УДК 519.6

А.Л. Заворотный, В.С. Касьянюк кандидаты физ.-мат. наук
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
(Украина, 03127, Киев, пр. Академика Глушкова, 4-д,
тел.(044) 2590530, e-mail: zal_ua@inbox.ru)

Парето-оптимальное восстановление функциональных зависимостей по нечетким данным

Разработан метод восстановления функциональных зависимостей, позволяющий вместо значений функции использовать ее интегральные значения с учетом наличия погрешностей в исходных данных. Моделирование погрешностей выполнено с помощью нечетких величин. Оценки значений функции получены в результате решения задачи оптимизации по Парето. Определены критерии состоятельности оценок.

Розроблено метод відновлення функціональних залежностей, який дозволяє замість значень функції використовувати її інтегральні значення з врахуванням наявності похибок у вхідних даних. Моделювання похибок виконано за допомогою нечітких величин. Оцінки значень функції отримані в результаті розв’язання задачі оптимізації за Парето. Визначено критерії спроможності оцінок.

Ключевые слова: восстановление, функциональная зависимость, искаженные данные, нечеткость, парето-оптимизация.

Рассмотрим задачу восстановления значений функции $f(x)$ из класса $L_2[D]$ на произвольном заданном наборе значений аргумента $x_1, ..., x_m$ из области D. Будем считать, что значения функции, в том числе и в точках $f(x_1), ..., f(x_m)$, неизвестны, однако известны искаженные значения функционала

$$y_i = \int_D g_i(x) f(x)\, dx + v_i, \quad i = \overline{1, n}\,. \tag{1}$$

Здесь $g_i(x) \in L_2[D]$ — известные ядра функционала; v_i — погрешности в значениях функционала y_i.

Задача восстановления $f(x)$ по данным (1) рассмотрена в [1] для случая, когда погрешности в данных моделируются случайными величинами. При этом предполагалось, что о погрешностях известна некоторая статистическая информация, например первый момент и ковариационная матрица [2]. Для решения многих практических задач не всегда можно воспользоваться такой математической моделью ввиду отсутствия статистической информации. Это вынуждает обратиться к экспертным оценкам и моделировать погрешности с помощью нечетких величин [3] .

Рассмотрим именно такой случай, т.е. будем считать, что v_i, $i=\overline{1,n}$, — нечеткий элемент пространства действительных чисел R. Перепишем для удобства (1) в виде

$$y=\int_D G(x)\,f(x)\,dx+\nu, \tag{2}$$

где $y=(y_1,\dots,y_n)^*$; $G(x)=(g_1(x),\dots,g_n(x))^*$; $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)^*$; звездочкой обозначена операция транспонирования.

Пусть известно заданное экспертом распределение элемента $\nu:\varphi^{\nu}(\cdot)\in\in H(R^n)$, т.е. $\varphi^{\nu}(\cdot):R^n\to H$, где H — шкала на отрезке $[0,1]$ с естественной упорядоченностью, заданной неравенством $\le$, и двумя правилами композиции: сложением, понимаемым как max, и умножением, понимаемым как min [3]. При этом будем полагать, что функция $\varphi^{\nu}(\cdot)$ является монотонно убывающей относительно нормы аргумента так, что если ошибки нет, то распределение равно единице, а если ошибка бесконечно велика, то распределение равно нулю. Таким образом, реализуется принцип: чем больше ошибка, тем меньше ее возможность.

При такой постановке задачи вектор искаженных значений функционала y сам становится нечетким элементом пространства R^n, и можно выразить совместное распределение через функцию $\varphi^{\nu}(\cdot)$. Поскольку по условию $f(x)$ является неизвестным произвольным элементом пространства R, его распределение имеет вид $\varphi^{\mu}(f(x))=1$. Условное распределение имеет вид

$$\varphi^{y|\mu}(z,f(x))=\varphi^{\nu}\left(z-\int_D G(x)\,f(x)\,dx\right).$$

Тогда совместное распределение запишем в виде

$$\varphi^{y}(z,f(x))=\varphi^{y,\mu}(z,f(x))=$$

$$=\min(\varphi^{y|\mu}(z,f(x)),\varphi^{\mu}(f(x)))=\varphi^{\nu}\left(z-\int_D G(x)\,f(x)\,dx\right).$$

