УДК 681.3:519.711.3:517.958:621.313:669

В.Ф. Евдокимов, чл.-кор. НАН Украины,
Е.И. Петрушенко, канд. техн. наук
Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел. 4241063, e-mail: dep_7@voliacable.com)

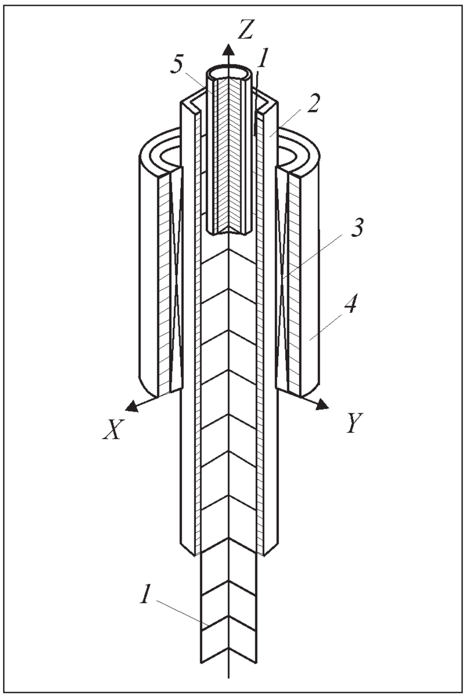
Интегральная модель трехмерного распределения вихревых токов в непрерывно литой заготовке квадратного сечения при электромагнитном перемешивании в вертикальной МНЛЗ. I

Для упрощения решения основной задачи решена вспомогательная задача — построена интегральная модель трехмерного распределения вихревых токов в непрерывно литой заготовке без учета влияния вихревых токов в кристаллизаторе, в основе которой лежит векторная система интегральных уравнений, эквивалентная уравнениям Максвелла в проводящей среде.

Для спрощення розв'язку основної задачі розв'язана допоміжна задача — побудовано інтегральну модель тривимірного розподілу вихрових струмів у безперервно литій заготовці без врахування впливу вихрових струмів в кристалізаторі, в основу якої покладено векторну систему інтегральних рівнянь, еквівалентну рівнянням Максвела в середовищі, що проводить.

Ключевые слова: интегральная модель, трехмерное распределение, вихревые токи, непрерывно литая заготовка, квадратное сечение, векторная система интегральных уравнений, скалярная система интегральных уравнений , комплексная форма, алгебраическая форма ,электромагнитное перемешивание, вертикальная МНЛЗ.

В настоящее время в связи с внедрением энергосберегающих технологий, повышением производительности машин непрерывного литья заготовок (МНЛЗ) и качества заготовок появляется необходимость создания нового и улучшения конструкций существующего электротехнического оборудования. Одним из видов такого оборудования являются электромагнитные перемешиватели (ЭМП) (см. рисунок). К числу мер, позволяющих ускорить разработку ЭМП, относится применение при их проектировании математического моделирования. Это позволяет не только избежать гро-



Вертикальная МНЛЗ для заготовок квадратного сечения с ЭМП: *1* — непрерывно литая заготовка (НЛЗ) квадратного сечения; *2* — кристаллизатор; *3* — обмотка ЭМП; *4* — магнитопровод ЭМП; *5* — погружной стакан

моздких расчетов, но и заменить дорогостоящий физический эксперимент математическим.

Конструктивные особенности ЭМП таковы, что электромагнитные поля в них — существенно трехмерны. Поэтому в основу пакета программ для расчетов ЭМП положены трехмерные уравнения Максвелла. В общем случае для этой системы необходимо решать краевые задачи в неограниченной неоднородной области, содержащей геометрически сложные ферромагнитные (магнитопровод) и проводящие (корпус, обечайка, гильза, жидкая сталь) тела. Сложность указанных задач, с одной стороны, и необходимость разработки практически реализуемых на доступных ЭВМ программ, с другой стороны, стимулирует поиск таких эквивалентных преобразований этих систем, в результате которых во вновь полученных системах достаточно просто и с приемлемой точностью учитывалась бы специфика распределения полей в ЭМП.

Одним из таких преобразований является сведение краевой задачи к эквивалентному интегральному уравнению (ИУ). Если в качестве такого преобразования использовать методы теории потенциала, то неизвестными в полученных ИУ будут плотности источников поля: плотности токов в обмотках, плотности токов намагниченности (ТН) на поверхности магнитопроводов, плотности вихревых токов (ВТ) в массивных проводниках. Поскольку объемы обмоток, поверхности ферромагнитных магнитопроводов, объемы массивных проводников занимают, как правило, незначительную часть пространства, переход к ИУ существенно упрощает задачу.

Данная задача делится на две части:

первая — расчет источников поля (плотности ТН на поверхности магнитопроводов и плотности ВТ в объеме массивных проводников) посредством решения полученных ИУ;

вторая — расчет поля в любой точке пространства интегрированием по источникам поля.

Тем не менее, задача решения ИУ остается достаточно сложной.

