УДК 519.248

В.П. Долгин, канд. техн. наук, **М.В. Бармина, Д.И. Долгин**
Севастопольский национальный технический университет
(Украина, 99053, Севастополь, ул. Университетская, 33,
тел. (0692) 543570, e-mail: autosev@ukr.net)

Иерархическая модель — обратная задача массового обслуживания

Изложен метод решения задачи коррекции интенсивностей потоков, обеспечивающих заданные свойства системы массового обслуживания. Показана возможность решения обратной задачи массового обслуживания для линейной системы уравнений прямым и компенсационным методами.

Викладено метод розв'язування задачі корекції інтенсивностей потоків, які забезпечують задані властивості системи масового обслуговування. Показано можливість розв'язку оберненої задачі масового обслуговування для лінійної системи рівнянь прямим та компенсаційним методами.

Ключевые слова: поток событий, вероятность, граф состояний, обратная задача, адаптация.

В большинстве случаев модели управления и обслуживания производственных, технологических, кредитно-банковских и ряда других процессов, связанных с анализом информационных потоков, имеют иерархическую структуру [1—3]. Информация, поступающая в случайные моменты времени, обрабатывается и анализируется, что требует затрат времени. Для организации эффективного управления процессом обработки информации применяют статистические модели [3], которые позволяют оценить затраты в зависимости от интенсивности информационных потоков для конкретной структуры системы обслуживания.

Теория систем массового обслуживания (СМО) позволяет получить оценку любого из состояний, в которых может находиться система, если известны значения интенсивностей всех информационных потоков. Это удобно при осуществлении контроля эффективности системы, но вызывает затруднения в случае необходимости ввода коррекции при изменениях ее параметров вследствие, например, применения новых технологий

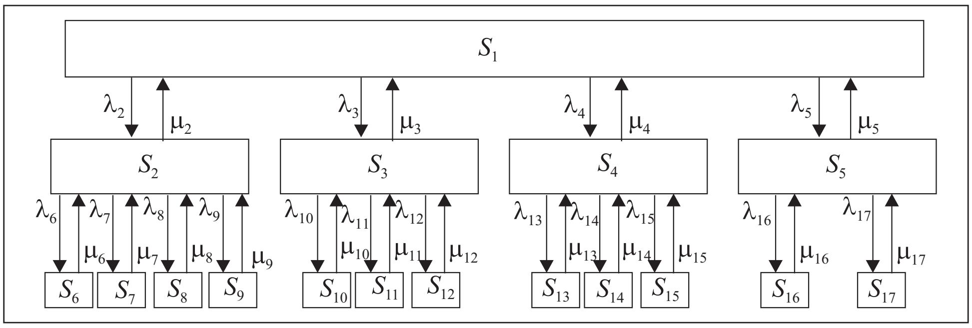

Рис. 1

обработки информации, более совершенных технических средств и других факторов, связанных с изменением интенсивностей потоков. Изменение интенсивности любого из потоков приводит к изменению вероятностей состояний всей системы, что осложняет реализацию коррекции.

Постановка задачи. Конечная цель коррекции СМО заключается в определении параметров интенсивностей потоков (часть из которых известна), обеспечивающих требуемые значения финальных вероятностей состояний системы. С учетом изложенного задача может быть сформулирована так: по заданным значениям финальных вероятностей состояний системы и известным значениям интенсивностей части потоков найти интенсивности остальных потоков, считая все потоки простейшими для СМО с дискретными состояниями и непрерывным временем.

Решение задачи. Уравнения Колмогорова, описывающие состояния системы, представляют собой линейную систему. Выбор метода решения этой системы уравнений зависит от заданных интенсивностей потоков. Если число неизвестных (интенсивностей потоков, подлежащих определению) совпадает с числом уравнений системы, то применяются прямые методы решения (аналитические или численные) [4]. Система будет определенной (иметь единственное решение) при соблюдении условия совместности, которое проверяется с помощью матричных форм Кронекера—Капелли. В противном случае система является несовместной (не имеющей решения).

