
УДК 519.25

В.П. Долгин, канд. техн. наук
Севастопольский национальный технический университет
(Украина, 99053, Севастополь, ул. Университетская, 33,
тел. (0692) 543570, e-mail: autosev@ukr.net)

Методика оценки устойчивости динамической системы по критерию Михайлова

Изложена методика оценки устойчивости линейной динамической системы по результатам анализа характеристического полинома в частотной области. Сформулирован аналитический критерий устойчивости. Приведены результаты имитационного моделирования.

Викладено методику оцінки стійкості лінійної динамічної системи за наслідками аналізу характеристичного полінома в частотній області. Сформульовано аналітичний критерій стійкості. Наведено результати імітаційного моделювання.

Ключевые слова: критерий, передаточная функция, устойчивость, полином, вектор.

При моделировании, проектировании и анализе линейных динамических систем широко используют частотные критерии устойчивости [1, 2], из которых наиболее простым является критерий Михайлова, основанный на анализе годографа характеристического уравнения, получаемого в результате преобразования операторной дробно-рациональной передаточной функции исследуемой системы, и сведении его к полиномиальной форме. Однако вследствие малой разрешающей способности такой годограф редко применяется для анализа устойчивости динамических систем высокого порядка. С возрастанием частоты начальная часть годографа при порядке характеристического полинома $n \geq 5$ становится практически неразличимой и требуется проводить дополнительный анализ годографа. Однако критерий Михайлова не позволяет аналитически оценить устойчивость.

Анализ проблемы. Операторную дробно-рациональную передаточную функцию системы можно свести к виду

$$W(p) = \frac{k \sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{j=0}^n a_j p^j}, \quad (1)$$

© В.П. Долгин, 2013

где m — порядок числителя; n — порядок знаменателя; b_i, a_j — коэффициенты; k — коэффициент передачи (усиления); p — оператор Лапласа. Характеристическим считается полином

$$Q(p) = \sum_{j=0}^n a_j p^j, \quad (2)$$

являющийся знаменателем передаточной функции (1), который в стандартной операторной форме имеет вид

$$Q(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n.$$

Разложив этот полином на множители, $Q(p) = a_0(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)$, где p_1, p_2, \dots, p_n — корни характеристического уравнения системы $Q(p) = 0$, запишем

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (3)$$

Задача состоит в проверке условий, при которых все корни характеристического уравнения (3) лежат слева от мнимой оси комплексной плоскости. Выражение для полинома $Q(p)$ остается справедливым при любых значениях текущей координаты p и, в частности, при $p = j\omega$:

$$Q(j\omega) = a_0(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)\dots(j\omega - p_n).$$

Каждый из сомножителей $q_i(j\omega) = (j\omega - p_i)$, $i = [1, n]$, представляет собой элементарный вектор, выходящий из начала координат.

В показательной форме выражение элементарного вектора $q_i(j\omega)$ можно представить в виде $q_i(j\omega) = q_i(\omega) e^{j\varphi_i(\omega)}$, где $q_i(\omega)$ — модуль i -го элементарного вектора $q_i(\omega) = \sqrt{\omega^2 + p_i^2}$; $\varphi_i(\omega)$ — его фаза, $\varphi_i(\omega) = -\arctg(\omega/p_i)$.

Поскольку функция $Q(j\omega)$ равна произведению элементарных векторов $q_i(j\omega)$, то и сама эта функция является вектором:

$$Q(j\omega) = q_1(j\omega) q_2(j\omega) \dots q_n(j\omega),$$

или, в показательной форме, —

$$Q(j\omega) = Q(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

где $Q(\omega)$ — амплитуда $Q(\omega) = q_1(\omega) q_2(\omega) \dots q_n(\omega)$; $\varphi(\omega)$ — фаза вектора $Q(j\omega)$, $\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_n(\omega)$.

При изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ фаза любого i -го элементарного вектора изменится на величину $\Delta\varphi_i = \varphi_i(-\infty) - \varphi_i(\infty) = \pi$, так как

$$\varphi_i(-\infty) = -\arctg\left(\frac{-\infty}{p_i}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_i(\infty) = -\arctg\left(\frac{\infty}{p_i}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, фаза каждого элементарного вектора, отображающего один корень характеристического уравнения, лежащий слева от мнимой оси комплексной плоскости, изменится ровно на угол $+\pi$ при изменении значения ω от $-\infty$ до $+\infty$. Фаза каждого элементарного вектора, отображающего один корень характеристического уравнения, лежащего справа от мнимой оси комплексной плоскости, изменится ровно на угол $-\pi$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$.

