УДК 620.9.603.13:681.51

С.Е. Саух, д-р техн. наук
Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел. 4249164, e-mail: ssaukh@gmail.com)

Методы компьютерного моделирования конкурентного равновесия на рынках электроэнергии

Предложено математическое описание равновесных состояний рынков электроэнергии в матрично-векторной форме записи системы комплементарных соотношений и алгебраических уравнений. Для преобразованной с помощью функций Фишера—Бурмейстра системы полугладких алгебраических уравнений получены формулы блочных элементов матрицы Якоби и обобщенного якобиана Кларка, которые позволяют применять современные алгоритмы численного решения таких систем в задачах компьютерного моделирования равновесных состояний энергорынков.

Запропоновано математичний опис рівноважних станів ринків електроенергії в матрично-векторній формі запису системи комплементарних співвідношень та алгебраїчних рівнянь. Для перетвореної за допомогою функцій Фішера—Бурмейстра системи напівгладких алгебраїчних рівнянь отримано формули блочних елементів матриці Якобі та узагальненого якобіана Кларка, які дозволяють застосовувати сучасні алгоритми чисельного розв'язку таких систем в задачах комп'ютерного моделювання рівноважних станів енергоринків.

Ключевые слова: равновесие энергорынка, негладкие системы уравнений, матрично-векторные формы, матрица Якоби, обобщенный якобиан Кларка.

Задачи исследования энергорынка обусловливают необходимость определения его равновесного состояния. При этом цены на электрическую энергию в энергоузлах, объемы производства, передачи и потребления электроэнергии устанавливаются на уровне, при котором результаты деятельности каждого из участников рынка в наибольшей степени близки к достижению их целей.

Для определения равновесного состояния энергорынка обычно рассматривают совокупность математических моделей поведения генерирующих компаний, компании-оператора сети, арбитражных торговцев и конечных потребителей [1—8]. Такую совокупность моделей представляют в виде единой системы связанных между собой задач оптимизации:

$$\bigcup_{j\in J}\left\{\begin{matrix}\max \vartheta_j(x_j)\\ x_j\in\mu_j(x\setminus x_j)\end{matrix}\right\},\ x=\bigcup_{j\in J}x_j, \tag{1}$$

© С.Е. Саух, 2013

где индекс $j \in J$ указывает на принадлежность функции цели ϑ_j и системы ограничений μ_j математическому описанию поведения j-го агента рынка, составленного относительно части независимых переменных x_j. При этом остальные переменные, а именно $x \setminus x_j$, являются внешними переменными каждого такого описания. Задача поиска равновесного состояния энергорынка заключается в нахождении такого вектора неизвестных переменных $x = \bigcup_{j \in J} x_j$, отдельные составляющие которого x_j являются решениями соответствующих задач оптимизации в (1).

Задача (1) имеет тождественное отображение в классе задач о квазивариационных неравенствах. В [8] доказано, что в случае выпуклости функций ϑ_j решение такой задачи совпадает с решением соответствующей смешанной задачи комплементарности. Поскольку математические формулировки таких задач имеют сложную структуру комплементарных соотношений и уравнений, а применение численных методов решения требует представления задач в каноничных формах, актуальным является применение методов компьютерного моделирования равновесия на энергорынках.

Рассмотрим математическую модель равновесия на рынке для следующих множеств:

энергоузлов $I = \{i\}$ в количестве $I_N = |I|$, где осуществляется производство, потребление и распределение электроэнергии;

межузловых интерфейсов $K = \{k\}$ в количестве $K_L = |K|$, которые в агрегированном виде представляют имеющиеся высоковольтные линии электропередачи;

компаний-производителей электроэнергии $F = \{f\}$ в количестве $F_C = |F|$;

генерирующих блоков $H(f, i) = \{h_{fi}\}$, принадлежащих компании $f \in F$ в узле $i \in I$ (в дальнейшем для элементов таких множеств используется также упрощенное обозначение h).

Очевидно, общее количество генерирующих мощностей в такой электроэнергетической системе будет определяться величиной

$$H_G = \sum_{f \in F, i \in I} |H(f, i)|.$$

Деятельность генерирующей компании f направлена на достижение максимальной прибыли, т.е.

$$\sum_{i \in I} \left[(1 - B_{fi}) p_i^* + B_{fi} P_i \left(a_i^* + \sum_{f \in F} s_{fi} \right) - w_i^* \right] s_{fi} +$$

$$+\sum_{i\in I}\sum_{h\in H(f,\,i)}[p_r^* r_h - C_h(g_h) + w_i^* g_h] \xrightarrow[\{s_{fi}, r_h, g_h\}\, h\in H(f,\,i),\, i\in I]{} \max, \qquad (2)$$

где p_i^* — рыночная цена электроэнергии при продаже потребителям в узле i, грн/МВт·ч; $P_i = P_i\left(a_i^* + \sum_{f\in F} s_{fi}\right)$ — обратная функция спроса на электроэнергию в узле i (обычно используется в виде линейной функции $P_i = = \alpha_i - \beta_i\left(a_i^* + \sum_{f\in F} s_{fi}\right)$ с коэффициентами $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$), грн/МВт·ч; $-w_i^*$ — удельные расходы компании f в интересах оператора сети на передачу электроэнергии, принадлежащей этой компании, с хаба в узел i, грн/МВт·ч; $+w_i^*$ — удельные расходы оператора сети в интересах компании f на передачу в хаб электроэнергии, произведенной в узле i генераторами $h\in H(f,i)$ этой компании, грн/МВт·ч; g_h — объем производства электроэнергии на генераторе h, МВт·ч; p_r^* — цена резервирования мощностей в энергосистеме, грн/МВт·ч; r_h — объем резервирования мощности на генераторе h, МВт·ч; s_{fi} — объем продажи электроэнергии компанией f в узле i, МВт·ч; a_i^* — объем продажи электроэнергии арбитражным торговцем в узле i, МВт·ч; $C_h(g_h)$ — себестоимость производства электроэнергии в объеме g_h на генераторе h (функция C_h является выпуклой, т.е. $\partial C_h/\partial g_h \ge 0$), грн/МВт·ч; B_{fi} — индекс, значение которого устанавливается в зависимости от типа поведения компании f на рынке, значение $B_{fi} = 0$ соответствует конкурирующему поведению по Бертрану, а значение $B_{fi} = 1$ — стратегически осмысленному поведению по Курно.