В ряде случаев число неизвестных может превышать ранг системы, что требует разработки специальных методов коррекции интенсивностей потоков для обеспечения требуемых вероятностей состояний СМО с заданной точностью, так как прямые методы решения, позволяющие получить точный результат, в этих условиях неприменимы. Рассмотрим решение задачи для иерархической системы обслуживания при определенной системе линейных уравнений, описывающих ее состояния, в которой число неизвестных равно числу уравнений системы.

Прямой метод решения осуществляется по заданному размеченному графу состояний СМО (рис. 1). Система обслуживания может находиться в одном из n состояний $S=\{S_1, S_2, ..., S_n\}$ $(n=17)$. Процесс, протекающий в СМО, состоит в том, что в случайные моменты времени система под воздействием потоков событий переходит из одного состояния в другое. Потоки условно можно разделить на две группы: потоки заявок и потоки обслуживаний. Поступившая заявка немедленно начинает обслуживаться. Среднее время T_i пребывания системы в этом состоянии S_i определяет его финальную вероятность [3] $p_i = T_i / T_ф$, где $T_ф$ — время работы системы. Обозначив финальные вероятности состояний через p_i, где i — номер состояния S_i $(i=1, ..., n)$, составим систему уравнений Колмогорова [3, 4] для всех n состояний в принятой (см. рис. 1) системе обозначений:

$$p_1 \sum_{i=2}^{5} \lambda_i = \sum_{i=2}^{5} p_i \mu_i, \quad p_2\left(\mu_2 + \sum_{i=6}^{9} \lambda_i\right) = p_1\lambda_2 + \sum_{i=6}^{9} p_i \mu_i,$$

$$p_3\left(\mu_3 + \sum_{i=10}^{12} \lambda_i\right) = p_1\lambda_3 + \sum_{i=10}^{12} p_i \mu_i, \quad p_4\left(\mu_4 + \sum_{i=13}^{15} \lambda_i\right) = p_1\lambda_4 + \sum_{i=13}^{15} p_i \mu_i,$$

$$p_5\left(\mu_5 + \sum_{i=16}^{17} \lambda_i\right) = p_1\lambda_5 + \sum_{i=16}^{17} p_i \mu_i, \tag{1}$$

$$p_3\lambda_{10} = p_{10}\mu_{10}, \ p_3\lambda_{11} = p_{11}\mu_{11}, \ p_3\lambda_{11} = p_{11}\mu_{11},$$

$$p_4\lambda_{13} = p_{13}\mu_{13}, \ p_4\lambda_{14} = p_{14}\mu_{14}, \ p_4\lambda_{15} = p_{15}\mu_{15},$$

$$p_5\lambda_{16} = p_{16}\mu_{16}, \ p_5\lambda_{17} = p_{17}\mu_{17}.$$

Запишем уравнение нормировки

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \tag{2}$$

и решим систему уравнений (1) относительно искомых неизвестных p_i $(i=1, ..., n)$. Получим решение системы уравнений (1) с соблюдением условия (2) для произвольно заданных (случайных) значений интенсивностей потоков и найдем значения интенсивностей, обеспечивающие требуемые вероятности состояний. Для примера зададим вероятности состояний, согласно условию (2), по уровням иерархии:

$$p_1 = 0,6, \ p_2, ..., p_5 = 0,5, \ p_6, ..., p_{17} = 0,0167. \tag{3}$$

Система (1) является линейной. Для ее решения необходимо задать n неизвестных. В качестве неизвестных независимых переменных выберем интенсивности потоков, подлежащие коррекции. Для технических систем в качестве корректируемых выберем потоки восстановлений (обслуживания), так как потоки отказов (заявок на обслуживание) обусловлены технологией изготовления, выбором материалов, конструктивными особенностями и другими причинами, являющимися следствием производства конкретной технической системы. Для СМО целесообразно в качестве корректируемых выбрать интенсивности потоков обслуживания, которые можно изменять, например, введением организационно-технических мероприятий.