Если все n корней характеристического уравнения системы находятся в левой полуплоскости, что соответствует устойчивой системе, то фаза вектора $Q(j\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ изменится на $n\pi$, т.е. вектор $Q(j\omega)$ повернется против часовой стрелки на угол $n\pi$. Если хотя бы один корень характеристического уравнения системы окажется в правой полуплоскости, что соответствует неустойчивой системе, то вектор $Q(j\omega)$ повернется против часовой стрелки на угол, меньший, чем $n\pi$, при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$. Если все корни характеристического уравнения расположены в левой полуплоскости, то характеристический вектор $Q(j\omega)$ при изменении ω от нуля до $+\infty$ повернется на угол $n(\pi/2)$.

Таким образом, система автоматического управления устойчива, если годограф характеристического вектора $Q(j\omega)$ при изменении ω от нуля до $+\infty$ последовательно пройдет n квадрантов против часовой стрелки, начиная от положительной вещественной оси, где n — порядок характеристического полинома системы.

Постановка задачи. Вещественную и мнимую составляющие характеристического полинома (2) можно получить в виде

$$\operatorname{Re}(\omega) = \sum_{i=0}^n a_j \omega^i \cos\left(\frac{i\omega\pi}{2}\right) \text{ и } \operatorname{Im}(\omega) = \sum_{i=0}^n a_j \omega^i \sin\left(\frac{i\omega\pi}{2}\right),$$

положив $p = j\omega$. Амплитуда вектора $Q(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\omega) + \operatorname{Im}^2(\omega)}$ изменяется с изменением значения ω от $Q(0) = a_0$ ($\operatorname{Re}(0) = a_0$ и $\operatorname{Im}(0) = 0$) до предельного значения $Q(\omega_m) > a_n \omega_m^{n/2}$, т.е. более чем в $a_n \omega_m^{n/2} / a_0$ раз, где ω_m — максимальная частота диапазона. Поэтому при значениях степени характеристического полинома $n \geq 5$ начальный участок годографа трудно различим, что осложняет анализ устойчивости системы. В этой связи актуальным является расширение функциональных возможностей процедуры оценки устойчивости динамической системы.

Решение задачи. С целью упрощения анализа устойчивости динамической системы целесообразно изобразить трассу годографа, фиксируя квадранты, через которые он проходит в диапазоне исследуемых частот $\omega = [0 \dots \omega_m]$.

Для этого достаточно определить знаки вещественной $\text{signum}(\text{Re}(\omega))$ и мнимой $\text{signum}(\text{Im}(\omega))$ составляющих в середине интервалов, на которые функции $\text{Re}(\omega)$ и $\text{Im}(\omega)$ разбивают ось частот ω , где $\text{signum}(x) = x/|x|$, $\text{signum}(0) = 0$.

Найдя корни функций $\text{Re}(\omega)$ и $\text{Im}(\omega)$, получим множество точек на оси частот ω , образующих требуемые интервалы. Сумма чисел действительных корней обеих функций устойчивой системы должна быть равна порядку характеристического полинома. Разместив точки с координатами $[\text{signum}(\text{Re}(\omega)), \text{signum}(\text{Im}(\omega))]$ на комплексной плоскости, получим трассу годографа характеристического полинома. Если порядок следования квадрантов, через которые проходит годограф, не нарушается, то система устойчива.

Алгоритм реализации. Рассмотрим пример оценки устойчивости системы с операторной передаточной функцией

$$W_r(p) = \frac{k(1+T_m p)^m}{(1+T_r p)^n},$$

охваченной звеном обратной связи с операторной передаточной функцией

$$W_s(p) = \frac{1}{(1+T_s p)^s}.$$

Операторная передаточная функция замкнутой системы с отрицательной обратной связью $W_z(p) = W_r(p)/(1+W_r(p)W_s(p))$ после преобразования может быть представлена в виде

$$W_z(p) = \frac{k(1+T_m p)^m(1+T_s)^s}{(1+T_r p)^n(1+T_s p)^s + k(1+T_m p)^m}. \quad (4)$$

Характеристическим полиномом исследуемой системы является знаменатель передаточной функции (4):

$$Q(p) = (1+T_r p)^n(1+T_s p)^s + k(1+T_m p)^m.$$

Перейдем к анализу алгебраической формы характеристического полинома $Q(j\omega) = \text{Re}(\omega) + jJ(\omega)$, где $R(\omega) = \text{Re}(Q(j\omega))$ и $J(\omega) = \text{Im}(Q(j\omega))$ — вещественная и мнимая частотные составляющие, и получим аналитические выражения этих составляющих. Затем вычислим корни $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q$ уравнений $R(\omega) = 0$ и $J(\omega) = 0$, где q — общее число корней частотных составляющих $R(\omega)$ и $J(\omega)$ характеристического полинома.

