
УДК 519.25

В.П. Долгин, канд. техн. наук
Севастопольский национальный технический университет
(Украина, 99053, Севастополь, ул. Университетская, 33,
тел. (0692) 543570, e-mail: autosev@ukr.net)

Фазочастотный критерий устойчивости

Рассмотрен метод оценки устойчивости динамических систем по результатам анализа характеристического полинома ее передаточной функции. Предложен фазочастотный критерий оценки устойчивости непрерывных линейных и нелинейных систем, содержащих линейные, иррациональные, трансцендентные, неминимально-фазовые звенья и звенья запаздывания. Изложена методика анализа устойчивости систем.

Розглянуто метод оцінки стійкості динамічних систем за наслідками аналізу характеристичного полінома її передавальної функції. Запропоновано фазочастотний критерій оцінки стійкості безперервних лінійних і нелінійних систем, які містять лінійні, ірраціональні, трансцендентні, немінимально-фазові ланки та ланки запізнювання. Викладено методику аналізу стійкості систем.

К л ю ч е в ы е с л о в а: критерий, устойчивость, передаточная функция, характеристический полином, фаза, вектор.

Основным свойством динамической системы является ее устойчивость, для исследования которой применяют алгебраические и частотные критерии [1, 2]. Частотные критерии универсальны и позволяют исследовать как линейные, так и нелинейные системы. Однако области применения алгебраических и частотных критериев ограничены, так как зависят от типа операторной передаточной функции. Наиболее широко применяются критерии, основанные на анализе частотной формы характеристического полинома операторной передаточной функции системы. Разнообразие критериев вызывает затруднения при выборе метода анализа устойчивости системы. Представляется целесообразной единая процедура анализа устойчивости детерминированных динамических систем с произвольным сочетанием линейных и нелинейных звеньев.

Рассмотрим изменение фазы характеристического полинома. В общем случае алгебраическую форму характеристического полинома $Q(j\omega)$ можно представить в виде

$$Q(j\omega) = R(\omega) + jJ(\omega),$$

© В.П. Долгин, 2013

где $R(\omega) = \operatorname{Re}(Q(j\omega))$ — вещественная, а $J(\omega) = \operatorname{Im}(Q(j\omega))$ — мнимая частотные составляющие характеристического полинома $Q(j\omega)$.

Необходимым и достаточным условием устойчивости системы [1, 2] является изменение фазы $\varphi(\omega)$ вектора $Q(j\omega)$ на угол $n\frac{\pi}{2}$, где n — порядок

характеристического полинома, при изменении частоты ω в интервале $\omega = [0, \infty]$. Для определения фазы $\varphi(\omega)$ следует представить описание характеристического полинома в показательной форме:

$$Q(j\omega) = Q(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

где $Q(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + J^2(\omega)}$ — амплитуда; $\varphi(\omega) = k_\varphi \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{J(\omega)}{R(\omega)}\right)$ — фаза

вектора $Q(j\omega)$, $k_\varphi = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Для главных значений функции $\operatorname{arctg}(\cdot)$, лежащих в интервале $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, $k_\varphi = 0$. За пределами этого интервала необходима коррекция величины коэффициента k_φ .

Постановка задачи. Функция $\varphi(\omega)$ в представленном виде терпит разрывы второго рода и без принятия дополнительных мер не может быть использована для анализа. Одной из основных следует считать задачу синтеза гладкой функции $\varphi(\omega)$. При исследовании нелинейных систем возникает проблема определения порядка передаточной функции системы. И наконец, возникает вопрос оценки значения верхней границы частотного интервала, так как значение функции $\varphi(\omega)$ изменяется при изменении частоты. В области низших частот не возникает принципиальных затруднений при выборе нижней границы, которая может быть задана произвольно (принята равной нулю или больше). Верхняя граничная частота должна быть ограничена в соответствии с условиями решаемой задачи.

При исследовании устойчивости можно выделить следующие задачи:

- 1) исключение разрывов функции $\varphi(\omega)$;
- 2) определение порядка характеристического полинома;
- 3) оценка значения верхней граничной частоты;
- 4) синтез критерия устойчивости;
- 5) оценка границы (или области) устойчивости.