Рассмотрим задачу оценки $f(x)$ для каждой точки из набора x_j, $j=\overline{1,m}$, по данным (2). Идея состоит в том, чтобы использовать значения интегралов (2) от функции $f(x)$ для оценки усредненного значения $f(x)$ в некоторой окрестности выбранной точки, т.е. $\int_D I_j^\varepsilon(x) f(x)\,dx$, где

$$I_j^\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/2\varepsilon_j, |x - x_j| \le \varepsilon_j, \\ 0, |x - x_j| > \varepsilon_j; \end{cases}$$

ε_j — заданная окрестность усреднения для точки x_j, $j = \overline{1, m}$. Уменьшая значение ε_j, можно добиться лучшего приближения искомой оценки к значению функции $f(x_j)$.

Один из подходов к задаче построения данной оценки состоит [1] в нахождении такого вектора $B = (b_1, ..., b_n)$ из R^n, который позволил бы интерпретировать By как наиболее точную, в определенном смысле, версию интеграла $\int_D I_j^\varepsilon(x) f(x)\,dx$. Умножив уравнение (2) на B справа и отняв от обеих частей $\int_D I_j^\varepsilon(x) f(x)\,dx$, получим уравнение

$$By - \int_D I_j^\varepsilon(x) f(x)\,dx = \int_D (BG(x) - I_j^\varepsilon(x)) f(x)\,dx + B\nu,$$

из которого видно, что By отличается от $\int_D I_j^\varepsilon(x) f(x)\,dx$ двумя слагаемыми: артефактом $\int_D (BG(x) - I_j^\varepsilon(x)) f(x)\,dx$ и погрешностью, представленной нечеткой величиной $B\nu$.

Поскольку информация о функции $f(x)$ изначально отсутствует, в качестве одного из критериев оптимальности оценки $\int_D I_j^\varepsilon(x) f(x)\,dx$ в виде By можно принять условие минимизации по B нормы операторной невязки $\left\| BG(x) - I_j^\varepsilon(x) \right\| \to \min_B$, где

$$\left\| BG(x) - I_j^\varepsilon(x) \right\|^2 = \int_D (BG(x) - I_j^\varepsilon(x))(BG(x) - I_j^\varepsilon(x))^* \,dx.$$

Введя по аналогии с понятием необходимости ошибки оценивания [3] понятие необходимости корректности оценивания нечеткой величины, можно принять его в качестве еще одного из критериев оптимальности. Итак, необходимостью корректности оценивания нечеткой величины назовем величину

$$C_n(s(z)) = \theta \sup_z \sup_{f(x)} \min\left(\varphi^y(z, f(x)), \theta h\left(\int_D I_j^\varepsilon(x) f(x)\, dx, s(z)\right)\right), \qquad (3)$$

где $s(z)$ — стратегия оценивания; $h\left(\int_D I_j^\varepsilon(x) f(x)\, dx, s(z)\right)$ — возможность отсутствия ошибки, сопутствующая выбору $s(z)$ в качестве значения $\int_D I_j^\varepsilon(x) f(x)\, dx$ для каждого значения $f(x) \in L_2[D]$ (нечеткое отношение корректности); θ — инволюция, определенная в [3], а именно дуальный изоморфизм из H в $\widetilde{H}$, такой, что $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 0$, и для любых $a, b \in [0,1]$ отношения $a \le b, \theta(a) \ge \theta(b)$ и $\theta(a) \mathrel{\widetilde{\le}} \theta(b)$ эквивалентны. Здесь $\widetilde{H}$ — шкала на $[0,1]$, дуальная к H, с операцией сложения, понимаемой как min, операцией умножения, понимаемой как max, и отношением порядка $\widetilde{\le}$, обратным естественному. По сути, (3) является интегралом по необходимости от $h\left(\int_D I_j^\varepsilon(x) f(x)\, dx, s(z)\right)$. Учитывая выбор стратегии в виде $s(z) = Bz$ и устремив интеграл (3) к максимуму по стратегии оценивания, получаем критерий оптимальности в виде

$$C_n(s(z)) = \theta \sup_z \sup_{f(x)} \min\left(\varphi^y(z, f(x)),\ \theta h\left(\int_D I_j^\varepsilon(x) f(x)\, dx, Bz\right)\right) \to \max_B .$$