Выражение для прибыли в виде линейного функционала (2) применяется в случае, когда на энергорынке отсутствуют предложения электроэнергии, отпускаемой компаниями по установленным тарифам [1—4, 8]. При наличии на энергорынке таких предложений выражение для прибыли, получаемой компанией f от нетарифицированной части производства, представляется в виде нелинейного функционала [5—7]:

$$\sum_{i\in I}\left[(1-B_{fi})\frac{p_i^* - \bar{\kappa}\,\bar{p}}{1-\bar{\kappa}} + B_{fi}\frac{P_i\left(a_i^* + \sum_{f\in F} s_{fi} + \sum_{f\in F}\bar{s}_{fi}\right) - \bar{\kappa}\,\bar{p}}{1-\bar{\kappa}} - w_i^*\right]s_{fi} +$$

$$+\sum_{i \in I} \sum_{h \in H(f,\, i)} [p_r^* r_h - C_h(g_h) + w_i^* g_h] \xrightarrow[\{s_{fi}, r_h, g_h\}\, h \in H(f,\, i),\, i \in I]{} \max. \qquad (3)$$

Здесь $\overline{\kappa}$ — часть тарифицированной электроэнергии в общем объеме ее отпуска всеми генерирующими компаниями; $\overline{p}$ — средневзвешеный по объемам тариф на всю отпущенную по различным тарифам электроэнергию, грн/МВт·ч; $\overline{s}_{fi}$ — объем продажи арбитражным торговцем в узле i тарифицированной электроэнергии компании-производителя f, МВт·ч. Параметры $\overline{\kappa}$ и $\overline{p}$ определяются уравнениями

$$\overline{\kappa}\left(\sum_{f \in F} \sum_{i \in I} \sum_{h \in H(f,\, i)} g_h + \sum_{f \in F} \sum_{i \in I} \sum_{h \in \Pi(f,\, i)} \overline{g}_h \right) = \sum_{f \in F} \sum_{i \in I} \sum_{h \in \Pi(f,\, i)} \overline{g}_h, \qquad (4)$$

$$\overline{p} \sum_{f \in F} \sum_{i \in I} \sum_{h \in \Pi(f,\, i)} \overline{g}_h = \sum_{f \in F} \sum_{i \in I} \sum_{h \in \Pi(f,\, i)} \overline{p}_h \overline{g}_h, \qquad (5)$$

где $\Pi(f,\, i) = \{h_{fi}\}$ — множество генерирующих блоков, принадлежащих компании $f \in F$ в узле $i \in I$, электроэнергия от которых отпускается объемами $\overline{g}_h$ по установленным тарифам $\overline{p}_h$. Общее число таких генерирующих блоков в электроэнергетической системе

$$\Pi_G = \sum_{f \in F,\, i \in I} |\Pi(f,\, i)|.$$

Деятельность генерирующей компании f осуществляется в условиях следующих ограничений:

сверху и снизу на сумму объемов производства электроэнергии g_h и резервирования мощности r_h на генерирующем блоке $h \in H(f, i)$:

$$g_h + r_h \le G_h^U,\; g_h + r_h \ge G_h^L, \qquad (6)$$

где граничные объемы G_h^U и G_h^L нагружения блока удовлетворяют неравенствам $G_h^U > G_h^L = C_h^G G_h^U \ge 0$ при $0 \le C_h^G < 1$;

сверху на объемы резервирования мощности r_h на генерирующем блоке $h \in H(f,\, i)$:

$$r_h \le C_h^R g_h, \qquad (7)$$

где граничный объем горячего резерва мощности определяется коэффициентом резервирования $C_h^R \ge 0$;

балансов объемов продажи и производства тарифицированной и нетарифицированной электроэнергии:

 ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2013. V. 35. № 5

$$\sum_{i\in I}\bar{s}_{fi}=\sum_{i\in I}\sum_{h\in\Pi(f,i)}\bar{g}_h,\ \sum_{i\in I}s_{fi}=\sum_{i\in I}\sum_{h\in H(f,i)}g_h. \qquad (8)$$

В работах [5—7] данный перечень дополнен следующими ограничениями:

снизу на общий объем горячего резервирования мощностей в энергосистеме:

$$\sum_{f\in F}\sum_{i\in I}\sum_{h\in H(f,i)}r_h\ge C^{RH}\sum_{f\in F}\sum_{i\in I}(s_{fi}+\bar{s}_{fi}); \qquad (9)$$

сверху на суммарную мощность производства электроэнергии группой генерирующих блоков тепловых электростанций, работа которых не может быть приостановлена через непродолжительные промежутки времени, а именно ежесуточно на ночь, когда объемы потребления нетарифицированной электроэнергии уменьшаются до минимального уровня G^N:

$$\sum_{f\in F}\sum_{i\in I}\sum_{h\in H(f,i)}\{C_h^N g_h+(1-C_h^N)C_h^G G_h^U\}\le G^N, \qquad (10)$$

где значение коэффициента $C_h^N\in\{0,1\}$ определяет принадлежность или непринадлежность генерующего блока h указанной группе.