Предлагается интегральная модель трехмерного распределения ВТ в НЛЗ квадратного сечения при электромагнитном перемешивании в вертикальной МНЛЗ без учета влияния ВТ в кристаллизаторе. Заготовка помещена в магнитном поле индуктора (без магнитопровода), в обмотке которого протекает синусоидальный ток. Исходная векторная СИУ (ВСИУ) преобразована к скалярной (СкСИУ) в декартовой системе координат. Поскольку токи в обмотках ЭМП изменяются синусоидально во времени, СкСИУ записана в комплексной форме. Вещественная СкСИУ вытекает из комплексной в результате преобразования комплексов в алгебраическую форму.

Векторная СИУ, описывающая трехмерное распределение ВТ в уединенной НЛЗ, находящейся в магнитном поле индуктора, в обмотках которого протекают синусоидальные токи. Пусть в однородной среде электромагнитное поле возбуждается квазистационарными токами в обмотках. Вектор плотности этих токов обозначим $\overline{\delta}_0$, а объем, занимаемый ими, — V_o. В заготовке, представляющей собой массивное проводящее тело объема V, индуктируются ВТ плотностью $\overline{\delta}$.

Уравнения Максвелла для квазистационарного поля в проводящей среде

$$\operatorname{rot} \overline{H} = \overline{\delta}, \quad \operatorname{rot} \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}, \quad \overline{\delta} = \gamma \overline{E}, \quad \operatorname{div} \overline{\delta} = 0, \quad \operatorname{div} \overline{B} = 0, \quad \overline{B} = \mu_0 \overline{H} \tag{1}$$

с помощью соотношений $\overline{B} = \operatorname{rot} \overline{A}$,

$$\operatorname{div} \overline{A} = 0, \tag{2}$$

$$\overline{E} = -\frac{\partial \overline{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \tag{3}$$

можно свести к уравнениям

$$\Delta \overline{A} = -\mu_0 \overline{\delta}, \tag{4}$$

$$\Delta \varphi = 0. \tag{5}$$

В однородной среде решение уравнения (4) имеет вид

$$\overline{A}(Q, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_o} \frac{\overline{\delta}_o(M, t)}{r_{QM}} d\upsilon_M + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V} \frac{\overline{\delta}(M, t)}{r_{QM}} d\upsilon_M, \tag{6}$$

где r_{QM} — расстояние между точками $Q\,(x_Q, y_Q, z_Q)$ и $M\,(x_M, y_M, z_M)$,

$$r_{QM} = \sqrt{(x_M - x_Q)^2 + (y_M - y_Q)^2 + (z_M - z_Q)^2}.$$

Плотность $\overline{\delta}$ ВТ, входящих в (6), неизвестна. Для их определения необходимо воспользоваться соотношением (3). Подставив (6) в (3), получим

$$\overline{E}\,(Q,t) + \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \gamma\,(M)\,\frac{\partial \overline{E}\,(M,t)}{\partial t}\,\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V_\text{o}} \frac{\partial \overline{\delta}_\text{o}(M,t)}{r_{QM}}\,\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M - \operatorname{grad}\varphi, \quad Q \in V. \qquad (7)$$

При заданной правой части и начальном условии $\overline{E}\,(Q,0)$ уравнение (7) имеет единственное решение. В этом легко убедиться, если симметризовать ядро уравнения (7) заменой переменных $\overline{E}\,(Q,t) = \sqrt{\gamma\,(Q)}\,\overline{E}\,(Q,t)$ и применить к нему преобразование Лапласа по переменной t.

Преобразуем уравнение (7) относительно вектора $\overline{\delta}\,(Q,t)$. Воспользовавшись связью между векторами $\overline{\delta}\,(Q,t)$ и $\overline{E}\,(Q,t)$ (1), получим

$$\frac{\overline{\delta}\,(Q,t)}{\lambda\gamma\,(Q)} + \int\limits_V \frac{\partial \overline{\delta}\,(M,t)}{\partial t}\,\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M =$$

$$= -\int\limits_{V_\text{o}} \frac{\partial \overline{\delta}_\text{o}(M,t)}{r_{QM}}\,\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M - \frac{1}{\lambda}\operatorname{grad}\varphi, \quad Q \in V, \qquad (8)$$

где $\lambda = \mu_0 / 4\pi$. Для определения скалярного потенциала φ в объеме проводника необходимо решить задачу Неймана относительно уравнения (5) при граничном условии

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = -\left.\frac{\partial A_n}{\partial t}\right|_S, \qquad (9)$$

где A_n — проекция вектора $\overline{A}$ на нормаль $\overline{n}_Q$ к поверхности проводника S в точке Q. Положительное направление нормали $\overline{n}_Q$ принято соответственно объему проводника V в окружающем пространстве. Условие (9) есть следствие условия $\delta_n|_S = 0$ и соотношения (3).