По аналогии с доказательством, приведенным в [3], можно доказать, что задача $C_n(s(z)) \to \max_B$ сводится к решению задачи

$$C_n(s(z), z) = \theta \sup_{f(x)} \min\left(\varphi^y(z, f(x)),\ \theta h\left(\int_D I_j^\varepsilon(x) f(x)\, dx, Bz\right)\right) \to \max_B$$

для каждого $z \in R^n$. В итоге, используя свойства инволюции θ, можем записать задачу

$$\begin{gathered} \sqrt{\int_D (BG(x) - I_j^\varepsilon(x))(BG(x) - I_j^\varepsilon(x))^*\, dx} \to \min_B, \\ \sup_{f(x)} \min\left(\varphi^\nu\left(z - \int_D G(x) f(x)\, dx\right),\ \theta h\left(\int_D I_j^\varepsilon(x) f(x)\, dx, Bz\right)\right) \to \min_B, \end{gathered} \qquad (4)$$

решив которую, получим оценку $\int_D I_j^{\varepsilon}(x) f(x)\, dx$ в виде Bz, оптимальную в смысле минимизации нормы операторной невязки и максимизации необходимости корректности оценивания.

Решение этой двукритериальной задачи минимизации будем искать в виде оптимизации по Парето [1]. В качестве нечеткого отношения корректности

$$h\left(\int_D I_j^{\varepsilon}(x) f(x)\, dx, Bz\right)$$

примем распределение

$$\varphi^{B\nu}\left(B\left(z-\int_D G(x) f(x)\, dx\right)\right)$$

нечеткой величины $B\nu$. Его можно выразить через $\varphi^{\nu}(\cdot)$ в виде

$$\varphi^{B\nu}\left(B\left(z-\int_D G(x) f(x)\, dx\right)\right)=\max_w\left\{\varphi^{\nu}(w)\,\middle|\, Bw=B\left(z-\int_D G(x) f(x)\, dx\right)\right\},$$

что эквивалентно

$$\varphi^{B\nu}\left(B\left(z-\int_D G(x) f(x)\, dx\right)\right)=\varphi^{\nu}\left(B^{-}B\left(z-\int_D G(x) f(x)\, dx\right)\right),$$

где B^{-} — вектор, псевдообратный к B. Подставив последнее выражение в (4), получим

$$\left\| BG(x)-I_j^{\varepsilon}(x)\right\| \to \min_B,$$

$$\sup_{f(x)}\min\left(\varphi^{\nu}\left(z-\int_D G(x) f(x)\, dx\right), \theta\varphi^{\nu}\left(B^{-}B\left(z-\int_D G(x) f(x)\, dx\right)\right)\right)\to \min_B. \tag{5}$$

Рассмотрим второй критерий задачи (5). Запишем

$$B^{-}B\left(z-\int_D G(x) f(x)\, dx\right) \tag{6}$$

в виде суммы $B^{-}Bz_{G_{\perp}}+B^{-}Bw_G(f(x))$, где

$$z_{G_{\perp}}=\left(E-\int_D G(x) G^{-}(x)\, dx\right)z;$$

$$w_G(f(x)) = \left(\int_D G(x)\, G^{-}(x)\, dx \right) z - \int_D G(x)\, f(x)\, dx \;;$$

E — тождественный оператор; $\int_D \cdot\, G^{-}(x)\, dx$ — оператор, псевдообратный к $\int_D G(x) \cdot dx$.

Величины z и $\int_D G(x)\, f\,(x)\, dx$ являются измеренными либо постоянными, выбор B на них не влияет. Однако выбор B влияет на слагаемые в выражении (6), в частности на величину $B^{-} B z_{G_\perp}$. Предположим, найдено B, которое является решением (5), и при этом $\left\| B^{-} B z_{G_\perp} \right\| > 0$. Из этого следует, что $R^{\perp}(G) \setminus N(B) \neq \varnothing$. Изменяя B, расширяем его ядро $N(B)$ так, чтобы новое ядро вектора B включало старое и $R^{\perp}(G) \subseteq N(B)$, т.е. теперь $R(B^{*}) \subseteq R(G)$. Очевидно, что при таком изменении B, расширяющем ядро $N(B)$, норма проекции (6) может быть либо уменьшена либо останется без изменений.