Деятельность оператора сети направлена на достижение максимальной прибыли:

$$\sum_{i\in I}w_i^* y_i\xrightarrow[y_i]{}\max, \qquad (11)$$

где w_i^* — удельные расходы на передачу электроэнергии из узла-хаба в узел i, грн/МВт·ч; y_i — объем электроэнергии, передаваемой оператором сети из узла-хаба в узел i, МВт·ч. Деятельность оператора сети осуществляется в условиях ограничений на объемы передачи электроэнергии по высоковольтным линиям, т.е.

$$\left|\sum_{i\in I}\Omega_{ki}y_i\right|\le Y_k^U,\ k\in K. \qquad (12)$$

Здесь Ω — $(K_L\times I_N)$-матрица чувствительности изменений объемов передачи электроэнергии по линиям $k\in K$ к изменениям инъективных объемов электроэнергии, которые генерируются и потребляются в узлах сети $i\in I$ (матрица Ω формируется методом потока нагрузок [9], основанным на законах Ома и Кирхгофа); Y_k^U — максимально допустимый объем электроэнергии, передаваемой по линии $k\in K$, МВт·ч.

В матрично-векторной форме соотношение между вектором **Y** объемов электроэнергии, передаваемых по линиям, и вектором **y** инъективных объемов электроэнергии,

$$y_i = a_i + \sum_{f \in F} \left(s_{fi} + \bar{s}_{fi} - \sum_{h \in H(f,\, i)} g_h - \sum_{h \in \Pi(f,\, i)} \bar{g}_h \right),$$

определяемых разницей между объемами ее генерации и потребления в узлах сети, имеет вид

$$\mathbf{Y} = \Omega\, \mathbf{y}, \tag{13}$$

где

$$\Omega = \Psi A (A^T \Psi A)^{-1}. \tag{14}$$

Матрица A размерности $(K_L \times (I_N - 1))$ образуется из $(K_L \times I_N)$-матрицы инцидентности сети удалением произвольного столбца, связанного с узлом-хабом; ненулевые элементы диагональной $(K_L \times K_L)$-матрицы $\Psi = \mathrm{diag}\left[\dfrac{X_k}{X_k^2 + R_k^2} \right]$ определяются по значениям активного R_k и реактивного X_k сопротивлений линий при $R_k << X_k$.

Деятельность арбитражного торговца на энергорынке направлена на достижение максимальной прибыли,

$$\sum_{i \in I} (p_i^* - w_i^*)\, a_i \xrightarrow[a_i]{} \max, \tag{15}$$

при условиии соблюдения баланса объемов купли-продажи электроэнергии и обязательности выкупа им всего объема электроэнергии, отпускаемой с генерирующих блоков по установленным тарифам, т.е.

$$\sum_{i \in I} a_i - \sum_{f \in F} \sum_{i \in I} \bar{s}_{fi} = 0, \tag{16}$$

где p_i^* — цена электроэнергии в узле i, грн/МВт·ч; w_i^* — удельные расходы на передачу электроэнергии объемом a_i с узла-хаба в узел i, грн/МВт·ч. Величина a_i может быть как положительной, так и отрицательной.

Деятельность потребителя электроэнергии направлена на достижение максимального собственного благосостояния, т.е.

$$[\xi_i(S_i) - p_i^* S_i] \xrightarrow[S_i]{} \max, \tag{17}$$

где ценность употребленной электроэнергии,

$$\xi_i(S_i) = P_i \left(a_i^* + \sum_{f \in F} s_{fi} + \sum_{f \in F} \bar{s}_{fi} \right) S_i, \tag{18}$$

и затраты потребителя $p_i^* S_i$ обусловливают потребление электроэнергии в узле i объемом

$$S_i = a_i^* + \sum_{f \in F} s_{fi} + \sum_{f \in F} \overline{s}_{fi}. \tag{19}$$

Согласование переменных моделей агентов энергорынка осуществляется по ценам в энергоузлах,

$$p_i^* = P_i\left(a_i^* + \sum_{f \in F} s_{fi} + \sum_{f \in F} \overline{s}_{fi}\right) = \alpha_i - \beta_i\left(a_i^* + \sum_{f \in F} s_{fi} + \sum_{f \in F} \overline{s}_{fi}\right), \tag{20}$$

и объемам купли-продажи электроэнергии арбитражным торговцем,

$$a_i^* = a_i, \quad i \in I. \tag{21}$$

Векторно-матричная форма смешанной задачи комплементарности является базовой задачей компьютерного моделирования равновесия на энергорынке. Поскольку обратные функции спроса P_i — линейные, а функции себестоимости производства электроэнергии $C_h(g_h)$ — выпуклые, часто представляемые в виде линейных зависимостей

$$C_h(g_h) = C_h^M g_h, \tag{22}$$

функциональные выражения (3), (11), (15), (17) оказываются всегда выпуклыми. Следовательно, многокритериальную задачу (3)—(22) поиска равновесного состояния рынка электроэнергии с помощью метода Каруша—Куна—Таккера можно тождественно представить в виде системы соответствующих комплементарных соотношений и алгебраических уравнений [1—8] в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{0} \le \mathbf{s} \perp (1-\overline{\kappa})^{-1}(E_{FI,I}\,\mathbf{p}^* - \overline{\kappa}\,\overline{p}\,\mathbf{1}_{FI} - E_{B\beta}\mathbf{s}) - \\ - E_{FI,I}\,\mathbf{w}^* - E_{FI,F}\boldsymbol{\theta} - p_r^* C^{RH}\,\mathbf{1}_{FI} \le \mathbf{0}, \tag{23}$$

$$\mathbf{0} \le \mathbf{g} \perp -\mathbf{C}^M + E_{H,I}\,\mathbf{w}^* - \mathbf{g}^U + \mathbf{g}^L + C^R\mathbf{v} - \eta\mathbf{C}^N + E_{H,F}\boldsymbol{\theta} \le \mathbf{0}, \tag{24}$$

$$\mathbf{0} \le \mathbf{r} \perp p_r^*\,\mathbf{1}_H - \mathbf{v} - \mathbf{g}^U \le \mathbf{0}, \tag{25}$$

$$\overline{\kappa}(\mathbf{1}_H^T\,\mathbf{g} + \mathbf{1}_\Pi^T\,\overline{\mathbf{g}}) - \mathbf{1}_\Pi^T\,\overline{\mathbf{g}} = 0, \tag{26}$$