Исключение разрывов функции $\varphi(\omega)$. Вычислить функцию $\varphi(\omega)$ можно рекуррентно по схеме [2]:

$$\begin{aligned} \varphi(\omega_i) &= \operatorname{arctg}(J(\omega_i)/R(\omega_i)), \\ k_\varphi &= \operatorname{ceil}((\varphi(\omega_i) - \varphi(\omega_{i-1}))/\pi), \\ \varphi(\omega_i) &= \varphi(\omega_{i-1}) - k_\varphi \pi, \end{aligned} \quad (1)$$

где ω_i и $\varphi(\omega_i)$ — текущие значения частоты и фазы; $\omega_i = \omega_{i-1} + h_\omega$; ω_{i-1} — предыдущее значение частоты; h_ω — величина шага; $\text{ceil}(\cdot)$ — функция целочисленного округления до ближайшего большего. Результат вычисления фазы в этом случае будет достоверным, если приращение $\Delta\varphi_i = \varphi(\omega_i) - \varphi(\omega_{i-1})$ не выходит за пределы главных значений $-\pi/2 < \Delta\varphi_i < \pi/2$, что и определяет условие выбора шага h_ω . Алгоритм (1) исключает накопление погрешности, так как изменение величины шага h_ω , при соблюдении условия выбора шага, не влияет на погрешность результата вычисления значений $\varphi(\omega_i)$.

Полученная фазочастотная характеристика $\varphi(\omega)$ в этом случае будет дискретной. Сведение ее к непрерывной возможно с помощью процедур интерполяции. Применение интерполяции ведет к появлению погрешности в промежутке между узлами интерполяции, которая уменьшается при уменьшении шага h_ω . Таким образом, при дискретном представлении фазочастотной характеристики выбор величины шага h_ω не критичен и может быть осуществлен при условии $|\Delta\varphi_i| < \pi/2$ для всего множества $i = [1, N]$ точек N диапазона вычислений.

Рассмотрим другой алгоритм вычисления фазы $\varphi(\omega)$ без необходимости коррекции коэффициента k_φ . Продифференцировав выражение фазочастотной характеристики $\varphi(\omega)$

$$d \frac{\varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{J(\omega) d \frac{R(\omega)}{d\omega} - R(\omega) d \frac{J(\omega)}{d\omega}}{R^2(\omega) + J^2(\omega)}$$

и перейдя к приращениям, получим

$$\Delta\varphi_i = \frac{J(\omega_i) \Delta R(\omega_i) - R(\omega_i) \Delta J(\omega_i)}{A^2(\omega_i)},$$

где $A^2(\omega_i) = J^2(\omega_i) + R^2(\omega_i)$; $\Delta R(\omega_i) = R(\omega_i) - R(\omega_{i-1})$; $\Delta J(\omega_i) = J(\omega_i) - J(\omega_{i-1})$. Для вычисления фазы на частоте ω_j необходимо сложить приращения $\Delta\varphi_i$, $i = [1, j]$:

$$\varphi(\omega_j) = \sum_{i=1}^j \Delta\varphi_i. \quad (2)$$

Замена производной приращением приводит к появлению погрешности дискретности, величина которой уменьшается с уменьшением при-

ращения $\Delta \varphi_i$, обусловленного размером шага h_ω . Для исключения погрешности дискретности, применив предельный переход, получим

$$\varphi(z) = \int_0^z \varphi'(\omega) d\omega, \quad (3)$$

где z — частота, определяющая величину фазы;

$$\varphi'(\omega) = \frac{d}{d\omega} \operatorname{arctg} \left(\frac{J(\omega)}{R(\omega)} \right).$$

Полученное выражение является точным, свободным от методической погрешности.

Таким образом, получены выражения для вычисления фазочастотной характеристики в дискретной (1), (2) и непрерывной (3) формах, исключая появление разрывов, порождаемых выходом аргумента функции $\operatorname{arctg}(\cdot)$ за пределы главных значений.