На рис. 1 изображен начальный участок характеристик частотных составляющих $R(\omega)$ и $J(\omega)$ с нанесенными значениями частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q$. По

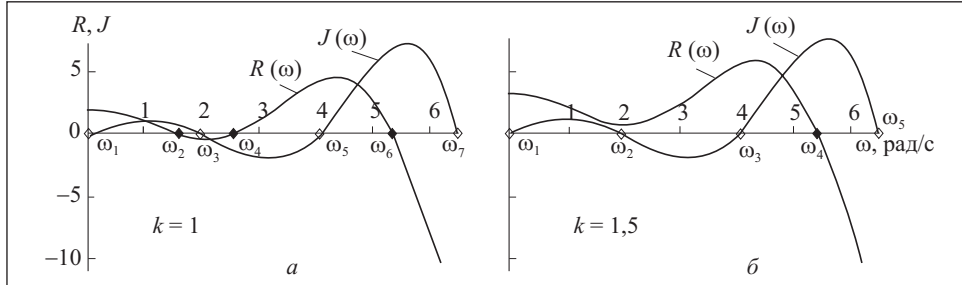


Рис. 1. Положение вещественных корней частотных составляющих, разбивающих ось ω на интервалы при устойчивом (а) и неустойчивом (б) состояниях системы

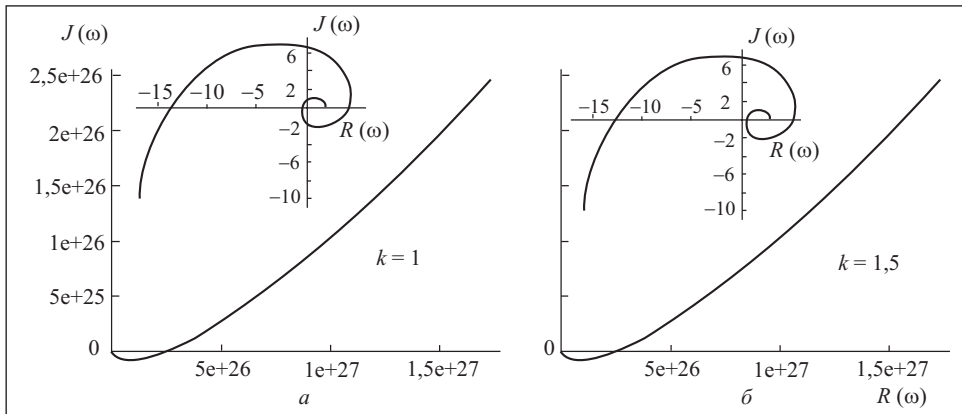


Рис. 2. Годографы характеристического полинома для устойчивого (а) и неустойчивого (б) состояний системы (с начальными участками в крупном масштабе, которые трудно различимы на полном годографе Михайлова)

найденным частотным составляющим $R(\omega)$ и $J(\omega)$ для сравнения построен годограф характеристического полинома (годограф Михайлова) (рис. 2).

Для анализа трассы годографа необходимо вычислить знаки частотных составляющих $R(\omega)$ и $J(\omega)$ в середине частотных интервалов $[\omega_1, \omega_2], [\omega_2, \omega_3], \dots, [\omega_q, \omega_m]$, где $\omega_m = 1, 1\omega_q$ — граничная частота, взятая за пределами диапазона. В середине i -го интервала $u = (\omega_i + \omega_{i+1})/2, i = 1 \dots q$, необходимо вычислить знаки $\text{signum}(R(u))$ и $\text{signum}(J(u))$ и сравнить их со знаками i -го квадранта. Если знаки совпадают, то индикаторной функции присваиваем значение номера квадранта $U_i = i$, в противном случае принимаем $U_i = 0$:

$$U_i = \begin{cases} i, & \text{если } \text{signum}(R(u)) = (-1)^{\text{floor}(i/2)} \& \text{signum}(J(u)) = (-1)^{\text{ceil}(i/2)}, \\ 0, & \text{если иначе,} \end{cases} \quad (5)$$

