

Н.А.Шульга, Л.О.Григорьева, Н.О.Бабкова

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН ПРИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. П. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина, Киевский национальный университет
строительства и архитектуры, Воздухофлотский пр-т, 31, 03037, Киев, Украина
e-mail: l_grigoryeva@ukr.net*

Abstract. A numerical algorithm of analysis of planar non-stationary axisymmetric vibrations of piezoceramic polarized over the thickness ring plates under electric excitation is developed. The vibrations of circular plates with free sides are studied. A dependence of vibrations on a frequency of simultaneously applied harmonic electric excitation and a ratio of internal and external radiuses is established.

Key words: piezoelectrical ring plate, Nonstationary Electroelastic vibrations, electric excitation, numerical method.

Введение.

Пьезоэлектрические элементы пластинчатой формы являются наиболее распространенными электромеханическими преобразователями в широком частотном диапазоне и при импульсных электрических и механических возбуждениях [2, 5, 8, 15, 16 и др.]. Экспериментальным и теоретическим исследованиям их динамических характеристик посвящены многочисленные научные работы. Основное внимание в этих исследованиях уделяется установившимся гармоническим колебаниям и определению резонансных частот [1, 2, 9, 13, 14 и др.]. Вопросы нестационарных колебаний круглых дисков без учета связанности полей рассматривались в [3, 11]. Колебания поляризованных по толщине пьезокерамических тел при нестационарных нагрузках изучались в [6, 7, 10, 12]. Конфигурация преобразователей в плоскости на протекание волновых процессов при этом, естественно, не учитывалась. В случае тонких преобразователей это упущение можно устранить, если ограничиться теорией их механического деформирования в приближении плоского напряженного состояния и линейным распределением электрического потенциала по толщине [1, 2, 4, 6, 15]. В такой постановке в данной статье изучено динамическое осесимметричное электромеханическое состояние поляризованных по толщине пьезокерамических тонких круглых пластин при электрическом возбуждении. Проанализированы три варианта численных алгоритмов.

§1. Постановка задачи.

Рассмотрим поляризованную по толщине тонкую пьезокерамическую пластину с электродированными плоскостями $z = \pm h/2$. Механические напряжения σ_r, σ_θ при осесимметричной деформации определяются [1, 2] через перемещения u_r и напряженность электрического поля E_z по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \frac{u_r}{r} - (1+\nu_E)d_{31}E_z \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)} \left(\nu_E \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - (1+\nu_E)d_{31}E_z \right),\end{aligned}\quad (1.1)$$

в которых использованы соотношения для деформаций в цилиндрических координатах и $\nu_E = -s_{12}^E/s_{11}^E$.

Уравнение колебаний

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

после подстановки в него формул (1.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (1.3)$$

где $a = 1/\sqrt{(1-\nu_E^2)s_{11}^E\rho}$ – скорость волны в пластине.

В начальный момент времени задаются перемещения точек пластины и их скорости

$$u_r(r, t=0) = u^0(r), \quad \partial_t u_r(r, t=0) = u^1(r). \quad (1.4)$$

Для кольцевой пластины $R_0 < r < R_1$ возможные граничные условия на краях $r = R_0$ и $r = R_1$ следует выбирать по одной из двух альтернативных пар

$$\begin{aligned}u_r(R_0, t) = 0 \quad \vee \quad \sigma_r(R_0, t) = 0; \\ u_r(R_1, t) = 0 \quad \vee \quad \sigma_r(R_1, t) = 0.\end{aligned}\quad (1.5)$$

В случае сплошной пластины на внешнем крае

$$u_r(R_1, t) = 0 \quad \vee \quad \sigma_r(R_1, t) = 0, \quad (1.6)$$

а при $r = R_0 = 0$ из условия симметрии перемещение $u_r(0, t) = 0$.