$$\overline{p}\,\mathbf{1}_\Pi^T\,\overline{\mathbf{g}} - \langle \overline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{g}} \rangle = 0, \tag{27}$$

$$\mathbf{0} \le \mathbf{g}^U \perp \mathbf{g} + \mathbf{r} - \mathbf{G}^U \le \mathbf{0}, \tag{28}$$

$$\mathbf{0} \le \mathbf{g}^L \perp C^G\mathbf{G}^U - \mathbf{g} \le \mathbf{0}, \tag{29}$$

$$\mathbf{0} \le \mathbf{v} \perp \mathbf{r} - C^R \mathbf{g} \le \mathbf{0}, \tag{30}$$

$$E^T_{FI,F}\mathbf{s} - E^T_{H,F}\mathbf{g} = \mathbf{0}, \tag{31}$$

$$E^T_{FI,F}\bar{\mathbf{s}} - E^T_{\Pi,F}\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{0}, \tag{32}$$

$$0 \le p^*_r \perp C^{RH}\mathbf{1}^T_{FI}(\mathbf{s}+\bar{\mathbf{s}}) - \mathbf{1}^T_H \mathbf{r} \le 0, \tag{33}$$

$$0 \le \eta \perp (\mathbf{C}^N)^T \mathbf{g} + (\mathbf{1}_H - \mathbf{C}^N)^T C^G \mathbf{G}^U - G^N \le 0, \tag{34}$$

$$\mathbf{0} \le \boldsymbol{\lambda}^+ \perp \Omega\,\mathbf{y} - \mathbf{Y}^U \le \mathbf{0}, \tag{35}$$

$$\mathbf{0} \le \boldsymbol{\lambda}^- \perp -\Omega\,\mathbf{y} - \mathbf{Y}^U \le \mathbf{0}, \tag{36}$$

$$\mathbf{w}^* + \Omega^T(\lambda^- - \lambda^+) = \mathbf{0}, \tag{37}$$

$$\mathbf{p}^* - \mathbf{w}^* - p_a \mathbf{1}_I = \mathbf{0}, \tag{38}$$

$$\mathbf{1}^T_I \mathbf{a} - \mathbf{1}^T_I \bar{\mathbf{s}} = 0, \tag{39}$$

$$\mathbf{p}^* - \boldsymbol{\alpha} + E_\beta(\mathbf{a} + E^T_{FI,I}\mathbf{s} + E^T_{FI,I}\bar{\mathbf{s}}) = \mathbf{0}, \tag{40}$$

$$\mathbf{y} - \mathbf{a} - E^T_{FI,I}(\mathbf{s}+\bar{\mathbf{s}}) + E^T_{H,I}\mathbf{g} + E^T_{\Pi,I}\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{0}. \tag{41}$$

В соотношениях (23)—(41) скалярные переменные p^*_r и p_a соответствуют ценам горячего резервирования мощностей в энергосистеме и услуг арбитражного торговца, а скалярная переменная η и векторные переменные $\mathbf{g}^U, \mathbf{g}^L, \mathbf{v}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-$ являются искусственными. Единичные векторы $\mathbf{1}_H, \mathbf{1}_I, \mathbf{1}_{FI}$ и $\mathbf{1}_\Pi$ имеют размерности соответственно $H_G, I_N, F_C I_N$ и Π_G. Векторы $\mathbf{C}^M, \mathbf{G}^U, \mathbf{g}, \mathbf{g}^U, \mathbf{g}^L, \mathbf{r}, \mathbf{v}$ и $\mathbf{C}^N$ размерностью H_G образованы из элементов множеств соответственно $\{C^M_h\}, \{G^U_h\}, \{g_h\}, \{g^U_h\}, \{g^L_h\}, \{r_h\}, \{v_h\}$ и $\{C^N_h\}$. Поскольку $h = h_{fi}$, упорядочение элементов в соответствующих векторах выполняется по трем индексам (f, i, h) в порядке возрастания их значений так, что для каждого значения индекса $f \in \overline{1, F_C}$ индекс i последовательно принимает значения $i = \overline{1, I_N}$, а для любой пары значений индексов (f, i) индекс h_{fi} — значения $h_{fi} = \overline{1, |H(f,i)|}$.

Очевидно, такой последовательности значений индексов h_{fi} соответствует последовательность значений индексов (f, i, h_{fi}) или (f, i, h). Например, для энергосистемы с тремя узлами в случае присутствия на энергорынке двух генерирующих компаний, первая из которых владеет двумя генерирующими мощностями в первом узле и одной генерирующей мощностью во втором узле, а вторая — одной мощностью в первом узле и двумя мощностями в третьем узле, $H_G = 6$ и справедливо следующее упорядочение индексов:

$$\begin{array}{c|c|c} f & i & h_{fi} \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}.$$

В (27) через $\langle \overline{\mathbf{p}}, \overline{\mathbf{g}} \rangle$ обозначено скалярное произведение векторов $\overline{\mathbf{p}}$ и $\overline{\mathbf{g}}$ размерностью Π_G, элементы которых $\overline{p}_h$ и $\overline{g}_h$, представляющие собой тарифы и объемы генерации электроэнергии на блоках, $h = h_{fi} \in \Pi(f, i)$, упорядочены так, что для каждого значения индекса $f \in \overline{1, F_C}$ индекс i последовательно принимает значения $i = \overline{1, I_N}$, а для любой пары значений (f, i) индекс h_{fi} последовательно принимает значения $h_{fi} = \overline{1, |\Pi(f, i)|}$.