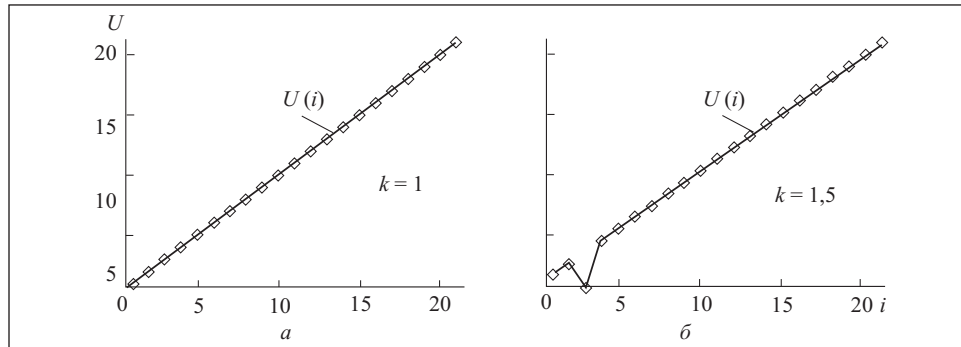


Рис. 3. Графики индикаторной функции устойчивого (а) и неустойчивого (б) состояний системы

где $\text{floor}(\cdot)$ и $\text{ceil}(\cdot)$ — функции целочисленного округления до ближайшего меньшего и большего.

Анализ устойчивости сводится к проверке наличия уклонений, соответствующих значениям $U(i)=0$. Если уклонения отсутствуют, система устойчива, в противном случае — неустойчива. Индикаторная функция (5) является дискретной. Для удобства анализа применена процедура линейной сплайн-интерполяции, соединяющая дискретные значения индикаторной функции (рис. 3).

Сигнум-идентификация квадрантов для отображения трассы годографа представляет собой процедуру вычисления координат точек в серединах интервалов, на которые разбита ось частот ω значениями корней вещественной $R(\omega)$ и мнимой $J(\omega)$ составляющих. Число реперных точек, через которые проходит трасса годографа, равно порядку характеристического полинома q . Координатой каждой точки является номер квадранта i со знаками составляющих $R(u)$ и $J(u)$ в середине i -го интервала $u = (\omega_i + \omega_{i+1})/2$, $i=1 \dots q$. В этом случае описание координат i -й точки имеет вид

$$M_i = [\text{signum}(R(u)) i, \text{signum}(J(u)) i], \quad i=1 \dots q. \quad (6)$$

Координаты начальной точки согласно (6) составляют $M [1, 0]$, так как $\text{signum}(R(0))=1$ при $R(0)=k$, $k>0$, и $\text{signum}(J(0))=0$ при $J(0)=0$.

Трасса годографа состоит из множества последовательно соединенных реперных точек, представляет собой стилизованную спираль и является дискретным образом годографа, показывая порядок прохождения квадрантов при изменении частоты. Нарушение последовательности прохождения квадрантов изменяет форму спирали.

Выходя из начальной точки ($\omega=0$), годограф устойчивой системы (рис. 4, а) последовательно пересекает квадранты, начиная с первого. Годограф

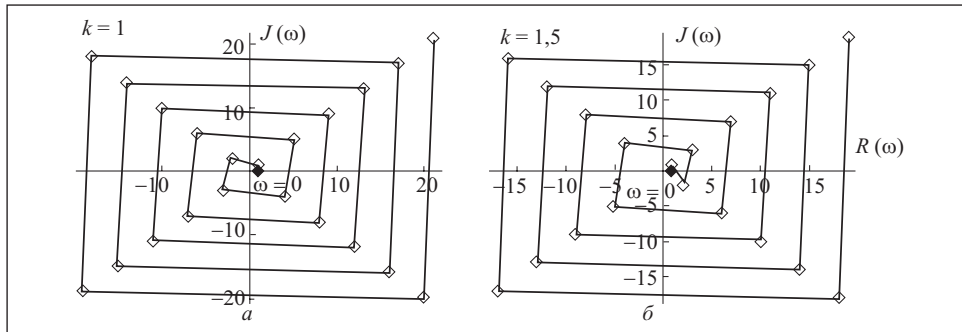


Рис. 4. Трассы годографа характеристического полинома устойчивой (а) и неустойчивой (б) систем