Введем в систему уравнений (1) желаемые значения вероятностей (3) и зададим с помощью генератора случайных чисел множество значений потоков заявок на обслуживание:

$$\mu=\begin{Bmatrix}0{,}902; & 0{,}394; & 0{,}915; & 0{,}893; & 0{,}371; & 0{,}205; & 0{,}248; & 0{,}156;\\ 0{,}616; & 0{,}276; & 0{,}274; & 0{,}412; & 0{,}0670; & 0{,}503; & 0{,}316; & 0{,}718\end{Bmatrix}. \tag{4}$$

В результате решения системы уравнений (1) с учетом множеств (3) и (4) определим требуемые значения интенсивностей потоков обслуживаний:

$$\lambda=\begin{Bmatrix}0{,}0752; & 0{,}0328; & 0{,}0762; & 0{,}0744; & 0{,}124; & 0{,}0683; & 0{,}0827; & 0{,}0520;\\ 0{,}205; & 0{,}0920; & 0{,}0913; & 0{,}137; & 0{,}0223; & 0{,}168; & 0{,}105; & 0{,}239\end{Bmatrix}. \tag{5}$$

Подставив в систему (1) найденные значения λ (5), заданные значения μ (4), введя уравнение нормировки (2) и решив ее относительно p_i $(i=1,\ldots,n)$, получим заданные значения вероятностей состояний (3).

В общем случае, создавая произвольные комбинации неизвестных из множеств p_i, λ_j и μ_j в количестве, равном числу уравнений n системы (1), можно решать задачи коррекции СМО в различных постановках, допускающих уточнение ее параметров. Из возможных комбинаций необходимо исключить такие, при которых заданы все входящие и исходящие потоки хотя бы одного из состояний, что делает систему уравнений несовместной.

На рис. 2 представлены гистограммы распределения параметров системы до и после введения коррекции интенсивностей потоков, реализованной решением системы уравнений (1) с помощью программы Maple System_Hqs при выборе в качестве неизвестных комбинации части λ-потоков,

$$\lambda=\begin{Bmatrix}\lambda_2; & \lambda_3; & \lambda_4; & \lambda_5; & \lambda_6; & \lambda_7; & \lambda_8; & \lambda_9;\\ 0{,}232; & 0{,}429; & 0{,}592; & 0{,}0692; & 0{,}627; & 0{,}398; & 0{,}611; & 0{,}418\end{Bmatrix},$$

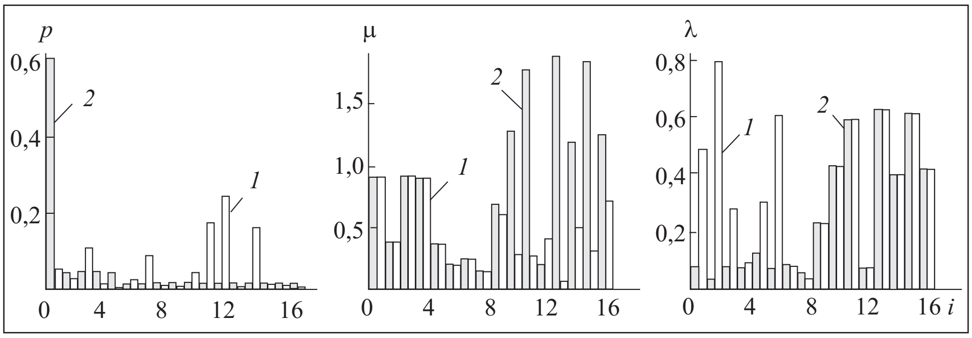

Рис. 2

и μ-потоков,

$$\mu = \begin{Bmatrix} 0{,}902; & 0{,}394; & 0{,}915; & 0{,}893; & 0{,}371; & 0{,}205; & 0{,}248; & 0{,}156; \\ \mu_{10}; & \mu_{11}; & \mu_{12}; & \mu_{13}; & \mu_{14}; & \mu_{15}; & \mu_{16}; & \mu_{17} \end{Bmatrix},$$

с заданными вероятностями состояний (3). Гистограммы распределения вероятностей состояний $p_i (i=1,...,n)$, μ_i и $\lambda_i (i=2,...,n)$ до ввода коррекции обозначены цифрой *1*, а после ввода коррекции — цифрой *2*.