Векторы $\mathbf{w}^*$, $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{y}$, $\boldsymbol{\alpha}$ образованы из элементов множеств $\{w_i^*\}$, $\{p_i^*\}$, $\{a_i\}$, $\{y_i\}$, $\{\alpha_i\}$, упорядоченных в соответствии с возрастанием значений индекса $i = \overline{1, I_N}$. Вектор $\boldsymbol{\theta}$ размерностью F_C образован из элементов множества $\{\theta_f\}$, упорядоченных в соответствии с возрастанием значений индекса $f = \overline{1, F_C}$. Векторы $\mathbf{s}$ и $\overline{\mathbf{s}}$ размерностью $F_C I_N$ образованы из элементов множеств $\{s_{fi}\}$ и $\{\overline{s}_{fi}\}$, упорядоченных в соответствии с возрастанием значений индекса $f = \overline{1, F_C}$ и $i = \overline{1, I_N}$ так, что для каждого значения индекса f индекс i последовательно принимает значения $i = \overline{1, I_N}$. Векторы $\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-$, $\mathbf{Y}^U$, имеющие размерность K_L, образованы из элементов множеств $\{\lambda_k^+\}$, $\{\lambda_k^-\}$, Y_k^U, упорядоченных в соответствии с возрастанием значений индекса $k = \overline{1, K_L}$.

Диагональные матрицы $C^R = \operatorname{diag}(C_{fih}^R)$ и $C^G = \operatorname{diag}(C_{fih}^G)$ размерностью $H_G \times H_G$ сформированы из элементов множеств $\{C_h^R\}$ и $\{C_h^G\}$, упорядоченных по значениям индексов (f, i, h). Диагональная матрица $E_\beta = \operatorname{diag}(\beta_i)$ размерностью $I_N \times I_N$ сформирована из элементов множеств коэффициентов $\{\beta_i\}$, упорядоченных по значениям индексов $i = \overline{1, I_N}$. Матрицы $E_{FI,F}$, $E_{FI,I}$, $E_{H,F}$, $E_{H,I}$, $E_{\Pi,F}$, $E_{\Pi,I}$ размерностью $(F_C I_N) \times F_C$,

$(F_C I_N)\times I_N$, $H_G\times F_C$, $H_G\times I_N$, $\Pi_G\times F_C$, $\Pi_G\times I_N$ имеют элементы соответственно

$$e_{(fi)\bar f}=\begin{cases}1, f=\bar f,\\ 0, f\neq \bar f,\end{cases}\quad e_{(fi)\bar i}=\begin{cases}1, i=\bar i,\\ 0, i\neq \bar i,\end{cases}\quad e_{(fih)\bar f}=\begin{cases}1, f=\bar f,\\ 0, f\neq \bar f,\end{cases}\quad e_{(fih)\bar i}=\begin{cases}1, i=\bar i,\\ 0, i\neq \bar i,\end{cases}$$

где $f=\overline{1,F_C}$, $i=\overline{1,I_N}$, $\bar f=\overline{1,F_C}$, $\bar i=\overline{1,I_N}$, $h=h_{fi}=\overline{1,|H(f,i)|}$ или $h=h_{fi}=\overline{1,|\Pi(f,i)|}$. Диагональная матрица $E_{B\beta}=\mathrm{diag}\,(B_{fi}\beta_i)$ размерностью $(F_C I_N)\times(F_C I_N)$ сформирована из упорядоченных по значениям индексов $f=\overline{1,F_C}$ и $i=\overline{1,I_N}$ элементов множеств $\{B_{fi}\}$ и $\{\beta_i\}$.

Обычно в задачах определения равновесия на энергорынке тарифы $\bar p_h$ и объемы генерации электроэнергии $\bar g_h$, произведенной на блоках $h=h_{fi}\in\Pi(f,i)$, являются заданными величинами, что позволяет определять непосредственно из уравнения (27) средневзвешенный по объемам тариф $\bar p$ на всю отпущенную по различным тарифам электроэнергию. Кроме того, с учетом соотношения (39), в котором учтена обязательность выкупа арбитражным торговцем всех объемов электроэнергии, отпускаемой с генерирующих блоков по установленным тарифам, можно определить объемы продаж $\sum_{f\in F}\bar s_{fi}$ с помощью балансовых уравнений (32). Тогда соотношения (27) и (32) можно исключить из последующего рассмотрения и, без потери общности, рассматривать задачу (23)—(26), (28) — (31), (33)—(41) в виде связанных между собой подсистем комплементарных соотношений

$$\mathbf{0}\le \mathbf{X}_C\perp \mathbf{A}_C(\mathbf{X})\le \mathbf{0}, \tag{42}$$

и алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}_E(\mathbf{X})=\mathbf{0}, \tag{43}$$

где векторы

$$\mathbf{X}_C^T=\left|\eta\quad \mathbf{v}\quad \mathbf{g}\quad \mathbf{s}\quad \boldsymbol{\lambda}^+\quad \boldsymbol{\lambda}^-\quad \mathbf{r}\quad \mathbf{g}^U\quad \mathbf{g}^L\quad p_r^*\quad \bar{\boldsymbol{\kappa}}\right| \tag{44}$$

и

$$\mathbf{X}^T=\left|\mathbf{X}_C^T\;\boldsymbol{\theta}\quad \mathbf{p}^*\quad \mathbf{y}\quad \mathbf{w}^*\quad \mathbf{a}\quad p_a\right| \tag{45}$$

имеют размерность соответственно $n_{CE}=5H_G+F_C I_N+F_C+4I_N+2K_L+4$ и $n_C=5H_G+F_C I_N+2K_L+3$. Следует заметить, что вектор $\mathbf{X}_C$ является подвектором вектора $\mathbf{X}$, а вектор-функции $\mathbf{A}_C(\mathbf{X})$ и $\mathbf{A}_E(\mathbf{X})$ размерностью n_C и $n_E=4I_N+1$ образуют вектор-функцию

$$\mathbf{A}(\mathbf{X})=\left|\mathbf{A}_C(\mathbf{X})\quad \mathbf{A}_E(\mathbf{X})\right|^T \tag{46}$$

той же размерности $n_{CE}=n_C+n_E$, что и вектор неизвестных $\mathbf{X}$.

