromagnetic stirring in vertical MCC. It is based on VSIE obtained as a result of VSIE generalization for one massive conductor for the system of two closely distributed isolated massive conductors which are a casting and a mould MCC. The initial VSIE is transformed to ScSIE in the Cartesian system of coordinates. Since currents in windings of EMC change sinusoidally in time, ScSIE is recorded in a complex form. Substantial ScSIE follows from the complex one as a result of transformation of complexes into the algebraic form.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Евдокимов В.Ф., Петрушенко Е.И.* Интегральная модель трехмерного распределения вихревых токов в непрерывно литой заготовке квадратного сечения при электромагнитном перемешивании в вертикальной МНЛЗ. I // Электрон. моделирование. — 2013. — **35,** № 6. — С. 49—62.
2. *Петрушенко Е.И.* К расчету вихревых токов в проводниках сложной формы // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. — 1966. — № 6. — С. 59—70.

Поступила 13.09.13

ЕВДОКИМОВ Виктор Федорович, чл.-кор. НАН Украины, директор Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1963 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — теория моделирования процессов и систем в энергетике, теория функционально-ориентированных компьютерных систем, анализ и синтез параллельных вычислительных методов и систем.

ПЕТРУШЕНКО Евгений Иванович, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., зав. отделом моделирования задач электромагнитной гидродинамики Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1960 г. окончил Новочеркасский политехнический ин-т, а в 1963 г. — Ростовский государственный университет. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.