Определение порядка характеристического полинома. Найдем наклон логарифмической амплитудно-частотной характеристики:

$$S(\omega_i) = \frac{\lg(Q(\omega_i)) - \lg(Q(\omega_{i-1}))}{\lg(\omega_i) - \lg(\omega_{i-1})} = \frac{\lg(Q(\omega_i)/Q(\omega_{i-1}))}{\lg(\omega_i/\omega_{i-1})}.$$

Положив $\omega_i/\omega_{i-1} = 10$, упростим это выражение:

$$S(\omega) = \lg \left(\frac{Q(\omega)}{Q(\omega/10)} \right). \quad (4)$$

Покажем, что при $\omega \rightarrow \infty$ будет $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(S(\omega) \right) = \nu$, где ν — порядок характеристического полинома. В общем случае выражение характеристического полинома можно представить в операторной форме:

$$Q(p) = \prod_{i=0}^m Q_i(p),$$

где $Q_i(p) = (1 + T_i p)^{\nu_i}$. Представим характеристический полином в частотной форме, применив подстановку $p = j\omega$:

$$Q(j\omega) = \prod_{i=1}^m Q_i(j\omega),$$

где $Q_i(j\omega) = (1 + j\omega T_i)^{v_i}$. В показательной форме характеристический полином имеет вид $Q(j\omega) = Q(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$, где

$$Q(\omega) = \prod_{i=1}^m Q_i(\omega), \quad Q_i(\omega) = \sqrt{(1 + (T_i\omega)^2)^{v_i}}.$$

При $T_i\omega \gg 1, i = [1, m]$, получим $Q(\omega) = T\omega^v$, где $T = \prod_{i=1}^m T_i^{v_i}, v = \sum_{i=1}^m v_i$. Подставив в (4) полученное значение $Q(\omega)$, после упрощений [3] найдем выражение для вычисления порядка характеристического полинома:

$$v = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(S(\omega) \right), \quad (5)$$

что и требовалось определить.

Вычисление значения верхней граничной частоты. Для представления частотных характеристик необходимо задать частотный диапазон. Значение нижней границы частотного диапазона может быть выбрано произвольно: $\omega_n \geq 0$. При увеличении частоты изменяется наклон амплитудно-частотной характеристики, стремясь к предельному значению v . Верхняя граница частотного диапазона определяется предельным наклоном амплитудно-частотной характеристики (5). Следовательно, значение верхней границы частотного диапазона ω_g может быть определено на основании условия $S(\omega_g) < v$ или, с учетом равенства (4), в результате решения уравнения

$$\lg \left(\frac{Q(\omega_g)}{Q(\omega_g/10)} \right) = vE, \quad (6)$$

где $E < 1$, так как при $E \rightarrow 1$ значение верхней граничной частоты ω_g стремится к бесконечности.

Синтез критерия устойчивости. Порядок характеристического полинома v определим с помощью процедуры (5). Задав желаемый уровень E приближения к асимптоте наклона $S(\omega)$, в результате решения уравнения (6) получим значение верхней границы частотного диапазона ω_g . При заданном значении E с учетом (3), положив $z = \omega_g$, можно сформулировать требование

$$\left| v - \frac{2\varphi(\omega_g)}{\pi} \right| \leq E, \quad (7)$$

выполнение которого позволяет определить устойчивость системы.

Замечание 1. Выражение (7) можно упростить, приняв $z = k_z \omega_g$, где $k_z > 1$, сведя его к строгому неравенству

$$\left| \nu - \frac{2\varphi(\omega_g)}{\pi} \right| < E, \quad (8)$$

что повышает надежность результата вычисления критерия.

Для линейных звеньев, описываемых дробно-рациональными передаточными функциями, процедура вычисления порядка ν характеристического полинома (5) может быть упрощена.

Оценка границы (области) устойчивости. При одновременном равенстве нулю вещественной $R(\omega)$ и мнимой $J(\omega)$ составляющих характеристического полинома нарушается порядок прохождения квадрантов годографом, так как амплитуда $Q(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + J^2(\omega)}$ вектора $Q(j\omega)$ становится равной нулю. Для вычисления граничных значений коэффициента передачи k и частоты ω необходимо решить систему уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(Q(j\omega)) &= 0, \\ \operatorname{Im}(Q(j\omega)) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

относительно указанных переменных. В результате может быть получено множество пар, удовлетворяющих систему (9), из которого необходимо выбрать одну пару с минимальными значениями k и ω .

Для нелинейных систем решение системы уравнений (9) для определения значений k и ω вызывает затруднения. В этом случае можно определить область устойчивости в заданном диапазоне изменения параметра k . Задав границы и шаг h изменения значения k , с помощью критерия (8) оцениваем его граничное значение с точностью, определяемой величиной шага h . Обозначив устойчивое состояние символом 0, а неустойчивое — 1, можно построить диаграмму устойчивости в функции изменения параметра k . Границу устойчивости при необходимости оцениваем с помощью теоремы Лагранжа о среднем значении, зная предельное значение параметра k , при котором система устойчива, и величину шага h .