В общем случае число корректируемых параметров системы m, подлежащее определению, может не совпадать с числом уравнений n системы (1). В этом случае система уравнений (1) может оказаться недоопределенной ($m > n$) или переопределенной ($m < n$). Множество корректируемых параметров может содержать элементы λ-потоков и μ- потоков. Кроме того, при произвольном выборе λ_i и μ_i для коррекции система уравнений (1) может оказаться несовместной. Рассмотрим алгоритм, позволяющий получить решение совместной системы (1) с заданной точностью.

Компенсационный метод. Объединим подлежащие коррекции потоки в множество $x = \{x_1, ..., x_i, ..., x_m\}$, где $x_i \in (\lambda \setminus \mu)$ является элементом множества λ либо множества μ. Будем считать заданными все вероятности множества состояний $P = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ и известными начальные значения всех потоков. Решив систему уравнений (1) относительно $p = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$, найдем стандартное (среднее квадратичное) отклонение разностей $\Delta_i = P_i - p_i$ $(i=1,...,n)$. Введем допустимое значение стандартного отклонения ε.

Процедура компенсации состоит в адаптации параметров СМО по критерию минимума ε. Изменим величину x_i, умножив ее на k, $x_i = x_i k$ $(k \neq 1)$, что приведет к перераспределению вероятностей состояний системы p. Если в результате этого стандартное отклонение разностей Δ_i $(i=1,...,n)$ уменьшится, то сохраним измененную величину $x_i = x_i k$. В противном случае оставим x_i неизменным. Повторяя этот процесс для всех m элементов множества x при выбранном значении множителя k и обратном его значении k^{-1} до тех пор, пока стандартное отклонение разностей $\Delta_i (i=1,...,n)$ перестанет изменяться, компенсируем отклонения значений элементов множества x. Процедуру следует повторить при другом значении k, если полученное значение стандартного отклонения больше допустимого ε. Найдем закон изменения k.

Зададим начальное значение $k = k_0$ $(k_0 \neq 1)$. Следующие значения определим с помощью рекуррентной процедуры

$$k_i = \frac{k_{i-1} + \alpha}{\alpha + 1}, \tag{6}$$

где $\alpha > 0$. Выполнив последовательно подстановки в формулу (6) и приведя результат к полиномиальной форме, получим

$$k_1 = \frac{k_0 + \alpha}{\alpha + 1},$$

$$k_2 = \frac{k_0 + 2\alpha + \alpha^2}{(\alpha + 1)^2},$$

$$k_3 = \frac{k_0 + 3\alpha + 3\alpha^2 + \alpha^3}{(\alpha + 1)^3},$$

. . . .

$$k_i = \frac{k_0 + \sum_{j=1}^{i} C_i^j \alpha^j}{(\alpha + 1)^n},$$

где C_i^j — биномиальный коэффициент. Для k_i и k_i^{-1} при начальном значении k_0 в компактной форме запишем

$$k_i = \frac{k_0 - 1}{(\alpha + 1)^i} + 1,$$

$$k_i^{-1} = \frac{(\alpha + 1)^i}{k_0 - 1 + (\alpha + 1)^i}, \tag{7}$$

где $(\alpha + 1)^i = \sum_{j=0}^{i} C_i^j \alpha^j$. Из выражения (7) следует, что в пределе при неограниченном увеличении значения i множитель имеет вид

$$k_\infty = \lim_{i \to \infty} \left(\frac{k_0 - 1}{(\alpha + 1)^i} + 1 \right) = 1,$$

что справедливо и для k_∞^{-1}.