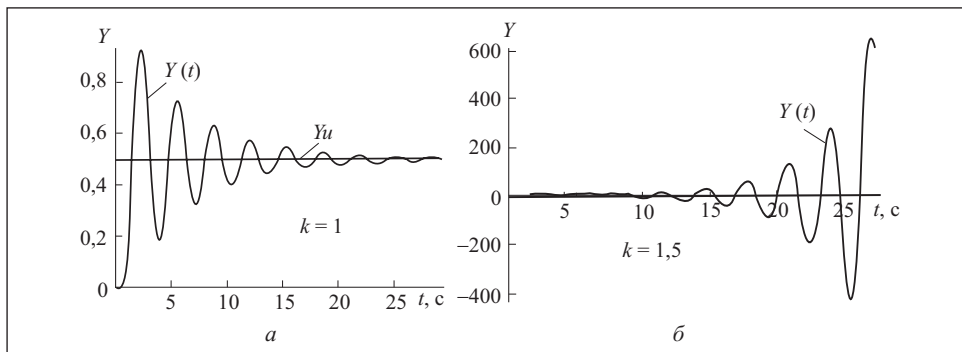


Рис. 5. Переходные характеристики системы устойчивого (а) и неустойчивого (б) режимов работы системы

неустойчивой системы (рис. 4, б) из начальной точки ($\omega=0$) входит в первый квадрант, а затем — в четвертый. Нарушение порядка следования квадрантов является признаком неустойчивого состояния системы.

На рис. 5 показаны переходные характеристики устойчивого и неустойчивого режимов работы системы. Моделирование состояний выполнено для системы со следующими параметрами:

- порядок собственного оператора $n = 15$;
- порядок оператора воздействия $m = 5$;
- порядок звена обратной связи $s = 6$;
- постоянная времени собственного оператора $Tn = 0,1$ с;
- постоянная времени оператора воздействия $Tm = 0,05$;
- постоянная времени звена обратной связи $Ts = 0,02$ с.

При изменении коэффициента передачи (усиления) k изменяется состояние системы и она может перейти в неустойчивый режим.

Предложенный алгоритм анализа устойчивости может быть применен и для исследования иррациональных передаточных функций, если найти приемлемый метод вычисления действительных корней частотных составляющих характеристического уравнения. При введении иррационального звена в состав передаточной функции число корней обеих составляющих характеристического уравнения, среди которых находятся и действительные, существенно возрастает, что приводит к усложнению процедуры анализа, связанному с их локализацией.

Выводы

Устранены ограничения на порядок характеристического полинома. В рассмотренном примере порядок характеристического полинома составил $q = n + s = 21$ и может быть увеличен в три раза без ущерба для разрешающей способности.

В результате введения индикаторной функции U_i появилась возможность аналитически сформулировать условие устойчивости (6).

Возможно альтернативное решение задачи оценки устойчивости. Система устойчива при одновременном выполнении трех условий:

1) действительные корни частотной составляющей годографа $\text{Re}(Q(j\omega))$ следуют за действительными корнями частотной составляющей $\text{Im}(Q(j\omega))$ (см. рис. 1, а);

2) равенство суммы числа действительных корней обеих составляющих годографа порядку характеристического полинома;

3) отсутствие мнимых корней частотных составляющих $\text{Re}(Q(j\omega))$ и $\text{Im}(Q(j\omega))$ годографа, т.е. значения всех корней должны быть действительными.

Математическое описание указанных условий, которое можно выполнить по приведенным соотношениям, является аналитическим критерием устойчивости. Анализ устойчивости по рассмотренному алгоритму — объективный и не требует дополнительных исследований.

Полученные результаты могут найти применение при моделировании, проектировании и анализе технических, технологических, автотранспортных [1, 2] и других систем автоматического управления.

The method of stability estimation for the linear dynamic system from results of analysis of the characteristic polynomial in the frequency region has been expounded. The analytical stability criterion has been formulated. The results of simulation design are presented.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Топчиев Ю.И.* Атлас для проектирования систем автоматического регулирования. — М.: Машиностроение, 1989. — 752 с.
2. *Долгин В.П.* Автоматическое управление техническими и технологическими системами и объектами. Методы анализа систем и объектов. — Севастополь : Изд-во СевНТУ, 2003. — 404 с.

Поступила 21.09.12

ДОЛГИН Владимир Прохорович, канд. техн. наук, доцент кафедры автомобильного транспорта Севастопольского национального технического университета. В 1958 г. окончил Военно-морское инженерное училище им. Ф.Э. Дзержинского (Ленинград), в 1965 г. — Севастопольский приборостроительный ин-т. Область научных исследований — адаптивные модели в системах управления технологическими объектами.