Разрешимость этой задачи следует из (2). Действительно,

$$\int\limits_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds = -\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S A_n\,ds = -\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \operatorname{div}\overline{A}\,d\upsilon = 0.$$

С помощью потенциала простого слоя с учетом плотности τ на поверхности S

$$\varphi\,(Q,t)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\frac{\tau\,(M,t)}{r_{QM}}\,ds_M \tag{10}$$

эта задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода [2]

$$\tau\,(Q,t)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_S\tau\,(M,t)\,\frac{\cos\,(\hat{n}_Q\bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2}\,ds_M=-2\frac{\partial A_n(Q,t)}{\partial t},\quad Q\in S, \tag{11}$$

Подставив в уравнение (8) потенциал φ (10), получим

$$\frac{\bar{\delta}\,(Q,t)}{\lambda\gamma\,(Q)}+\int\limits_V\frac{\partial\bar{\delta}\,(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+\frac{1}{\mu_0}\int\limits_S\tau\,(M,t)\,\mathrm{grad}_Q\,\frac{1}{r_{QM}}\,ds_M=$$

$$=-\int\limits_{V_o}\frac{\partial\bar{\delta}_o(M,t)}{r_{QM}}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M,\quad Q\in V. \tag{12}$$

Формулы для вычисления $\mathrm{grad}_Q\,\frac{1}{r_{QM}}$ имеют вид

$$\mathrm{grad}_Q\,\frac{1}{r_{QM}}=\frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3},$$

$$\mathrm{grad}_Q\,\frac{1}{r_{QM}}=\frac{\alpha_r(Q,M)}{r_{QM}^2}\,\bar{e}_X+\frac{\beta_r(Q,M)}{r_{QM}^2}\,\bar{e}_Y+\frac{\gamma_r(Q,M)}{r_{QM}^2}\,\bar{e}_Z, \tag{13}$$

где

$$\bar{r}_{QM}=(x_M-x_Q)\,\bar{e}_X+(y_M-y_Q)\,\bar{e}_Y+(z_M-z_Q)\,\bar{e}_Z,$$

$$\alpha_r(Q,M)=\frac{x_M-x_Q}{r_{QM}},\quad\beta_r(Q,M)=\frac{y_M-y_Q}{r_{QM}},\quad\gamma_r(Q,M)=\frac{z_M-z_Q}{r_{QM}}. \tag{14}$$

Подставляя (13) в (12), получаем

$$\frac{\bar{\delta}\,(Q,t)}{\lambda\gamma\,(Q)}+\int\limits_V\frac{\partial\bar{\delta}\,(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+\frac{1}{\mu_0}\int\limits_S\tau\,(M,t)\,\frac{\bar{r}_{QM}}{r_{QM}^3}\,ds_M=$$

$$=-\int\limits_{V_K}\frac{\partial\bar{\delta}_k(M,t)}{r_{QM}}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M,\quad Q\in V. \tag{15}$$

Теперь, подставив (6) в (11), получим

$$\tau(Q,t)+\frac{1}{2\pi}\int_S \tau(M,t)\frac{\cos(\hat{n}_Q\bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2}ds_M+2\lambda\int_V \frac{\partial\delta_{nQ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M=$$

$$=-2\lambda\int_{V_k}\frac{\partial\delta_{knQ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\ Q\in S. \tag{16}$$

Векторная СИУ (15) , (16) при заданных начальных условиях

$$\bar{\delta}(Q,O),\ Q\in V,\ \ \bar{\delta}_{\text{o}}(Q,O),\ \ Q\in V_{\text{o}}, \tag{17}$$

позволяет решить задачу расчета ВТ в массивном проводнике сложной формы в нестационарных режимах.

Преобразование ВСИУ(15), (16) для распределения ВТ в уединенной НЛЗ квадратного сечения в СкСИУ в декартовой системе координат. Векторное интегральное уравнение (ВИУ) (15) преобразуем в СкСИУ в декартовой системе координат. Для этого входящие в (15) векторы представим в виде

$$\bar{\delta}(Q,t)=\delta_X(Q,t)\,\bar{e}_X+\delta_Y(Q,t)\,\bar{e}_Y+\delta_Z(Q,t)\,\bar{e}_Z,$$

$$\bar{\delta}_{\text{o}}(Q,t)=\delta_{\text{o}X}(Q,t)\,\bar{e}_X+\delta_{\text{o}Y}(Q,t)\,\bar{e}_Y+\delta_{\text{o}Z}(Q,t)\,\bar{e}_Z.$$

При этом

$$\frac{1}{\lambda\gamma(Q)}\delta_X(Q,t)\,\bar{e}_X+\frac{1}{\lambda\gamma(Q)}\delta_Y(Q,t)\,\bar{e}_Y+\frac{1}{\lambda\gamma(Q)}\delta_Z(Q,t)\,\bar{e}_Z+$$

$$+\int_V\frac{\partial\delta_X(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M\,\bar{e}_X+\int_V\frac{\partial\delta_Y(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M\,\bar{e}_Y+$$

$$+\int_V\frac{\partial\delta_Z(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M\,\bar{e}_Z+\frac{1}{\mu_0}\int_S\tau(M,t)\frac{\alpha_r(Q,M)}{r_{QM}^2}ds_M\,\bar{e}_X+$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\int_S\tau(M,t)\frac{\beta_r(Q,M)}{r_{QM}^2}ds_M\,\bar{e}_Y+\frac{1}{\mu_0}\int_S\tau(M,t)\frac{\gamma_r(Q,M)}{r_{QM}^2}ds_M\,\bar{e}_Z=$$

$$=-\int_{V_{\text{o}}}\frac{\partial\delta_{\text{o}X}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M\,\bar{e}_X-\int_{V_{\text{o}}}\frac{\partial\delta_{\text{o}Y}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M\,\bar{e}_Y-$$

$$-\int_{V_{\text{o}}}\frac{\partial\delta_{\text{o}Z}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M\,\bar{e}_Z,\ \ Q\in V. \tag{18}$$