Реализацию полученных соотношений рассмотрим на тестовых примерах исследования динамических систем, в состав операторных передаточных функций которых входят линейные звенья, различные типы нелинейных и их сочетания. Для анализа устойчивости системы сведем ее структуру к обобщенной блок-схеме (рис. 1), где W_n и W_s — передаточные функции динамического объекта и звена отрицательной обратной связи; W — эквивалентная передаточная функция динамической системы.

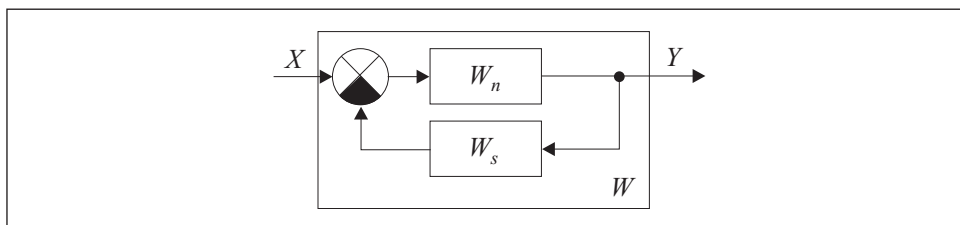


Рис. 1. Блок-схема системы

Для исследования устойчивости системы необходимо получить вещественную $R(\omega) = \text{Re}(Q(j\omega))$ и мнимую $J(\omega) = \text{Im}(Q(j\omega))$ частотные составляющие характеристического полинома $Q(j\omega)$, фазу $\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{J(\omega)}{R(\omega)}\right)$ и амплитуду $Q(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + J^2(\omega)}$, а также ввести функцию наклона амплитудно-частотной характеристики $S(\omega)$. Обозначив $A = Q^2(\omega)$, $Fi = \arctg\left(\frac{J(\omega)}{R(\omega)}\right)$, $S = S(\omega)$, $R = R(\omega)$ и $J = J(\omega)$, введем Maple — описание

перечисленных составляющих характеристического полинома:

```
R := evalc ( Re ( subs ( p = I*w , Q ) ) );
J := evalc ( Im ( subs ( p = I*w , Q ) ) );
A := R^2 + J^2 ;
Fi := arctan ( J/R ) ;
S := simplify ( log10 ( A/subs ( w = w/10 , A ) )/2 ) : # формула (4)
v := limit ( S , w = infinity ) ; # формула (5)
E := .9995 ;
Wg := fsolve ( S = v*E , w , 0 . . infinity ) ; # формула (6)
```

Представим версию алгоритма вычисления фазочастотной функции по формуле (3) для произвольного значения k в виде

```
Df := simplify ( evalf ( diff ( Fi , w ) ) ) : # производная
F := simplify ( int ( Df , w = 0 . . z ) ) : # фазочастотная функция,
```

где $F = \varphi(\omega)$.

Алгоритм реализации вычисления критерия устойчивости по формуле (8) представим процедурой UST с параметром x для коэффициента передачи k :

```
# Процедура вычисления критерия устойчивости
UST := proc ( x ) global E , k , Crit :
k := x :
```

```

E := abs (v-evalf (subs (z = Wg, F) *2/Pi) ) :
if E >1 then Crit := 1; 'система неустойчива'
      else Crit := 0; 'система устойчива ' fi;
end:
# Оценка устойчивости
UST (k1) ; Crit := Crit ;
UST (k2) ; Crit := Crit ;

```

(12)

Введем описание решения системы уравнений (9):

```

# Решение системы уравнений (9)
k := ' k' :
Sys := {J, R} :
Var := {k, w} :
Sol := solve (Sys, Var);
q := pops ( [Sol] ) :

```

(13)

Замечание 2. Для экспресс-анализа состояния линейной системы достаточно получить решение уравнения (9) и в результате его анализа определить критическое значение исследуемого параметра системы.

Замечание 3. Процедуру анализа устойчивости системы можно упростить при монотонном изменении фазочастотной характеристики. В случае нарушения порядка прохождения квадрантов годографом характеристического полинома изменится знак производной фазочастотной характеристики.