Определим закон изменения шага h_j, с которым происходит компенсация x_j $(j=1,...,m)$, соответствующего значению множителя k_i либо k_i^{-1}. Для i-го шага итерации запишем уравнения

$$x_j k_i = x_j + h_j,$$
$$x_j k_i^{-1} = x_j + h_j,$$

решив которые, получим

$$h_j = \begin{cases} x_j(k_i - 1), \\ x_j(k_i^{-1} - 1). \end{cases} \tag{8}$$

Подставив в (8) k_i и k_i^{-1} из (7), после преобразований найдем

$$h_j = \begin{cases} x_j \dfrac{k_0 - 1}{(\alpha+1)^i}, & k_i, \\ x_j \dfrac{1}{(\alpha+1)^i/(1-k_0) - 1}, & k_i^{-1}. \end{cases} \tag{9}$$

Рассмотрим характер изменения шага h_j. Для этого запишем полученное выражение (9) в обобщенной форме: $h_j = x_j \beta_i$, где β_i — относительная величина шага,

$$\beta_i = \begin{cases} \dfrac{k_0 - 1}{(\alpha+1)^i}, & k_i, \\ \dfrac{1}{(\alpha+1)^i/(1-k_0) - 1}, & k_i^{-1}. \end{cases} \tag{10}$$

Найдем предельные значения β_i. Начальное значение β_0 получим, подставив в (10) $i=0$:

$$\beta_0 = \begin{cases} k_0 - 1, & k_i, \\ \dfrac{1-k_0}{k_0}, & k_i^{-1}. \end{cases}$$

В пределе при $i \to \infty$ имеем $\beta_i|_{i\to\infty} \to 0$. Таким образом, абсолютная величина шага h_j монотонно уменьшается, стремясь к нулю с возрастанием числа итераций i.

На рис. 3 показан характер изменения относительной величины шага (10) при двух значениях: $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$, где $\alpha_1 = 1{,}5$, $\alpha_2 = 3$ и $k_0 = 0{,}8$. При $k_0 = 1/0{,}8$ характер графиков β_i не изменится.

Процедура компенсации. При решении задачи коррекции возникают принципиальные затруднения в случаях, когда число неизвестных m множества x больше числа уравнений системы n. Такая система не имеет

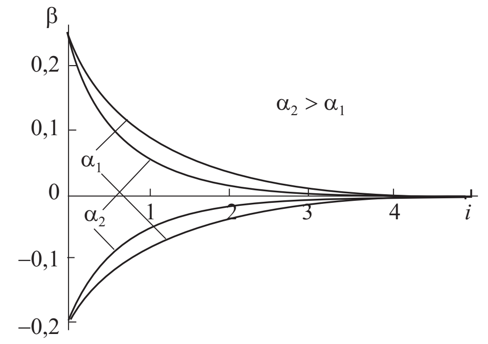

Рис. 3

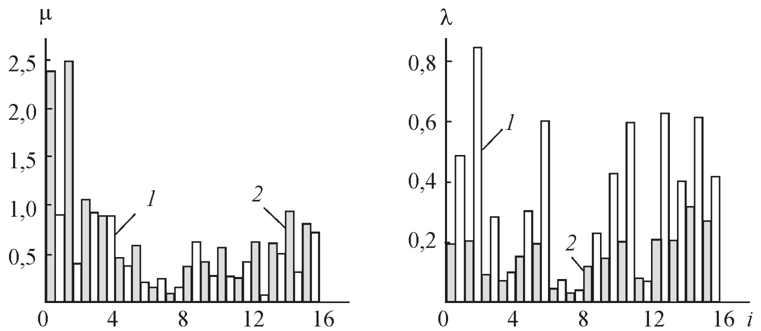

Рис. 4

единственного решения. В качестве примера получения приближенного решения рассмотрим предельный случай $m=2(n-1)$, когда подлежат коррекции интенсивности всех потоков $x=\{\lambda_2,...,\lambda_n,\mu_2,...,\mu_n\}$, заданы требуемые вероятности состояний системы (3), начальные значения корректируемых потоков $\lambda=\{\lambda_2,...,\lambda_n\}$, $\mu=\{\mu_2,...,\mu_n\}$ и допустимое стандартное отклонение погрешности $\varepsilon=10^{-4}$. Выберем начальные значения $k_0=0{,}8$ и μ (4) и зададим случайные значения λ:

$$\lambda=\begin{Bmatrix}0{,}485; & 0{,}791; & 0{,}282; & 0{,}0937; & 0{,}304; & 0{,}601; & 0{,}0768; & 0{,}0333; \\ 0{,}232; & 0{,}429; & 0{,}592; & 0{,}0692; & 0{,}627; & 0{,}398; & 0{,}611; & 0{,}418\end{Bmatrix}.$$

На рис. 4 начальные значения потоков μ и λ обозначены цифрой *1*, а результат выполнения Maple-процедуры Recurrent_Hqs.mws — цифрой *2*. Гистограмма распределения вероятностей состояний совпадает с представленной на рис. 2 с погрешностью, график которой представлен на рис. 5.

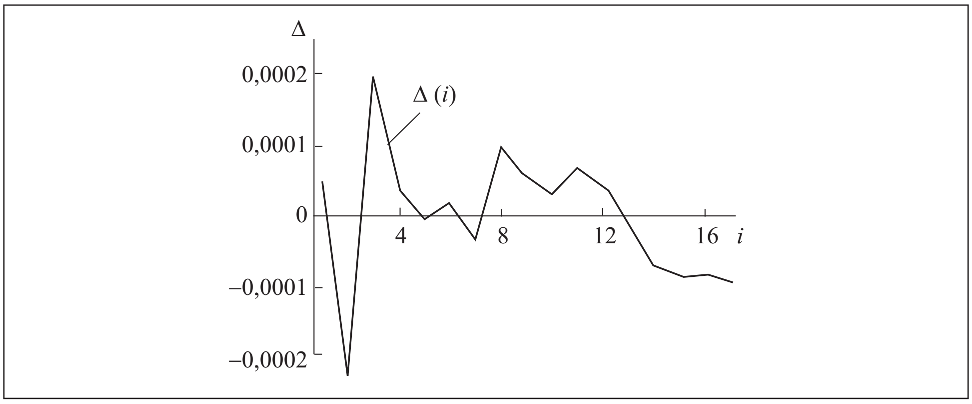

Рис. 5

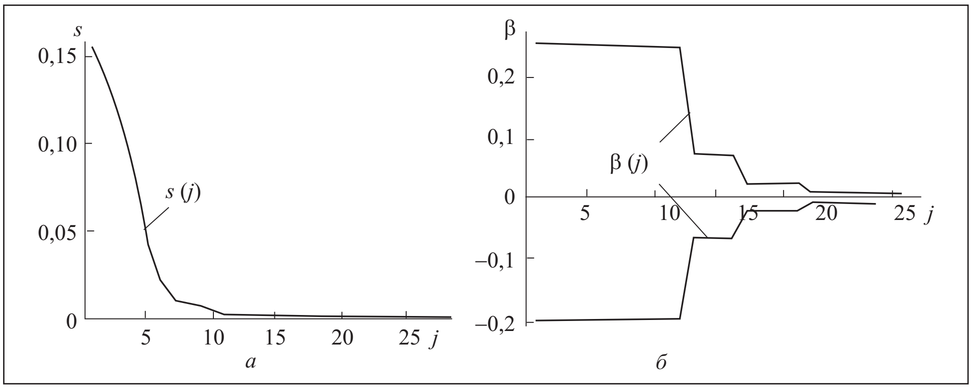

Рис. 6

На рис. 6, *а*, приведен график изменения стандартного отклонения s, а на рис. 6, *б*, — график относительного изменения шага (10) для k_i (ниже оси абсцисс) и k_i^{-1} (выше оси абсцисс) при $k_0 = 0{,}8$. В полученном решении с заданным стандартным отклонением $\varepsilon = 10^{-4}$ стандартное отклонение погрешности Δ_i $(i = 1, \ldots, n)$ составило $s_j = 0{,}9 \cdot 10^{-4}$ при $j = 29$, $k_j = 0{,}9926$, и $\beta_j = \pm 0{,}0074$.