После перехода к безразмерным величинам $\bar{r}R = r$; $\bar{t} = ta/R$; $\bar{u}_r R = u_r$, $\bar{\sigma}_{r,\theta} = \sigma_{r,\theta} s_{11}^E(1-\nu_E^2)$ формулы (1.1) для механических напряжений имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_r &= \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \nu_E \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}} - (1+\nu_E)d_{31}E_z, \\ \bar{\sigma}_\theta &= \nu_E \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}} - (1+\nu_E)d_{31}E_z,\end{aligned}\quad (1.7)$$

а уравнение колебаний (1.3) переходит в

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{t}^2}. \quad (1.8)$$

Граничные условия (1.5) принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{u}_r(\bar{R}_0, \bar{t}) = 0 \quad \vee \quad \bar{\sigma}_r(\bar{R}_0, \bar{t}) = 0, \\ \bar{u}_r(\bar{R}_1, \bar{t}) = 0 \quad \vee \quad \bar{\sigma}_r(\bar{R}_1, \bar{t}) = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

а начальные условия (1.4) имеют такой вид:

$$\bar{u}_r(\bar{r}, \bar{t} = 0) = R^{-1} u^0(\bar{r}), \quad \partial_{\bar{t}} \bar{u}_r(\bar{r}, \bar{t} = 0) = a^{-1} u^1(\bar{r}). \quad (1.10)$$

Далее знаки безразмерности будут опускаться.

Для тонких пластин электрический потенциал внутри пластины изменяется [1, 2, 14] по линейному закону $\varphi = V(t)z/h$ и тогда напряженность электрического поля

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \rightarrow E_z(t) = -\frac{V(t)}{h} \quad (1.11)$$

зависит только от времени.

§2. Построение разностных схем.

Для численного решения задачи (1.7), (1.8) при начальных условиях (1.10) и граничных условиях (1.9) вводится разбиение отрезка $R_0 < r < R_1$

$$\Omega = \{r_i = R_0 + i\Delta_r; \Delta_r = (R_1 - R_0)/n \ (i = 0, \dots, n)\}. \quad (2.1)$$

При замене производных по пространственной координате центральноразностными выражениями уравнение движения (1.8) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta_r^2} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2r_i \Delta_r} - \frac{u_i}{r_i^2}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (2.2)$$

Поскольку разностные уравнения (2.2) справедливы для внутренних точек $i = 1, \dots, n-1$, а в них входят перемещения на контуре $u_0(t)$ и $u_n(t)$, то эти последние должны быть определены из граничных условий (1.9).

При заданных на границах $r = R_0$ или $r = R_1$ перемещениях $u_r(R_0, t) = 0$ или $u_r(R_1, t) = 0$ значения $u_{0(t)}$ или $u_{n(t)}$ известны.

В случае заданных на границах напряжениях $\sigma_r(R_0, t) = 0$ или $\sigma_r(R_1, t) = 0$ значения u_0 и u_n необходимо определить. Для этого воспользуемся односторонними разностными аппроксимациями напряжений (1.7) в точках $i = 0$ и $i = n$. Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{r,0} &\cong \frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2\Delta_r} + \nu_E \frac{u_0}{r_0} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z = 0; \\ \sigma_{r,n} &\cong \frac{3u_n - 4u_{n-1} + u_{n-2}}{2\Delta_r} + \nu_E \frac{u_n}{r_n} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

откуда определяются значения $u_0(t)$ и $u_n(t)$ через u_1 , u_2 и u_{n-1} , u_{n-2} , соответственно:

$$\left(\frac{3}{2\Delta_r} - \frac{\nu_E}{r_0} \right) u_0 = \frac{4u_1 - u_2}{2\Delta_r} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z;$$

$$\left(\frac{3}{2\Delta_r} + \frac{\nu_E}{r_n}\right)u_n = \frac{4u_{n-1} - u_{n-2}}{2\Delta_r} + (1 + \nu_E)d_{31}E_z. \quad (2.4)$$

Отметим, что построенная разностная схема имеет порядок Δ_r^2 .