Пример 1. Рассмотрим задачу исследования устойчивости системы с операторной передаточной функцией, содержащей иррациональные звенья и неминимально-фазовое звено в цепи отрицательной обратной связи (см. рис. 1),

$$W_n(p) = k \frac{(1+pT_m)^m}{(1+pT_n)^n}, W_s(p) = \frac{(1+pT_s)}{(1+pT_s)^s},$$

с Maple-описанием (EXAMPLE-3) параметров:

```

n := 5.2 : # Порядок собственного оператора
Tn := .1 : # Постоянная времени собственного оператора
m := 4.3 : # Порядок оператора воздействия
s := 3.4 : # Порядок звена обратной связи
Tm := .02 : # Постоянная времени оператора воздействия
Ts := .05 : # Постоянная времени звена обратной связи
k1 := 1. : # Коэффициент передачи устойчивой системы
k2 := 2. : # Коэффициент передачи неустойчивой системы
E := .995 : # Погрешность приближения асимптоты наклона ЛАЧХ

```


После преобразований и подстановки параметров моделируемой системы передаточную функцию W и характеристический полином Q замкнутой системы приведем к стандартной форме:

$$W := -\frac{k(1+T_m)^m(1+T_s p)^s}{-(1+T_n p)^n(1+T_s p)^s - k(1+T_m)^m + k(1+T_m)^m T_s p},$$

$$Q := -(1+T_n p)^n(1+T_s p)^s - k(1+T_m)^m + k(1+T_m)^m T_s p.$$

В результате выполнения алгоритма (10) получим

$$v := 8,600000002,$$

$$Wg := 961,2684592$$

и построим графики функций наклона логарифмических амплитудно-частотных характеристик (рис. 2).

Графики фазочастотных характеристик (рис. 3) построены в результате реализации алгоритма (11).

На рис. 4 представлена интерпретация области устойчивости системы, полученная по критерию устойчивости (8). Определив границу устойчивости по теореме Лагранжа о среднем, получим $k_g = 1,55$ при шаге $h = 0,1$.

На рис. 5 представлены начальные участки годографа Михайлова при $k = 1; 1,55; 2$, а на рис. 6 — графики изменения знака производных фазочастотных функций, т.е. интерпретация замечания 3.

Изложенная методика анализа устойчивости позволяет исследовать состояние иррациональных систем.

Пример 2. Рассмотрим задачу исследования устойчивости системы с операторной передаточной функцией, в состав которой входит звено задержки, решенную методом Попова [1]:

$$W_n = \frac{k(1+T_1 p) e^{-p}}{(1+T_2 p)(1+T_3 p)}, \quad W_s = 1,$$

где $T_1 = 0,33; T_2 = 0,66; T_3 = 0,5$. Получим передаточную функцию замкнутой системы (см. рис. 1),

$$W(p) = \frac{k(1+T_1 p) e^{-p}}{1+(k T_1 e^{-p} + T_2 + T_3) p + T_2 T_3 p^2 + k e^{-p}},$$

и характеристический полином $Q(p) = 1+(k T_1 e^{-p} + T_2 + T_3) p + T_2 T_3 p^2 + k e^{-p}$. Примем для устойчивого и неустойчивого состояний системы соот-

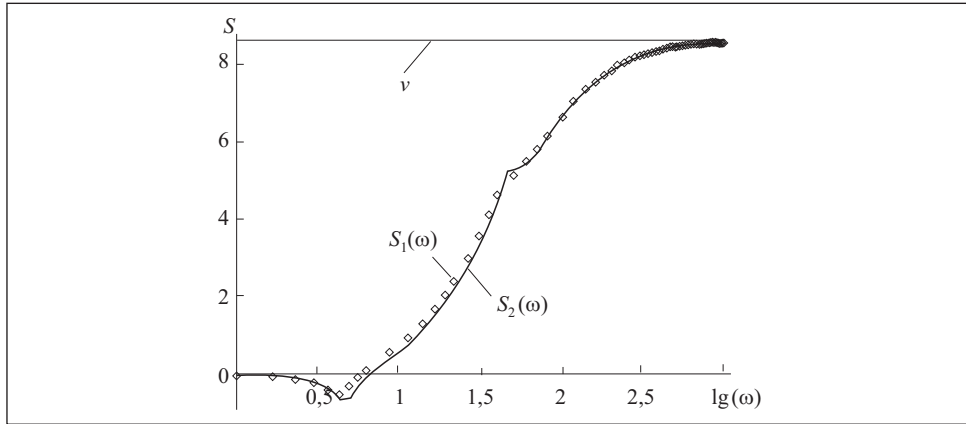


Рис. 2. Графики функций наклона логарифмических амплитудно-частотных характеристик устойчивого $S_1(\omega)$ и неустойчивого $S_2(\omega)$ состояний системы