Для решения смешанной задачи комплементарности (42), (43) воспользуемся функцией C Фишера—Бармейстра [8],

$$\varphi_{FB}(z_1, z_2) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} - z_1 - z_2,\ z_1 \ge 0,\ z_2 \ge 0, \tag{47}$$

и ее особенностями,

$$\max \varphi_{FB}(z_1, z_2) = 0 \Rightarrow z_1 z_2 = 0,\ z_1 \ge 0,\ z_2 \ge 0 \Rightarrow 0 \le z_1 \perp z_2 \ge 0, \tag{48}$$

и преобразуем подсистему комплементарных соотношений (42) в тождественную ей подсистему функциональных виражений вида

$$\varphi_{FB}(\mathbf{X}_C, \mathbf{A}_C(\mathbf{X})) \to \max, \tag{49}$$

или

$$\{\varphi_{FB}(X_n, A_n(\mathbf{X})) \to \max\},\ n = \overline{1, n_C}, \tag{50}$$

где X_n — n-й элемент вектора $\mathbf{X}_C$ или вектора $\mathbf{X}$; $A_n(\mathbf{X})$ — n-й элемент-функция вектор-функции $\mathbf{A}_C(\mathbf{X})$ или вектор-функции $\mathbf{A}(\mathbf{X})$.

С учетом (46) систему уравнений (43) представим в виде

$$\{A_n(\mathbf{X}) = 0\},\ n = \overline{n_C + 1, n_{CE}}, \tag{51}$$

где $A_n(\mathbf{X})$ — n-й элемент-функция вектор-функции $\mathbf{A}(\mathbf{X})$. Принимая во внимание (48), задачу (50), (51) представим в виде негладкой нелинейной системы алгебраических уравнений,

$$\{\varphi_{FB}(X_n, A_n(\mathbf{X})) = 0,\ n = \overline{1, n_C}\},$$

$$\{A_n(\mathbf{X}) = 0,\ n = \overline{n_C + 1, n_{CE}}\}, \tag{52}$$

или в обобщенной форме

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \tag{53}$$

с ограничениями

$$\{X_n \ge 0,\ n = \overline{1, n_C}\}. \tag{54}$$

Для решения системы уравнений (53) при условиях (54) применим негладкий неточный метод Ньютона [10—12], суть которого заключается в том, что на каждом итерационном шаге точка $\mathbf{X}^{m+1}$ ($m + 1$)-го приближения к решению $\mathbf{X}$ определяется соотношением

$$\mathbf{X}^{m+1} = \mathbf{X}^m + d_m \Delta \mathbf{X}^m, \tag{55}$$

где $\mathbf{X}^0$ — точка начального приближения; d_m — коэффициент демпфирования, который определяется по направлению линии поиска $\mathbf{X}^m \to \mathbf{X}^m + \Delta\mathbf{X}^m$ с соблюдением правила Армиджо; $\Delta\mathbf{X}^m$ — решение линейной системы уравнений

$$J_m \Delta\mathbf{X}^m = -\mathbf{\Phi}(\mathbf{X}^m) + \boldsymbol{\varepsilon}^m, \tag{56}$$

в которой обобщенный якобиан Кларка $J_m \in \partial_B \mathbf{\Phi}(\mathbf{X}^m)$ является субдифференциалом Булигана, а вектор $\boldsymbol{\varepsilon}^m$ имеет размерность n_{CE}, удовлетворяет условию $\left\|\boldsymbol{\varepsilon}^m\right\| \le \gamma_m \left\|\mathbf{\Phi}(\mathbf{X}^m)\right\|$ с параметром $\gamma_m \le \bar{\gamma} < 1$ и учитывает силу влияния остатков $\left\|\mathbf{\Phi}(\mathbf{X}^m)\right\|$ системы уравнений (53) на систему (56).

Поясним используемые термины. Пусть $\mathbf{\Phi}: \mathbb{R}^{n_X} \to \mathbb{R}^{n_\Phi}$ является локально-липшицевой функцией в окрестности данной точки $\mathbf{X} \in \Omega_f$, где Ω_f — множество точек, в которых функция $\mathbf{\Phi}$ не может быть продифференцирована. Субдифференциалом от $\mathbf{\Phi}$ по $\mathbf{X}$ является

$$\partial_B \mathbf{\Phi}(\mathbf{X}) = \{Z \in \mathbb{R}^{n_\Phi \times n_X} \text{ для } \exists\{\mathbf{X}^i\} \notin \Omega_f \text{ с } \lim_{\mathbf{X}^i \to \mathbf{X}} \nabla\mathbf{\Phi}(\mathbf{X}^i)^T = Z\}, \tag{57}$$

где $\nabla\mathbf{\Phi}(\mathbf{X}^i)^T$ — матрица Якоби от $\mathbf{\Phi}$ в $\mathbf{X}^i$. В выпуклом анализе $\partial_B \mathbf{\Phi}(\mathbf{X})$ называют также обобщенным якобианом Кларка.

При $d^m = 1$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^m = \mathbf{0}$ соотношение (55) и система уравнений (56) соответствуют классическому методу Ньютона, который применяется в случае выпуклости и гладкости нелинейных функций решаемой системы и гарантирует локальную сходимость ее итерационных решений. Негладкий неточный метод Ньютона применяется в случае выпуклости и полугладкости функций системы и гарантирует глобальную сходимость ее итерационных решений. В таком методе осуществляется контроль за нормой разницы между произведением матрицы Якоби на вектор-поправку и текущим значением вектора правой части нелинейной системы уравнений для того, чтобы такая норма была меньше некоторого заранее заданного числа. Это число обычно выбирается исходя из текущего значения нормы правой части нелинейного уравнения. На первых итерационных шагах оно может быть достаточно большим, что позволяет получить решение очень быстро, а на следующих шагах это же число автоматически уменьшается. Оно может также оставаться неизменным, что несущественно влияет на скорость сходимости итерационных решений к точному.