В случае заданных на границах напряжений $\sigma_r(R_0, t) = 0$ или $\sigma_r(R_1, t) = 0$ значения $u_0(t)$ и $u_n(t)$ можно также определить, используя следующие аппроксимации напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{r,0} &\cong \frac{u_1 - u_0}{\Delta_r} + \nu_E \frac{u_0}{r_0} - (1 + \nu_E)d_{31}E_z; \\ \sigma_{r,n} &\cong \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta_r} + \nu_E \frac{u_n}{r_n} - (1 + \nu_E)d_{31}E_z, \end{aligned} \quad (2.5)$$

имеющих порядок Δ_r . В таком случае значения $u_0(t)$ и $u_n(t)$ определяются через u_1 и u_{n-1} таким образом:

$$\begin{aligned} u_0 \left(\frac{1}{\Delta_r} - \frac{\nu_E}{R_0} \right) &= \frac{u_1}{\Delta_r} - (1 + \nu_E)d_{31}E_z; \\ u_n \left(\frac{1}{\Delta_r} - \frac{\nu_E}{R_1} \right) &= \frac{u_{n-1}}{\Delta_r} + (1 + \nu_E)d_{31}E_z. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для интегрирования по времени разбиваем исследуемый временной участок на интервалы длиной Δ_t и применяем общепринятые методы, например, явную численную схему. В явной схеме перемещения на $(k+1)$ -ом слое находятся по известному распределению перемещений на k -ом и $(k-1)$ -ом временных слоях следующим образом:

$$u_i^{k+1} = \Delta_t^2 \left[\left(\frac{1}{\Delta_r^2} + \frac{1}{2r_i\Delta_r} \right) u_{i+1}^k - \left(\frac{2}{\Delta_r^2} + \frac{1}{r_i^2} \right) u_i^k + \left(\frac{1}{\Delta_r^2} - \frac{1}{2r_i\Delta_r} \right) u_{i-1}^k \right] + 2u_i^k - u_i^{k-1}. \quad (2.7)$$

Для построения разностной схемы при численном решении системы (1.7), (1.8) при начальных условиях (1.10) и граничных условиях (1.9) можно также воспользоваться следующими аппроксимациями. Введем разбиение отрезка $R_0 < r < R_1$

$$\Omega = \{r_{i-0,5} = R_0 + (i-0,5)\Delta_r \mid \Delta_r = (R_1 - R_0)/n, i = 0, \dots, n+1\}, \quad (2.8)$$

которое включает в себя законтурные точки, которые находятся на расстоянии в половину шага сетки от концов интервала. При замене производных по пространственной координате центрально-разностными выражениями уравнение движения (1.3) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 u_{i+0,5}}{\partial t^2} = \frac{u_{i+1+0,5} - 2u_{i+0,5} + u_{i-0,5}}{\Delta_r^2} + \frac{u_{i+1+0,5} - u_{i-0,5}}{2r_{i+0,5}\Delta_r} - \frac{u_{i+0,5}}{r_{i+0,5}^2}, \quad i = 0 \dots n-1. \quad (2.9)$$

В аппроксимации уравнений (2.9) входят значения перемещений в законтурных точках $u_{-0,5}$ и $u_{n+0,5}$, которые необходимо определить из граничных условий.

Если при $r = R_0$ и $r = R_1$ заданы соответственно перемещения $u_r(R_0, t) = 0$ и $u_r(R_1, t) = 0$, тогда имеем $u_{-0,5} = -u_{0,5}$ и $u_{n+0,5} = -u_{n-0,5}$.