Соответственно величина второго критерия в (5) также либо уменьшится, либо останется без изменений. Посмотрим, как повлияет данное изменение вектора B на величину первого критерия задачи (5). Решением задачи $\left\| BG(x) - I_j^{\varepsilon}(x) \right\| \to \min\limits_{B}$ является

$$B = \int_D I_j^{\varepsilon}(x)\, G^{-}(x)\, dx + Q \left(E - \int_D G(x)\, G^{-}(x)\, dx \right),$$

где $Q = (q_1, ..., q_n)$ — вектор из пространства R^n. Очевидно, что выбирая Q так, чтобы $\left(E - \int_D G(x)\, G^{-}(x)\, dx \right)$ принадлежало $N(Q)$, получаем

$$B = \int_D I_j^{\varepsilon}(x)\, G^{-}(x)\, dx \tag{7}$$

и при этом $R^{\perp}(G) \subseteq N(B)$ [4]. Следовательно, при выборе B в виде (7) значения критериев оптимизации задачи (5) не только не ухудшатся, но, возможно, станут лучше.

Докажем, что (7) является искомым решением. Очевидно, что оператор (7) наилучшим образом минимизирует выражение $\left\| BG(x) - I_j^{\varepsilon}(x) \right\|$.

Покажем, что другие операторы не лучше минимизируют второй критерий задачи (5). Итак, для лучшей минимизации второго критерия задачи (5) следует выбрать такое B, чтобы $R^{\perp}(G) \subseteq N(B)$. При этом критерий примет вид

$$\theta C_n(B) = \sup_{f(x)} \min \left(\varphi^{\vee}\left(z - \int_D G(x) f(x)\, dx \right), \theta\varphi^{\vee}(B^{-} B w_G(f(x))) \right) \to \min_B. \tag{8}$$

На первый взгляд может показаться, что, изменяя значение B, можно повлиять на величину $B^{-} B w_G(f(x))$, аналогично тому, как это было сделано для $B^{-} B z_{G_{\perp}}$, и таким способом минимизировать значение $\theta C_n(B)$. Однако это не так, поскольку

$$w_G(f(x)) = \left(\int_D G(x) G^{-}(x)\, dx \right) z - \int_D G(x) f(x)\, dx,$$

т.е. $w_G(f(x))$ принадлежит пространству $R(G)$, а значит, можно найти $f(x)$, при котором $w_G(f(x)) = t_G$, где t_G — заранее заданный элемент пространства $R(G)$. В частности, если $G \equiv 0$, то $w_G(f(x)) = 0$ и, следовательно, $C_n(B) = 1$, при этом

$$B = \int_D I_j^{\varepsilon}(x) G^{-}(x)\, dx \equiv 0.$$

Однако этот частный случай является идеологически вырожденным, так как отсюда следует, что функционал (2) не несет полезной информации. В любом случае построенный вектор B практически сводит к нулю влияние погрешностей на оценку.

Таким образом, для любого оператора B, удовлетворяющего условию $R^{\perp}(G) \subseteq N(B)$, величина (7) не будет изменяться, так как посредством выбора значения $f(x)$ можно добиться, чтобы аргумент функции $\varphi^{\vee}(\cdot)$ имел ортогональную компоненту из пространства $R(G) \cap R(B^{*})$ с наперед заданной нормой.

Исключениями являются два случая. Первый, при $G \equiv 0$, описан выше и не противоречит найденному решению, второй — выбрать B таким, чтобы $R(G) \subseteq N(B)$ при $G \neq 0$.

Учитывая, что на B уже наложено условие $R^{\perp}(G) \subseteq N(B)$, получаем вектор $B \equiv 0$. В этом случае, действительно, $\theta C_n(B)$ достигает своего минимума и $C_n(B) = 1$. Но, во-первых, норма $\| BG(x) - I_j^{\varepsilon}(x) \|$ может не достигать своего минимума, так как $\| I_j^{\varepsilon}(x) \| \geq \| I_j^{\varepsilon}(x)(G^{-}(x) G(x) - E) \|$, а во-вторых, при $B \equiv 0$ обнуляются как информативная, так и шумовая составляющие полученных результатов.