Приравнивая выражения при одноименных ортах справа и слева в (18), получаем три скалярных ИУ:

$$\frac{1}{\lambda\gamma(Q)}\delta_X(Q,t)+\int_V \frac{\partial\delta_X(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+\frac{1}{\mu_0}\int_S \tau(M,t)\frac{\alpha_r(Q,M)}{r_{QM}^2}\,ds_M=$$

$$=-\int_{V_o}\frac{\partial\delta_{oX}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M,\quad Q\in V; \tag{19}$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma(Q)}\delta_Y(Q,t)+\int_V \frac{\partial\delta_Y(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+\frac{1}{\mu_0}\int_S \tau(M,t)\frac{\beta_r(Q,M)}{r_{QM}^2}\,ds_M=$$

$$=-\int_{V_o}\frac{\partial\delta_{oY}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M,\quad Q\in V; \tag{20}$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma(Q)}\delta_Z(Q,t)+\int_V \frac{\partial\delta_Z(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+\frac{1}{\mu_0}\int_S \tau(M,t)\frac{\gamma_r(Q,M)}{r_{QM}^2}\,ds_M=$$

$$=-\int_{V_o}\frac{\partial\delta_{oZ}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M,\quad Q\in V. \tag{21}$$

Преобразуем скалярное ИУ (16) к декартовой системе координат. Для этого запишем нормаль в точке $Q\in S$:

$$\bar{n}_Q=\alpha(Q)\,\bar{e}_X+\beta(Q)\,\bar{e}_Y+\gamma(Q)\,\bar{e}_Z,$$

$$\alpha(Q)=\cos(\bar{n}_Q,\bar{e}_X),\ \beta(Q)=\cos(\bar{n}_Q,\bar{e}_Y),\ \gamma(Q)=\cos(\bar{n}_Q,\bar{e}_Z). \tag{22}$$

Подставляя (22) и (14) в выражение для $\cos(\bar{n}_Q,\bar{r}_{QM})$, получаем

$$\cos(\bar{n}_Q,\bar{r}_{QM})=\alpha(Q)\,\alpha_r(Q,M)+\beta(Q)\,\beta_r(Q,M)+\gamma(Q)\,\gamma_r(Q,M). \tag{23}$$

Аналогично получим выражения

$$\delta_{n_Q}(M,t)=\delta_x(M,t)\,\alpha(Q)+\delta_y(M,t)\,\beta(Q)+\delta_z(M,t)\,\gamma(Q),$$

$$\delta_{on_Q}(M,t)=\delta_{ox}(M,t)\,\alpha(Q)+\delta_{oy}(M,t)\,\beta(Q)+\delta_{oz}(M,t)\,\gamma(Q).$$

Подставив (23) в (16), получим

$$\tau(Q,t)+\frac{1}{2\pi}\int_S \tau(M,t)\frac{\cos(\hat{n}_Q\bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2}\,ds_M+2\lambda\alpha(Q)\int_V \frac{\partial\delta_x(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+$$

$$+2\lambda\beta(Q)\int\limits_V \frac{\partial\delta_y(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M + 2\lambda\gamma(Q)\int\limits_V \frac{\partial\delta_z(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M =$$

$$= -2\lambda\alpha(Q)\int\limits_{V_\text{o}} \frac{\partial\delta_{\text{o}x}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M - 2\lambda\beta(Q)\int\limits_{V_\text{o}} \frac{\partial\delta_{\text{o}y}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M -$$

$$-2\lambda\gamma(Q)\int\limits_{V_\text{o}} \frac{\partial\delta_{\text{o}z}(M,t)}{\partial t}\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M\,,\quad Q\in S. \tag{24}$$

Скалярная СИУ (19)—(21), (24) при заданных начальных условиях (17) описывает распределение нестационарных ВТ в массивных проводниках.

Комплексная форма СкСИУ (19)—(21), (24). Если в обмотках индуктора протекают синусоидально изменяющиеся во времени токи, то ВТ также изменяются во времени синусоидально. Для расчета таких токов необходимо СкСИУ (19)—(21), (24) преобразовать в комплексную форму. Для этого мгновенные значения синусоидально изменяющихся величин будем изображать мнимыми частями соответствующих комплексов. Покажем это на примере уравнения (19):

$$\delta_x(Q,t) = \delta_{xm}(Q)\sin(\omega t + \psi_x(Q)) = \mathrm{Im}\,[\delta_{xm}(Q)\exp j\,(\omega t + \psi_x(Q))] =$$

$$= \mathrm{Im}\,[\delta_{xm}(Q)\exp j\psi_x(Q)\exp j\omega t] = \mathrm{Im}\,[\dot\delta_{xm}(Q)\exp j\omega t], \tag{25}$$