Если на границах $r = R_0$ и $r = R_1$ заданы соответственно напряжения $\sigma_r(R_0, t) = 0$ и $\sigma_r(R_1, t) = 0$, то используя аппроксимацию выражения (1.7) для напряжения σ_r , получим равенства

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\nu_E \Delta_r}{2R_0}\right) u_{-0,5} &= \left(1 + \frac{\nu_E \Delta_r}{2R_0}\right) u_{0,5} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z \Delta_r ; \\ \left(1 + \frac{\nu_E \Delta_r}{2R_1}\right) u_{n+0,5} &= \left(1 - \frac{\nu_E \Delta_r}{2R_1}\right) u_{n-0,5} + (1 + \nu_E) d_{31} E_z \Delta_r . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для интегрирования по времени разбиваем исследуемый временной участок на интервалы длиной Δ_t и применяем общепринятые методы, например, явную численную схему. В явной схеме перемещения на $(k+1)$ -ом слое находятся по известному распределению перемещений на k -ом и $(k-1)$ -ом временных слоях следующим образом

$$\begin{aligned} u_{i+0,5}^{k+1} &= \Delta_t^2 \left[\left(\frac{1}{\Delta_r^2} + \frac{1}{2r_{i+0,5} \Delta_r} \right) u_{i+0,5}^k - \left(\frac{2}{\Delta_r^2} + \frac{1}{r_{i+0,5}^2} \right) u_{i+0,5}^k + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\Delta_r^2} - \frac{1}{2r_{i+0,5} \Delta_r} \right) u_{i-0,5}^k \right] + 2u_{i+0,5}^k - u_{i+0,5}^{k-1} . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Вследствие условной устойчивости явной численной схемы шаг по времени в рекуррентных формулах (2.7), (2.11) должен быть в несколько раз меньше шага по пространственной координате. Обычно при принятом обезразмеривании достаточно принять $\Delta_t \approx 0,1 \Delta_r$. Значение перемещений на временных слоях $t_0 = 0$ и $t_1 = \Delta_t$ определяются из начальных условий (1.10).

Проведем анализ трех предложенных разностных аппроксимаций. В случае заданных на внешних поверхностях перемещений разбиение (2.1) является более удобным. При заданных на поверхности тела напряжениях при разбиении (2.1) получаем схему (2.2) – (2.4), которая на границе использует приближение производных первого порядка с помощью односторонних разностных выражений с порядком аппроксимации Δ_r^2 . Схема (2.2), (2.5), (2.6) более проста в записи, но включает в себя односторонние разностные выражения с порядком аппроксимации Δ_r . В случае заданных на торцах пластины напряжений более приемлемым является разбиение (2.8), для которого получаем схему (2.9) – (2.11). Эта схема включает в себя перемещения в контурных точках и имеет порядок точности Δ_r^2 . Таким образом, каждая из схем имеет свою сферу использования и свои преимущества и недостатки. Приведенные схемы показали хорошее совпадение при $n = 60$ ($\Delta_t = 0,1 \Delta_r$).

§3. Анализ полученных результатов.

Проведем анализ колебаний кольцевой пластины по трем описанным алгоритмам. Края пластины $r = R_0$ и $r = R_1$ примем свободными от напряжений. Для вычислений используем разбиение (2.8) и схему (2.9) – (2.11) с указанным выше ша-

гом. Материал пластины – пьезокерамика ЦТС-19, для которой материальные параметры следующие [1, 2]:

$$s_{11}^E = 15,2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н} ; c_{12}^E = -5,8 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н} ;$$

$$d_{13} = -125 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/Н} ; \varepsilon_{33}^S = 1360 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} ; \rho = 7740 \text{ кг/м}^3 .$$

Скорость распространения электроупругой волны в пластине $a = 3150 \text{ м/с}$. Толщина пластины $h = 2 \text{ мм}$, внутренний радиус $R_0 = 2 \text{ см}$, внешний $R_1 = 5 \text{ см}$. При расчетах принято $R = R_1$. Возмущение задается мгновенно приложенной при $t = 0$ разностью потенциалов $V(t) = V_0 H(t)$, где $H(t)$ – функция Хевисайда, V_0 – коэффициент нагружения.

Рис. 1 иллюстрирует динамику колебаний торцевых поверхностей пластины в безразмерных величинах. Внешняя поверхность $x = R_1$ перемещается только в положительной области в диапазоне 10^{-7} . Поверхность $x = R_0$ колеблется с диапазоном $1,5 \cdot 10^{-7}$, при этом наблюдается уменьшение внутреннего отверстия на $0,5 \cdot 10^{-7}$. Отметим, что приведенные численные схемы позволяют получать результат на относительно больших отрезках времени $\bar{t}_{\max} \approx 200$, что соответствует $t_{\max} \approx 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ с}$.