Следовательно, случай $B \equiv 0$ при $G \neq 0$ также идеологически вырожденный и его можно не рассматривать, или к задаче (8) необходимо добавить условие исключения варианта $B \equiv 0$, если $G \neq 0$. Таким образом, решением задачи (8) является вектор B вида (7). При этом норма операторной невязки равна $\left\| I_j^{\varepsilon}(x)(G^{-}(x)\,G(x)-E)\right\|$, а необходимость корректности оценивания принимает вид

$$C_n = \theta \sup_{f(x)} \min\left(\varphi^{\nu}\left(z - \int_D G(x)\, f(x)\, dx\right),\ \theta\varphi^{\nu}(B^{-}Bw_G(f(x)))\right).$$

Решив задачу

$$\min\left(\varphi^{\nu}\left(z - \int_D G(x)\, f(x)\, dx\right),\ \theta\varphi^{\nu}(B^{-}Bw_G(f(x)))\right) \to \sup_{f(x)} \qquad (9)$$

и применив инволюцию θ к полученному решению, найдем величину необходимости корректности оценивания. Выражение

$$z - \int_D G(x)\, f(x)\, dx$$

можно разложить на сумму ортогональных компонент:

$$z - \int_D G(x)\, f(x)\, dx = w_{GB^{-}}(f(x)) + (w_{GB_{\perp}^{-}}(f(x)) + z_{G_{\perp}B_{\perp}^{-}}),$$

где $w_{GB^{-}}(f(x)) = B^{-}Bw_G(f(x))$; $w_{GB_{\perp}^{-}}(f(x)) = (E - B^{-}B)\, w_G(f(x))$; $z_{G_{\perp}B_{\perp}^{-}} = (E - B^{-}B)\, z_{G_{\perp}}$ ($B^{-}B\, z_{G_{\perp}} = 0$ по условию построения B). Поэтому решая задачу (9), можно выбрать $f(x)$ таким, что $w_{GB_{\perp}^{-}}(f(x)) = 0$, при этом оставляя значение $w_{GB^{-}}(f(x))$ без изменений. Учитывая, что по договоренности $\varphi^{\nu}(\cdot)$ монотонно убывает по норме аргумента, при таком выборе $f(x)$ увеличится значение

$$\varphi^{\nu}\left(z - \int_D G(x)\, f(x)\, dx\right)$$

и никак не изменится значение $\varphi^{\nu}(w_{GB^{-}}(f(x)))$.

Следовательно, задачу (9) можно переписать в виде

$$\min(\varphi^{\vee}(w_{GB^-}(f(x))+z_{G_\perp B_\perp^-}),\ \theta\varphi^{\vee}(w_{GB^-}(f(x))))\to\sup_{f(x)\in\Omega}, \qquad (10)$$

где $\Omega=\{f(x)\,|\,w_{GB_\perp^-}(f(x))=0\}$. Поскольку инволюция θ по определению является монотонно убывающей функцией на $[0,1]$, из (10) становится очевидным, что решение задачи не будет превышать некоторого числа $\alpha=\min\limits_{r\in[0,\,1]}(r,\theta(r))$, величина которого зависит от определения инволюции. Например, если задать инволюцию в виде линейной функции $\theta(r)=1-r$, $r\in[0,1]$, то получим $\alpha=1/2$, если задать инволюцию в виде гиперболы $\theta(r)=\dfrac{1-r}{2r+1}$, $r\in[0,1]$, то $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ и т. д.

Если вместо задачи (10) решать задачу

$$\min(\varphi^{\vee}(w_{GB^-}(f(x))),\ \theta\varphi^{\vee}(w_{GB^-}(f(x))))\to\sup_{f(x)\in\Omega},$$

то, очевидно, ее решение будет определяться множеством элементов

$$U=\{\tilde f\,|\min_{f(x)\in\Omega}|\varphi^{\vee}(w_{GB^-}(f(x)))-\alpha|\}, \qquad (11)$$

так как минимум выбирается между функцией $\varphi^{\vee}(\cdot)$ и дуальной к ней при одном и том же значении аргумента. Следовательно, для частного случая задачи (8), когда $z_{G_\perp B_\perp^-}=0$, получаем величину необходимости корректности оценивания

$$C_n=\theta\min(\varphi^{\vee}(w_{GB^-}(\tilde f)),\ \theta\varphi^{\vee}(w_{GB^-}(\tilde f))),\ \ \tilde f\in U. \qquad (12)$$