где

$$\dot\delta_{xm}(Q) = \delta_{xm}(Q)\exp j\psi_x(Q)\,; \tag{26}$$

$$\delta_x(M,t) = \delta_{xm}(M)\sin(\omega t + \psi_x(M)) = \mathrm{Im}\,[\delta_{xm}(M)\exp j\,(\omega t + \psi_x(M))] =$$

$$= \mathrm{Im}\,[\delta_{xm}(M)\exp j\psi_x(M)\exp j\omega t] = \mathrm{Im}\,[\dot\delta_{xm}(M)\exp j\omega t]\,; \tag{27}$$

$$\dot\delta_{xm}(M) = \delta_{xm}(M)\exp j\psi_x(M)\,; \tag{28}$$

$$\delta_{\text{o}x}(M,t) = \delta_{\text{o}xm}(M)\sin(\omega t + \psi_{\text{o}x}(M)) = \mathrm{Im}\,[\delta_{\text{o}xm}(M)\exp j\,(\omega t + \psi_{\text{o}x}(M))] =$$

$$= \mathrm{Im}\,[\delta_{\text{o}xm}(M)\exp j\psi_{\text{o}x}(M)\exp j\omega t] = \mathrm{Im}\,[\dot\delta_{\text{o}xm}(M)\exp j\omega t]\,; \tag{29}$$

$$\dot\delta_{\text{o}xm}(M) = \delta_{xm}(M)\exp j\psi_{\text{o}x}(M)\,; \tag{30}$$

$$\tau\,(M,t) = \tau_m(M)\sin(\omega t + \psi_\tau(M)) = \mathrm{Im}\,[\tau_m(M)\exp j\,(\omega t + \psi_\tau(M))] =$$

$$= \mathrm{Im}\,[\tau_m(M)\exp j\,\psi_\tau(M)\exp j\,\omega t] = \mathrm{Im}\,[\dot\tau_m(M)\exp j\,\omega t]\,; \tag{31}$$

$$\dot\tau_m(M) = \tau_m(M)\exp\psi_\tau(M)\,; \tag{32}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta_x(M,t)=\frac{\partial}{\partial t}\delta_{xm}(M)\sin(\omega t+\psi_x(M))=$$

$$=\omega\delta_{xm}(M)\cos(\omega t+\psi_x(M))=\operatorname{Im}[j\omega\dot{\delta}_{xm}(M)\exp j\omega t]; \qquad (33)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta_{\text{o}x}(M,t)=\frac{\partial}{\partial t}\delta_{\text{o}xm}(M)\sin(\omega t+\psi_{\text{o}x}(M))=$$

$$=\omega\delta_{\text{o}xm}(M)\cos(\omega t+\psi_{\text{o}x}(M))=\operatorname{Im}[j\omega\dot{\delta}_{\text{o}xm}(M)\exp j\omega t]. \qquad (34)$$

Подставив (25)—(34) в (19), получим

$$\frac{1}{\lambda\gamma(Q)}\dot{\delta}_{xm}(Q)+j\omega\int\limits_V\dot{\delta}_{xm}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+\frac{1}{\mu_0}\int\limits_S\dot{\tau}_m(M)\frac{\alpha_r(Q,M)}{r_{QM}^2}\,ds_M=$$

$$=-j\,\omega\int\limits_{V_\text{o}}\dot{\delta}_{\text{o}xm}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M,\quad Q\in V. \qquad (35)$$

Аналогично преобразуем к комплексной форме ИУ (20) и (21):

$$\frac{1}{\lambda\gamma(Q)}\dot{\delta}_{ym}(Q)+j\omega\int\limits_V\dot{\delta}_{ym}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+\frac{1}{\mu_0}\int\limits_S\dot{\tau}_m(M)\frac{\beta_r(Q,M)}{r_{QM}^2}\,ds_M=$$

$$=-j\omega\int\limits_{V_\text{o}}\dot{\delta}_{\text{o}ym}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M,\quad Q\in V, \qquad (36)$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma(Q)}\dot{\delta}_{zm}(Q)+j\omega\int\limits_V\dot{\delta}_{zm}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M+\frac{1}{\mu_0}\int\limits_S\dot{\tau}_m(M)\frac{\gamma_r(Q,M)}{r_{QM}^2}\,ds_M=$$

$$=-j\omega\int\limits_{V_\text{o}}\dot{\delta}_{\text{o}zm}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M,\quad Q\in V, \qquad (37)$$

где

$$\dot{\delta}_{ym}(Q)=\delta_{ym}(Q)\exp j\psi_y(Q);\quad \dot{\delta}_{ym}(M)=\delta_{ym}(M)\exp j\psi_y(M);$$

$$\dot{\delta}_{\text{o}ym}(M)=\delta_{\text{o}ym}(M)\exp j\psi_{\text{o}y}(M);\quad \dot{\tau}_m(M)=\tau_m(M)\exp\psi_\tau(M);$$

$$\dot{\delta}_{zm}(Q)=\delta_{zm}(Q)\exp j\psi_z(Q);\quad \dot{\delta}_{zm}(M)=\delta_{zm}(M)\exp j\psi_z(M);$$

$$\dot{\delta}_{\text{o}zm}(M)=\delta_{\text{o}zm}(M)\exp j\psi_{\text{o}z}(M).$$