Замечания. Для несовместной системы уравнений (когда хотя бы для одного состояния СМО заданы все входящие и исходящие потоки), используя адаптацию с помощью процедуры компенсации интенсивностей потоков множества x, можно получить распределение искомых интенсивностей потоков, обеспечивающее максимально возможное приближение к желаемому распределению вероятностей состояний СМО. Поскольку выполнение условия $s_j < \varepsilon$ при решении несовместной системы уравнений в большинстве случаев недостижимо, необходимо ввести дополнительные ограничения, задав, например, минимальное значение относительного шага β_i, либо предельное значение множителя k_i (k_i^{-1}).

В качестве критерия адаптации при необходимости может быть применено стандартное отклонение либо дисперсия относительной погрешности Δ_i / P_i $(i = 1, ..., n)$.

Выводы

Предложенная процедура компенсации позволяет получить приближенное решение совместной системы уравнений с допустимой погрешностью при произвольном соотношении числа уравнений и числа неизвестных. Применение стандартного отклонения (дисперсии) погрешности в качестве критерия выбора шага позволило обеспечить эффективность процедуры компенсации. Представляется возможным получение решения несовместной системы, позволяющего найти значения интенсивностей потоков, обеспечивающих максимально возможное приближение к заданным требованиям качества СМО. Ввиду общности подхода получения приближенного решения рассмотренная процедура применима для коррекции СМО произвольной структуры.

The method for solution of the problem of correcting the intensities of flows providing the preset features of queueing system has been stated. The authors demonstrate a possibility to solve the inverse queueing problem for the linear system of equations by direct and compensation methods.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Герчикова И.Н.* Менеджмент. 3-е изд., перераб. и доп. — М. : ЮНИТИ, 2001. — 501 с.
2. *Мескон М.Х., Альберт М., Хедоури Ф.* Основы менеджмента: Пер. с англ. — М. : Дело, 2000. — 704 с.
3. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения.Учеб. пособие для втузов. 2-е изд., стер. — М. : Высш. школа, 2000. — 383с.
4. *Долгин Д.И., Бармина М.В., Долгин В.П.* Метод коррекции децентрализованной системы массового обслуживания / Мат. междунар. науч.-техн. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых «Прогрессивные направления развития машино-приборостроения, транспорта и экологии», 20—23 мая 2013 г. — Севастополь : Изд-во СевНТУ, 2013. — С. 16—17.
5. *Ильин В.А., Ким Г.Д.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. — М. : ТК Велби, изд-во Проспект, 2007. — 400 с.

Поступила 02.09.13

ДОЛГИН Владимир Прохорович, канд. техн. наук, доцент кафедры автомобильного транспорта Севастопольского национального технического университета. В 1958 г. окончил Военно-морское инженерное училище им. Ф.Э. Дзержинского (Ленинград), в 1965 г. — Севастопольский приборостроительный институт. Область научных исследований — адаптивные модели в системах управления техническими и технологическими объектами.

БАРМИНА Мария Владимировна, менеджер группы контроля счетов ЗАО КБ «СИТИБАНК». В 2009 г. окончила Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина. Область научных исследований — менеджмент централизованного контроля.

ДОЛГИН Дмитрий Игоревич, менеджер группы электронной коммерции ЗАО КБ «СИТИБАНК». В 2011 г. окончил Московский институт экономики, политики и права. Область научных исследований — статистический анализ эффективности структур обслуживания.