Рассмотрим возможность появления такого частного случая. Он гарантирован, если $R^{\perp}(G)\cap N(B)=\{0\}$. Поскольку ранее при построении B было наложено условие $R^{\perp}(G)\subseteq N(B)$, следует сделать вывод о том, что данный частный случай неизбежен только при $R^{\perp}(G)=N(G^-)=\{0\}$, из чего согласно теореме Банаха [4] следует, что существует оператор, обратный оператору $\int\limits_D G(x)\cdot dx$. Таким образом, если в равенстве (1) ядра $g_i(x)$ такие, что $\exists\, g_i^{-1}(x)$, то решением задачи (8) является вектор $B=\int\limits_D I_j^{\varepsilon}(x)\,G^{-1}(x)\,dx$. При этом норма операторной невязки равна нулю, а величина необходимости корректности оценивания вычисляется по формуле (12).

Поскольку неявно дана оценка функции $f(x)$ (множеством оценок (11)), исходя из априорного распределения $\varphi^{\nu}(\cdot)$ можно оценить состоятельность модели эксперимента. Если

$$\exists\, \hat{f} \in U : \varphi^{\nu}\left(z - \int_D G(x)\, \hat{f}(x)\, dx \right) > 0,$$

то модель эксперимента можно признать состоятельной, а любой элемент $\hat{f} \in U$ — состоятельной оценкой $f(x)$ в ε_j-окрестности заданной точки x_j. В противном случае модель эксперимента следует признать несостоятельной. По договоренности $\varphi^{\nu}(\cdot)$ является монотонно убывающей по норме аргумента функцией, поэтому для определенности можно выбрать оценку

$$\hat{f}(x) = \underset{\tilde{f}(x)\in U}{\arg\min} \left\| B^{-} B w_G(\tilde{f}(x)) \right\|. \qquad (13)$$

Очевидно, что если $\varphi^{\nu}\left(z - \int_D G(x)\, \hat{f}(x)\, dx \right) = 0$, то модель эксперимента следует признать несостоятельной, а в противном случае — состоятельной.

Выводы

Полученные оценки (13) можно использовать для дальнейшего восстановления функции в других точках, применяя стандартные подходы и получая решение в определенном классе функций по таблично заданным значениям. В то же время, можно расширять набор значений аргумента $x_1, \ldots, x_m$ новыми точками и применять описанный подход для получения все более точного представления о функции, которую необходимо восстановить.

A new method of reconstruction of functional relations has been developed. Instead of function's values this method uses its integral values with allowance for errors in the initial data. Errors in the data are represented with fuzzy values. The function value estimates are achieved due to solving the Pareto-optimization problem. The consistency criteria for the developed estimates have been determined.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бєлов Ю.А., Касьянюк В.С.* Математичні методи і алгоритми обробки в задачі інтерпретації непрямих вимірювань. — Київ : Науковий світ, 2000. — 79 с.
2. *Пытьев Ю.П.* Математические методы интерпретации эксперимента. — М. : Высшая школа, 1989. — 315 с.

3. *Пытьев Ю.П.* Возможность. Элементы теории и применения. — М. : Эдиториал УРСС, 2000. — 192 с.
4. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. — М. : Наука, 1965. — 520 с.

Поступила 17.01.13

ЗАВОРОТНЫЙ Андрей Леонидович, канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. факультета кибернетики Киевского национального университета им. Тараса Шевченко, который окончил в 1999 г. Область научных исследований — некорректные задачи, методы восстановления функциональных зависимостей, теория возможности, численные методы, проектирование измерительно-вычислительных систем сверхвысокого разрешения.

КАСЬЯНЮК Веда Станиславовна, канд. физ.-мат. наук, зав. сектором теоретической кибернетики факультета кибернетики Киевского национального университета им. Тараса Шевченко, который окончила в 1983 г. Область научных исследований — методы регуляризации некорректных задач, методы многокритериальной оптимизации, математические методы обработки и интерпретации измерений, измерительно-вычислительные системы сверхвысокого разрешения.