Тогда

$$\dot{\tau}_m(Q)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \dot{\tau}_m(M)\frac{\cos(\hat{n}_Q\bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2}ds_M+2\lambda\alpha(Q)\,j\omega\int\limits_V \dot{\delta}_{xm}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+$$

$$+2\lambda\beta(Q)\,j\omega\int\limits_V \dot{\delta}_{ym}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M+2\lambda\gamma(Q)\,j\omega\int\limits_V \dot{\delta}_{zm}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M=$$

$$=-2\lambda\alpha(Q)\,j\omega\int\limits_{V_o} \dot{\delta}_{oxm}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M-2\lambda\beta(Q)\,j\omega\int\limits_{V_o} \dot{\delta}_{oym}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M-$$

$$-2\lambda\gamma(Q)\,j\omega\int\limits_{V_o} \dot{\delta}_{ozm}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\ Q\in S. \tag{38}$$

Запишем СкСИУ (35) — (38) в операторной форме:

$$\frac{1}{\lambda\gamma(Q)}\dot{\delta}_{Xm}(Q)+j\omega T_{VV}\dot{\delta}_{Xm}+\frac{1}{\mu_0}P_{VS}^{\alpha}\dot{\tau}_m=-j\omega T_{VV_o}\dot{\delta}_{oxm},\ Q\in V;$$

$$\frac{1}{\Lambda\gamma(Q)}\dot{\delta}_{Xm}(Q)+jT_{VV}\dot{\delta}_{Xm}+\frac{1}{\mu_0\omega}P_{VS}^{\alpha}\dot{\tau}_m=-jT_{VV_o}\dot{\delta}_{oxm},\ Q\in V, \tag{39}$$

где $\Lambda=\lambda\omega$;

$$T_{VV}\dot{\delta}_{xm}=\int\limits_V \dot{\delta}_{xm}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\ Q\in V;$$

$$P_{VS}^{\alpha}\dot{\tau}_m=\int\limits_S \dot{\tau}_m(M)\frac{\alpha_r(Q,M)}{r_{QM}^2}ds_M,\ Q\in V;$$

$$T_{VV_o}=\int\limits_{V_o} \dot{\delta}_{oxm}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\upsilon_M,\ Q\in V;$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma(Q)}\dot{\delta}_{ym}(Q)+j\omega T_{VV}\dot{\delta}_{ym}+\frac{1}{\mu_0}P_{VS}^{\beta}\dot{\tau}_m=-j\omega T_{VV_o}\dot{\delta}_{oym},\ Q\in V;$$

$$\frac{1}{\Lambda\gamma(Q)}\dot{\delta}_{ym}(Q)+jT_{VV}\dot{\delta}_{ym}+\frac{1}{\mu_0\omega}P_{VS}^{\beta}\dot{\tau}_m=-jT_{VV_o}\dot{\delta}_{oym},\ Q\in V, \tag{40}$$

где

$$T_{VV}\dot{\delta}_{ym}=\int\limits_V \dot{\delta}_{ym}(M)\frac{1}{r_{QM}}d\,\upsilon_M,\ Q\in V;$$

$$P_{VS}^{\beta}\dot{\tau}_m = \int_S \dot{\tau}_m(M)\frac{\beta_r(Q,M)}{r_{QM}^2}\,ds_M\,, \quad Q\in V;$$

$$T_{VV_\text{o}}\dot{\delta}_{\text{o}ym} = \int_{V_\text{o}} \dot{\delta}_{\text{o}ym}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M\,, \quad Q\in V;$$

$$\frac{1}{\lambda\gamma(Q)}\dot{\delta}_{zm}(Q) + j\omega T_{VV}\dot{\delta}_{zm} + \frac{1}{\mu_0}P_{VS}^{\gamma}\dot{\tau}_m = -j\omega T_{VV_\text{o}}\dot{\delta}_{\text{o}zm}, \quad Q\in V;$$

$$\frac{1}{\Lambda\gamma(Q)}\dot{\delta}_{zm}(Q) + jT_{VV}\dot{\delta}_{zm} + \frac{1}{\mu_0\omega}P_{VS}^{\gamma}\dot{\tau}_m = -jT_{VV_\text{o}}\dot{\delta}_{\text{o}zm}, \quad Q\in V, \tag{41}$$

где

$$T_{VV}\dot{\delta}_{zm} = \int_V \dot{\delta}_{zm}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M\,, \quad Q\in V;$$

$$P_{VS}^{\gamma}\dot{\tau}_m = \int_S \dot{\tau}_m(M)\frac{\gamma_r(Q,M)}{r_{QM}^2}\,ds_M\,, \quad Q\in V;$$

$$T_{VV_\text{o}}\dot{\delta}_{\text{o}zm} = \int_{V_\text{o}} \dot{\delta}_{\text{o}zm}(M)\frac{1}{r_{QM}}\,d\upsilon_M\,, \quad Q\in V;$$

$$\dot{\tau}_m(Q) + \frac{1}{2\pi}P_{SS}\dot{\tau}_m + j2\Lambda T_{SV}^{\alpha}\dot{\delta}_{xm} + j2\Lambda T_{SV}^{\beta}\dot{\delta}_{ym} + j2\Lambda T_{SV}^{\gamma}\dot{\delta}_{zm} =$$
$$= -j2\Lambda T_{SV}^{\alpha}\dot{\delta}_{oxm} - j2\Lambda T_{SV}^{\beta}\dot{\delta}_{oym} - j2\Lambda T_{SV}^{\gamma}\dot{\delta}_{ozm}, \quad Q\in S, \tag{42}$$