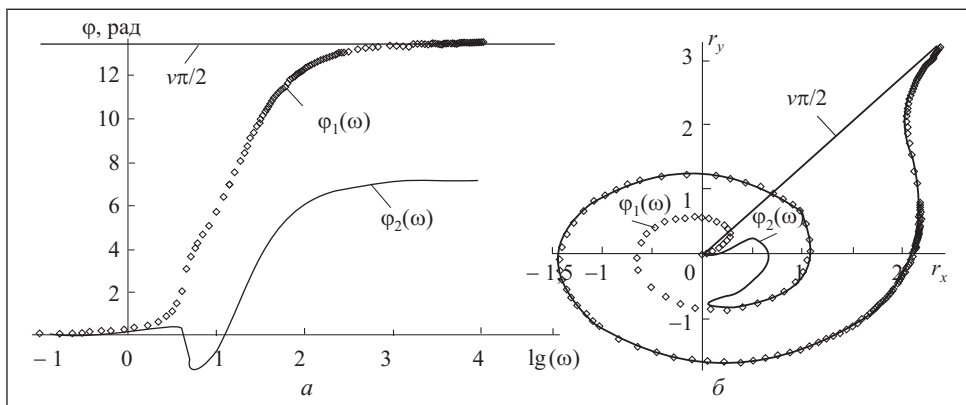


Рис. 3. Графики фазочастотных характеристик в декартовой (а) и полярной (б) системах координат

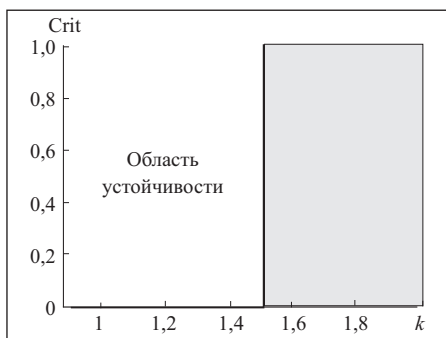


Рис. 4. Диаграмма устойчивости системы

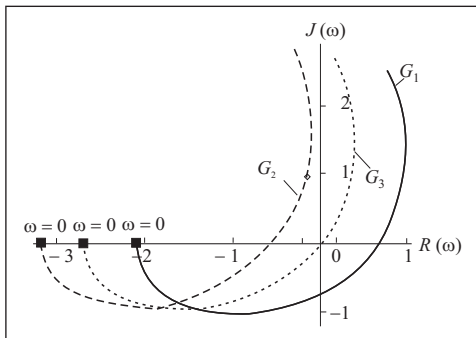


Рис. 5. Годографы Михайлова для различных состояний системы: G_1 — устойчивое ($k = k_1$); G_2 — неустойчивое ($k = k_2$); G_3 — на грани устойчивости ($k = k_g$)

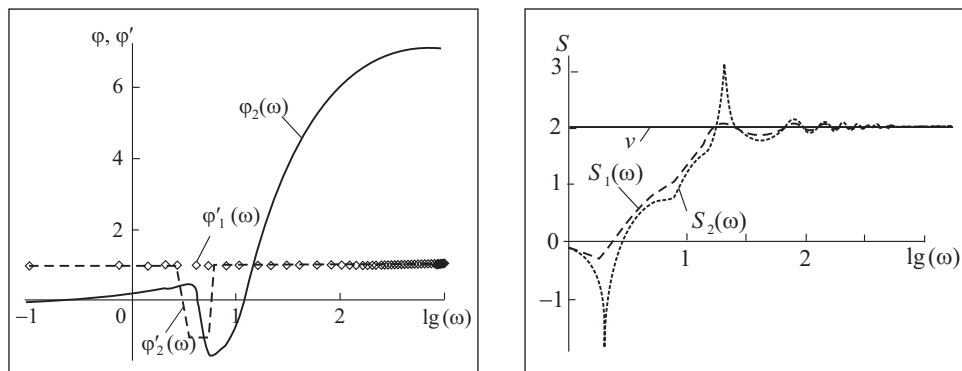


Рис. 6. Графики изменения знака производных фазочастотных функций

Рис. 7. Графики функций наклона логарифмических амплитудно-частотных характеристик для устойчивого $S_1(\omega)$ и неустойчивого $S_2(\omega)$ состояний системы