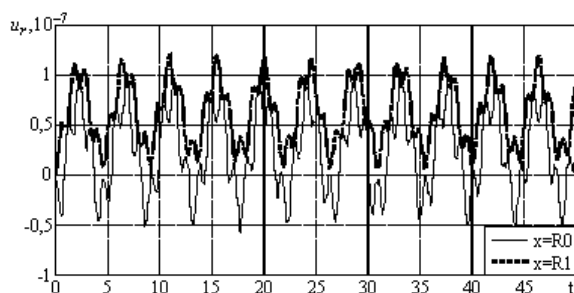


Рис. 1

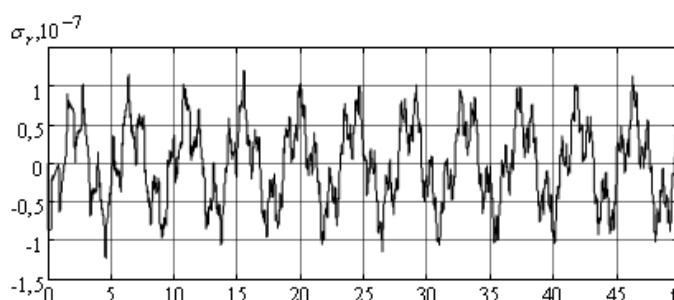


Рис. 2

Изменение радиальных напряжений σ_r на кривой $r = (R_0 + R_1)/2$ приведено на рис. 2. Динамические кривые для окружных напряжений σ_θ на торцевых поверхностях представлены на рис. 3. Диапазон изменения окружных напряжений на поверхности внутреннего торцевого отверстия в три раза выше, чем на внешней торцевой поверхности. Максимальные радиальные напряжения несколько меньше, чем максимальные напряжения в окружном направлении.

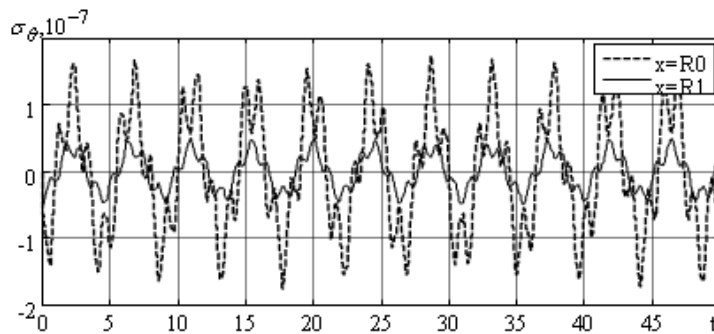


Рис. 3

Зависимость колебаний от соотношения радиусов кольцевой пластины исследуем на основе рис. 4, где приведены кривые безразмерных перемещений внутренней торцевой поверхности при разных значениях внутреннего радиуса. При внешнем радиусе $R_1 = 5$ см приведенные кривые соответствуют пластинам с внутренними радиусами $R_0 = 1$ см; $R_0 = 2$ см; $R_0 = 3$ см, соответственно. Как следует из рис. 4, при заданном нагружении диапазоны изменения значений перемещений для разных пластин мало отличаются. Периодичность движения соответствует изменению ширины рассматриваемых кольцевых пластин и времени пробега электроупругой волны. Полученные результаты обратно пропорционально зависят от толщины пластины h согласно (1.7), (1.11).