где

$$P_{SS}\dot{\tau}_m = \int_S \dot{\tau}_m(M)\frac{\cos(\hat{n}_Q\bar{r}_{QM})}{r_{QM}^2}\,ds_M\,, \quad Q\in S;$$

$$T_{SV}^{\alpha}\dot{\delta}_{xm} = \int_V \dot{\delta}_{xm}(M)\frac{\alpha(Q)}{r_{QM}}\,d\upsilon_M\,, \quad Q\in S;$$

$$T_{SV}^{\beta}\dot{\delta}_{ym} = \int_V \dot{\delta}_{ym}(M)\frac{\beta(Q)}{r_{QM}}\,d\upsilon_M\,, \quad Q\in S;$$

$$T_{SV}^{\gamma}\dot{\delta}_{zm} = \int_V \dot{\delta}_{zm}(M)\frac{\gamma(Q)}{r_{QM}}\,d\upsilon_M\,, \quad Q\in S;$$

$$T_{SV_\text{o}}^{\alpha}\dot{\delta}_{\text{o}xm} = \int_{V_\text{o}} \dot{\delta}_{\text{o}xm}(M)\frac{\alpha(Q)}{r_{QM}}\,d\upsilon_M\,, \quad Q\in S;$$

$$T_{SV_o}^{\beta}\dot{\delta}_{oym}=\int_{V_o}\dot{\delta}_{oym}(M)\frac{\beta(Q)}{r_{QM}}d\upsilon_M\,,\ \ Q\in S;$$

$$T_{SV_o}^{\gamma}\dot{\delta}_{ozm}=\int_{V_o}\dot{\delta}_{ozm}(M)\frac{\gamma(Q)}{r_{QM}}d\upsilon_M\,,\quad Q\in S.$$

Теперь представим комплексные величины, входящие в СкСИУ (39)—(42) в алгебраической форме:

$$\dot{\delta}_{xm}(Q)=\delta'_{xm}(Q)+j\delta''_{xm}(Q),\ \ \dot{\delta}_{ym}(Q)=\delta'_{ym}(Q)+j\delta''_{ym}(Q),$$
$$\dot{\delta}_{zm}(Q)=\delta'_{zm}(Q)+j\delta''_{zm}(Q);$$
$$\dot{\delta}_{xm}(M)=\delta'_{xm}(M)+j\delta''_{xm}(M),\ \ \dot{\delta}_{ym}(M)=\delta'_{ym}(M)+j\delta''_{ym}(M),$$
$$\dot{\delta}_{zm}(M)=\delta'_{zm}(M)+j\delta''_{zm}(M);\tag{43}$$
$$\dot{\delta}_{oxm}(M)=\delta'_{oxm}(M)+j\delta''_{oxm}(M),\dot{\delta}_{oym}(M)=\delta'_{oym}(M)+j\delta''_{oym}(M),$$
$$\dot{\delta}_{ozm}(M)=\delta'_{ozm}(M)+j\delta''_{ozm}(M);$$
$$\dot{\tau}_m(Q)=\tau'_m(Q)+j\tau''_m(Q)\,,\dot{\tau}_m(M)=\tau'_m(M)+j\tau''_m(M)\,.$$

Подставим в (43) комплексы $\dot{\delta}_{xm}(Q)$, $\dot{\delta}_{xm}(M)$,$\dot{\delta}_{oxm}(M)$, $\dot{\tau}_m(M)$, входящие в уравнение (39):

$$\frac{1}{\Lambda\gamma(Q)}[\delta'_{xm}(Q)+j\delta''_{xm}(Q)]+jT_{VV}(\delta'_{xm}+j\delta''_{xm})+\frac{1}{\mu_0\omega}P_{VS}^{\alpha}(\tau'_m+j\tau''_m)=$$
$$=-jT_{VV_o}(\delta'_{oxm}+j\delta''_{oxm}),\ Q\in V.\tag{44}$$

Приравнивая в (44) вещественные и мнимые части справа и слева, получаем два вещественных уравнения:

$$\frac{1}{\Lambda\gamma(Q)}\delta'_{xm}(Q)-T_{VV}\delta''_{xm}+\frac{1}{\mu_0\omega}P_{VS}^{\alpha}\tau'_m=T_{VV_o}\delta''_{oxm}\,,\ \ Q\in V;\tag{45}$$

$$\frac{1}{\Lambda\gamma(Q)}\delta''_{xm}(Q)+T_{VV}\delta'_{xm}+\frac{1}{\mu_0\omega}P_{VS}^{\alpha}\tau''_m=-T_{VV_o}\delta'_{oxm}\,,\ \ Q\in V.\tag{46}$$