С учетом соотношений (46), (52) и (55), безотносительно к номеру итерационного шага m, систему уравнений (51) представим в линеаризированной форме:

$$\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\partial}{\partial X_n}\varphi_{FB}(X_n, A_n(\mathbf{X}))\,\Delta X_n + \dfrac{\partial}{\partial A_n}\varphi_{FB}(X_n, A_n(\mathbf{X}))\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{X}}A_n(\mathbf{X})\,\Delta\mathbf{X} = \\ = -\varphi_{FB}(X_n, A_n(\mathbf{X})),\quad n=\overline{1, n_C}\end{array}\right\},$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial A_n}A_n(\mathbf{X})\,\Delta\mathbf{X} = -A_n(\mathbf{X}),\quad n=\overline{n_C+1, n_{CE}}\right\}. \tag{58}$$

Здесь элементы обобщенного якобиана Кларка определяются соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial X_n}\varphi_{FB}(X_n, A_n(\mathbf{X})) =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll}\dfrac{X_n}{\sqrt{X_n^2 + A_n^2(\mathbf{X})}} - 1, & \text{если } (X_n, A_n(\mathbf{X})) \neq 0, \\ -1, & \text{если } (X_n, A_n(\mathbf{X})) = 0,\end{array}\right\},\quad n=\overline{1, n_C},$$

$$\frac{\partial}{\partial A_n}\varphi_{FB}(X_n, A_n(\mathbf{X})) = \tag{59}$$

$$= \left\{\begin{array}{ll}\dfrac{A_n}{\sqrt{X_n^2 + A_n^2(\mathbf{X})}} - 1, & \text{если } (X_n, A_n(\mathbf{X})) \neq 0, \\ -1, & \text{если } (X_n, A_n(\mathbf{X})) = 0,\end{array}\right\},\quad n=\overline{1, n_C},$$

а матрица Якоби $\partial\mathbf{A}/\partial\mathbf{X}$ размерностью $n_C \times n_C$ имеет блочный вид и ее элементы представлены в виде таблицы, где Е и $E_{I,I}$ — единичные диагональные матрицы размерностью $H_G \times H_G$ и $I_N \times I_N$. Для удобства записи некоторых блочных элементов использованы функции $\boldsymbol{\psi}_1 = \kappa^2(\mathrm{E}_{FI,I}\,\mathbf{p}^* - -p\mathbf{1}_{FI} - \mathrm{E}_{B,\beta}\mathbf{s})$, $\boldsymbol{\psi}_2 = \mathbf{1}_H^T\mathbf{g} + \mathbf{1}_\Pi^T\overline{\mathbf{g}}$; $\kappa = (1-\overline{\kappa})^{-1}$.

Решение полугладкой системы алгебраических уравнений, с определенными для нее формализированными выражениями элементов матрицы Якоби и обобщенного якобиана Кларка, осуществляется с помощью следующего эффективного алгоритма негладкого неточного метода Ньютона [12]:

1. Устанавливаем начальное приближение $\mathbf{X}^0$ и выбираем значения параметров $\rho > 0$, $\beta \in (0,1)$, $\sigma \in (0,1)$, $q > 2$, $\gamma_0 \geq 0$, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$.

2. Контролируем критерий остановки.

2.1. Номер итерации достиг величины $m_{\max}$.

2.2. $\left\| \mathbf{\Phi}(\mathbf{X}^m) \right\| < \tau_1$.

2.3. $\left| \left\| \mathbf{\Phi}(\mathbf{X}^m) \right\| - \left\| \mathbf{\Phi}(\mathbf{X}^{m-1}) \right\| \right| < \tau_2$.

Матрица Якоби $\partial A / \partial X$ для системы уравнений (58)

		$(\mathbf{C}^N)^T$														
		$-C^R$				E										
$-\mathbf{C}^N$	C^R						–E	E			$E_{H,F}$			$E_{H,I}$		
			$-\kappa E_{B\beta}$						$-C^{RH}\,\mathbf{1}_{FI}$	$\boldsymbol{\psi}_1$	$-E_{FI,F}$	$\kappa E_{FI,I}$		$-E_{FI,I}$		
													$\boldsymbol{\Omega}$			
													$-\boldsymbol{\Omega}$			
	–E						–E		$\mathbf{1}_H$							
		E				E										
		–E														
			$C^{RH}\,\mathbf{1}_{FI}^T$			$-\mathbf{1}_H^T$										
		$\bar{\kappa}\mathbf{1}_H^T$								$\boldsymbol{\psi}_2$						
		$-E_{H,F}^T$	$E_{FI,F}^T$													
			$E_\beta E_{FI,I}^T$									$E_{I,I}$			E_β	
		$E_{H,I}^T$	$-E_{FI,I}^T$										$E_{I,I}$		$-E_{I,I}$	
				$-\boldsymbol{\Omega}^T$	$\boldsymbol{\Omega}^T$									$E_{I,I}$		$-\mathbf{1}_I$
												$E_{I,I}$		$-E_{I,I}$		
															$\mathbf{1}_I^T$	

3. Выбираем элемент $J_m \in \partial_B \mathbf{\Phi}(\mathbf{X}^m)$ и вычисляем направление $\Delta\, \mathbf{X}^m$, а именно находим решение $\Delta\, \mathbf{X}^m$ системы уравнений $J_m \Delta \mathbf{X}^m = -\mathbf{\Phi}(\mathbf{X}^m) + \boldsymbol{\varepsilon}^m$ такое, что $\left\| \boldsymbol{\varepsilon}^m \right\| \le \gamma_m \left\| \mathbf{\Phi}(\mathbf{X}^m) \right\|$; если это невозможно или если не выполняется условие $\nabla \mathbf{\Psi}(\mathbf{X}^m)^T \Delta \mathbf{X}^m \le -\rho \left\| \Delta \mathbf{X}^m \right\|^q$, то $\Delta \mathbf{X}^m = -\nabla \mathbf{\Psi}(\mathbf{X}^m) = -\mathbf{J}_m^T \mathbf{\Phi}(\mathbf{X}^m)$, где $\mathbf{\Psi}(\mathbf{X}) = \dfrac{1}{2} \left\| \mathbf{\Phi}(\mathbf{X}) \right\|^2$.