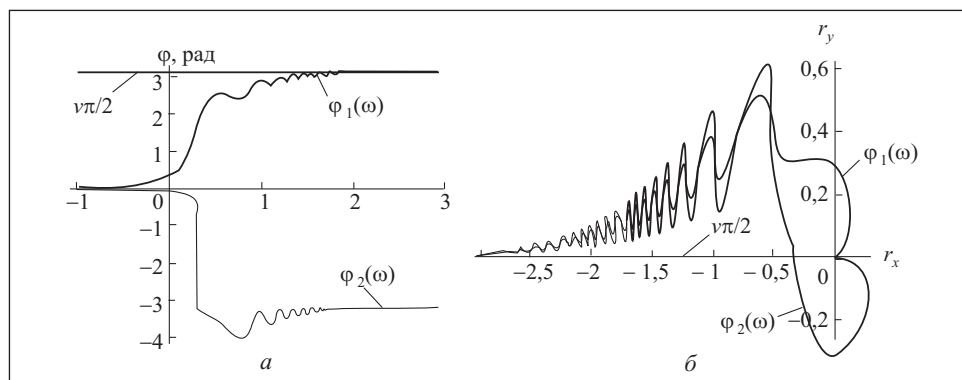


Рис. 8. Логарифмические фазочастотные характеристики в декартовой (а) и полярной (б) системах координат

ветственно $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$ [1]. В результате выполнения процедуры (10) получим

$$\begin{aligned} v &:= 2,000000000, \\ wg &:= 66,35443166 \end{aligned}$$

и построим графики функций наклона логарифмических амплитудно-частотных характеристик (рис. 7). После выполнения процедуры (11) получим выражения для фазочастотных характеристик. Полученные фазочастотные характеристики устойчивого $\varphi_1(\omega)$ и неустойчивого $\varphi_2(\omega)$ состояний системы приведены на рис. 8.

В результате критериальной оценки (процедура (12)) получаем значения критериев для устойчивого ($k = k_1$) и неустойчивого ($k = k_2$) состояний

системы: $\text{Crit} := 0$ и $\text{Crit} := 1$. По критерию устойчивости (8) можно построить диаграмму устойчивости, аналогичную изображенной на рис. 4, с границей устойчивости $k_g = 1,95$.

Выводы

Предложенный метод оценки устойчивости системы универсален, так как позволяет исследовать состояние непрерывных систем широкого класса.

The method of stability estimation of the dynamic systems according to analysis results of characteristic polynomial of its transfer function has been considered. The phase-frequency criterion of stability estimation of the continuous linear and nonlinear systems containing linear, irrational, transcendent, nonminimum phase links and links of delay is proposed. The method of stability analysis of the systems is expounded.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Топчиев Ю.И.* Атлас для проектирования систем автоматического регулирования.— М. : Машиностроение, 1989. — 752 с.
2. *Долгин В.П.* Автоматическое управление техническими и технологическими системами и объектами. Методы анализа систем и объектов. — Севастополь : Изд-во СевНТУ, 2003. — 404 с.
3. *Долгин В.П., Долгин И.В.* Метод аппроксимации амплитудно-частотной характеристики // Оптимизация производственных процессов. Вып. 11: Сб. науч. тр. — Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2009. — С. 190—193.
4. <http://www.exponenta.ru/educat/systemat/danilov/4.asp>

Поступила 26.11.12;
после доработки 22.04.13

ДОЛГИН Владимир Прохорович, канд. техн. наук, доцент кафедры автомобильного транспорта Севастопольского национального технического университета. В 1958 г. окончил Военно-морское инженерное училище им. Ф.Э. Дзержинского (Ленинград), в 1965 г. — Севастопольский приборостроительный ин-т. Область научных исследований — адаптивные модели в системах управления технологическими объектами.