Аналогично преобразуем комплексные ИУ (40) и (41) к вещественным:

$$\frac{1}{\Lambda\gamma(Q)}\delta'_{ym}(Q)-T_{VV}\delta''_{ym}+\frac{1}{\mu_0\omega}P_{VS}^{\beta}\tau'_m=T_{VV_o}\delta''_{oym}\,,\ \ Q\in V,\tag{47}$$

$$\frac{1}{\Lambda\gamma(Q)}\delta''_{ym}(Q)+T_{VV}\delta'_{ym}+\frac{1}{\mu_0\omega}P_{VS}^{\beta}\tau''_m=-T_{VV_o}\delta'_{oym}\,,Q\in V,\tag{48}$$

$$\frac{1}{\Lambda\gamma\,(Q)}\delta'_{zm}(Q) - T_{VV}\delta''_{zm} + \frac{1}{\mu_0\omega}P^{\gamma}_{VS}\tau'_m = T_{VV_\text{o}}\delta''_{\text{o}zm}\;, Q \in V, \tag{49}$$

$$\frac{1}{\Lambda\gamma\,(Q)}\delta''_{zm}(Q) + T_{VV}\delta'_{zm} + \frac{1}{\mu_0\omega}P^{\gamma}_{VS}\tau''_m = -T_{VV_\text{o}}\delta'_{\text{o}zm}\;, Q \in V. \tag{50}$$

Подставим в уравнение (42) комплексы $\dot\tau_m(Q), \dot\tau_m(M), \dot\delta_{xm}(M), \dot\delta_{ym}(M)$, $\dot\delta_{zm}(M), \dot\delta_{\text{o}xm}(M), \dot\delta_{\text{o}ym}(M), \dot\delta_{\text{o}zm}(M)$ в алгебраической форме (43):

$$\tau'_m(Q) + j\tau''_m(Q) + \frac{1}{2\pi}P_{SS}\tau'_m + j\,\frac{1}{2\pi}P_{SS}\tau''_m + j2\Lambda T^{\alpha}_{SV}(\delta'_{xm} + j\delta''_{xm}) +$$

$$+j2\Lambda T^{\beta}_{SV}(\delta'_{ym} + j\delta''_{ym}) + j2\Lambda T^{\gamma}_{SV}(\delta'_{zm} + j\delta''_{zm}) =$$

$$= -j2\Lambda T^{\alpha}_{SV_\text{o}}(\delta'_{\text{o}xm} + j\delta''_{\text{o}xm}) - j2\Lambda T^{\beta}_{SV_\text{o}}(\delta'_{\text{o}ym} + j\delta''_{\text{o}ym}) - j2\Lambda T^{\gamma}_{SV_\text{o}}(\delta'_{\text{o}zm} + j\delta''_{\text{o}zm}). \tag{51}$$

Приравнивая вещественные и мнимые части в (51) справа и слева, получаем два вещественных уравнения:

$$\tau'_m(Q) + \frac{1}{2\pi}P_{SS}\tau'_m - 2\Lambda T^{\alpha}_{SV}j\delta''_{xm} - 2\Lambda T^{\beta}_{SV}\delta''_{ym} - 2\Lambda T^{\gamma}_{SV}\delta''_{zm} =$$

$$= 2\Lambda T^{\alpha}_{SV_\text{o}}\delta''_{\text{o}xm} + 2\Lambda T^{\beta}_{SV_\text{o}}\delta''_{\text{o}ym} + 2\Lambda T^{\gamma}_{SV_\text{o}}\delta''_{\text{o}zm},\; Q \in S, \tag{52}$$

$$\tau''_m(Q) + \frac{1}{2\pi}P_{SS}\tau''_m + 2\Lambda T^{\alpha}_{SV}\delta'_{xm} + 2\Lambda T^{\beta}_{SV}\delta'_{ym} + 2\Lambda T^{\gamma}_{SV}\delta'_{zm} =$$

$$= -2\Lambda T^{\alpha}_{SV_\text{o}}\delta'_{\text{o}xm} - 2\Lambda T^{\beta}_{SV_\text{o}}\delta'_{\text{o}ym} - 2\Lambda T^{\gamma}_{SV_\text{o}}\delta'_{\text{o}zm},\; Q \in S. \tag{53}$$

Выводы

Получена скалярная вещественная СИУ (45)—(50), (52), (53), описывающая трехмерное распределение ВТ в уединенной НЛЗ квадратного сечения, находящейся в магнитном поле индуктора, в обмотках которого протекают синусоидальные токи. Областью определения этой СИУ являются объем и поверхность заготовки. При решении этой задачи методом конечных элементов или конечных разностей расчетной областью является неограниченное пространство.

An auxiliary problem has been solved to simplify the solution of the basic problem: the integral model of three-dimensional distribution of eddy flows in the continuous casting has been constructed making no allowance for eddy flows in a mould; the model is based on the vector system of integral equations, equivalent to Maxwell equations in the conducting medium.

Поступила 13.09.13

ЕВДОКИМОВ Виктор Федорович, чл.-кор. НАН Украины, директор Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1963 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — теория моделирования процессов и систем в энергетике, теория функционально-ориентированных компьютерных систем, анализ и синтез параллельных вычислительных методов и систем.

ПЕТРУШЕНКО Евгений Иванович, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., зав. отделом моделирования задач электромагнитной гидродинамики Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1960 г. окончил Новочеркасский политехнический ин-т, а в 1963 г. — Ростовский государственный университет. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.