4. Выбираем стратегию линейного поиска (правило Армиджо), т.е. вычисляем минимальное целое значение l такое, чтобы для $d_m = \beta^l$ выполнялось условие $\mathbf{\Psi}(\mathbf{X}^m + d_m \Delta \mathbf{X}^m) \le \mathbf{\Psi}(\mathbf{X}^m) + \sigma d_m \nabla \mathbf{\Psi}(\mathbf{X}^m)^T \Delta \mathbf{X}^m$.

5. Вычисляем $\mathbf{X}^{m+1} = \mathbf{X}^m + d_m \Delta \mathbf{X}^m$ и $m = m+1$. Выбираем $\gamma_m \ge 0$ и возвращаемся к шагу 2.

Выводы

Математическое описание равновесных состояний рынков электроэнергии имеет вид громоздкой и плохо структурированной системы комплементарных соотношений и алгебраических уравнений, что существенно усложняет разработку компьютерных моделей исследования энергорынков. Предложенная матрично-векторная форма записи системы комплементарных соотношений и алгебраических уравнений хорошо структурирована, что существенно упрощает применение *C*-функции Фишера—Бармейстра при переходе от этой системы к более удобной для нахождения искомого решения системы полугладких алгебраических уравнений. Полученные простые формулы для вычисления хорошо структурированных блочных элементов матрицы Якоби и элементов обобщенного якобиана Кларка позволяют эффективно применять современные алгоритмы численного решения нелинейных полугладких систем алгебраических уравнений большой размерности.

Представленные методы и алгоритмы являются математической основой программного обеспечения для компьютерного моделирования равновесных состояний рынков электроэнергии с различным числом компаний-производителей электроэнергии, генерирующих блоков, энергоузлов генерации-потребления электроэнергии, линий электропередачи и различными способами организации рыночных отношений.

A mathematical description of equilibrium states of the electric power markets as the matrix-vector form of the system of complementary relationships and algebraic equations is offered. For the system of semismooth algebraic equations generated by the Fischer-Burmeister complementary function we have obtained the formulas for calculation of the block-elements of the Jackobian and the Clarcke generalized Jackobian, which allow us to apply effectively the modern algorithms of numerical solutions of such systems for the computer modelling of the equilibrium states of the electric power markets.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hobbs B., Helman U.* Complementarity-Based Equilibrium Modeling for Electric Power Markets// Modeling Prices in Competitive Electricity Markets. Series in Financial Economics. — Chichester : Wiley, 2004. — 338 p.
2. *Murphy F., Smeers Y.* Generation capacity expansion in imperfectly competitive restructured electricity markets // Operations Research. — 2005. — Vol. 53, № 4. — P. 646—661.
3. *Murphy F., Smeers Y.* On the Impact of Forward Markets on Investments in Oligopolistic Markets with Reference to Electricity. Part 2. Uncertain Demand// Harvard Electricity Policy Group Research Paper. — 2007. — http://www.hks.harvard.edu/hepg/Papers/Murphy_and_Smeers_June_18_07.pdf.
4. *Pineau P.-O.* Electricity market reforms: Industrial developments, investment dynamics and game modeling: Ph. D. Thesis. — Montreal, 2000. — http://www.irec.net/upload/File/memoires_et_theses/260.pdf
5. *Саух С.Е., Борисенко А.В.* Равновесные модели процессов функционирования и развития генерирующих мощностей Украины в рыночных условиях // Энергетика России в XXI веке: стратегия развития — восточный вектор. Энергетическая кооперация в Азии: что после кризиса? // Сб. докл. объединенного симпозиума. 30 августа — 3 сентября 2010 г. Иркутск, Россия. — Иркутск : ИСЭМ СО РАН, 2010. — С. 413—419.
6. *Саух С.Е., Семагина Е.П.* Определение равновесного состояния рынка электрической энергии в Украине методами математического моделирования // Электрон. моделирование. — 2011. — **33**, № 4. — С. 3—14.
7. *Саух С.Е., Борисенко А.В., Подковальников С.В., Хамисов О.В.* Математическое моделирование конкурентного равновесия на электроэнергетических рынках Российской Федерации и Украины. II. Математические модели олигополистических рынков электроэнергии и их применение // Там же. — 2012. — **34**, № 3. — С. 3—24.
8. *Facchinei F., Pang J.-S.* Finite-dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems. Vol. 1. — Springer, 2003. — 728 p.
9. *Delarue E., Bekaert D., Belmans R., D'haeseleer W.* Development of a comprehensive electricity generation simulation model using a mixed integer programming approach// Proc. of the Intern. Conf. on Computer, Electrical, and Systems Science, and Engineering. Prague, July 27—29, 2007. — P. 99—104.
10. *Billups S.C., Dirkse S.P., Ferris M.C.* A comparison of large scale mixed complementarity problem solvers// Computational Optimization and Applications. — 1997. — № 7. — P. 3—25.
11. *Petra S.* Semismooth Least Squares Methods for Complementarity Problems: Ph .D. Thesis. — Wurzburg, 2008. — http://www.opus-bayern.de/uni-wuerzburg/volltexte/2006/1866/pdf/dissertation_petra.pdf.
12. *Ruggiero V., Tinti F.* A preconditioner for solving large scale variational inequality problems by a semismooth inexact approach // Intern. Journal of Computer Mathematics. — 2006. — № 10. — P. 723—739.

Поступила 16.08.2013

САУХ Сергей Евгеньевич, д-р техн. наук, гл. науч. сотр. Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1978 г. окончил Киевский ин-т инженеров гражданской авиации. Область научных исследований — численные операторные методы решения дифференциальных уравнений, декомпозиционные и итерационные методы решения линейных систем большой мерности, математическое моделирование технологических процессов в энергетике и газотранспортных системах, экономико-математические методы моделирования финансовых и макроэкономических процессов.