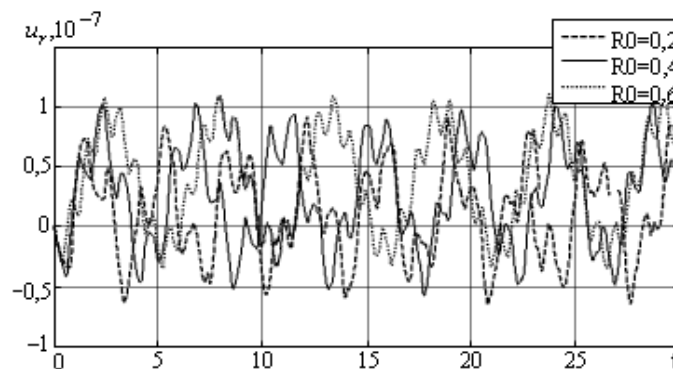


Рис. 4

Заключение.

В данной статье разработаны и реализованы различные алгоритмы численного решения задачи о нестационарных колебаниях круглых пьезоэлектрических пластин. Проведен анализ колебаний кольцевых пластин со свободными торцевыми поверхностями, установлена зависимость колебаний от частоты электрического возбуждения и соотношения внешнего и внутреннего радиусов пластины. Численные решения конкретных задач свидетельствуют о практической эквивалентности предложенных алгоритмов.

РЕЗЮМЕ. Розвинуто чисельний алгоритм аналізу планарних нестационарних осесиметричних коливань п'єзокерамічних поляризованих по товщині круглих пластин при електричному збуренні. Досліджено зміну динамічних характеристик електромеханічного стану кільцевої пластини, встановлено залежність характеру нестационарних коливань від частоти при миттєвому прикладанні електричного потенціалу та заданого відношення зовнішнього і внутрішнього радіусів пластини.

1. Шульга Н.А., Болкисев А.М. Колебания пьезоэлектрических тел. – К.: Наук. думка, 1990. – 228 с.
2. Шульга М.О., Карлаш В.Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – К.: Наук. думка, 2008. – 270 с.
3. *Andrushko N. F., Senchenkov I. K., Boichuk E. V.* Transient Waves in an Inelastic Disk Under Impulsive Radial Loading // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 11. – P. 1299 – 1305.
4. *Ashida F., Tauchert T. R.* Transient Response of a Piezothermoelastic Circular Disk under Axisymmetric Heating // *Acta Mech.* – 1998. – **128**. – P. 1 – 14.
5. *Dieulesaint E., Royer D.* Ondes Elastiques Dans Les Solides. Application au traitement du signal. T. 1. Paris: Elsevier Masson, 1997. – 328 p.
6. *Ding H. J., Chen W. Q.* Three Dimensional Problems of Piezoelectricity. – New York: Nova Science Publishers, 2001. – 532 p.
7. *Grigor'eva L. O.* Electromechanical Nonstationary Thickness Vibrations of a Piezoceramic Layer // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 2. – P. 159 – 164.
8. *Kubenko V.D., Yanchevskii I.V.* Vibrations of a Nonclosed Two-Layer Spherical Electroelastic Shell under Impulsive Electromechanical Loading // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 3. – P. 303 – 314.
9. *Mazon W.P.* Piezoelectricity, its history and applications // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1981. – **70**, N 6. – P. 1561 – 1566.
10. *Mančić D., Dimić V., Radmanović M.* Resonance Frequencies of PZT Piezoceramic Disks: A Numerical Approach // *Facta Universitatis Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics.* – 2002. – **3**, N 12. P. 431 – 442.
11. *Suzuki S. I.* Dynamic Elastic Response of a Ring to Transient Pressure Loading // *J. Appl. Mech.* – 1966. – **33**, N 2. – P. 230 – 235.
12. *Shulga M. O., Grigoryeva L. O.* Electromechanical nonstationary thickness vibrations of piezoceramic transformers at electric excitation // *Mechanical Vibrations: Types, Testing and Analysis.* – Nova Science Publishers, New York. – 2011. – P.179 – 204.
13. *Shul'ga N. A., Levchenko V. V., Makievskii O. I.* Nonaxisymmetric Electroelastic Vibrations of Piezoceramic Ring Plates with Radially Cut Electrodes // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 4. – P. 438 – 446.
14. *Shul'ga N. A., Levchenko V. V., Makievskii O. I.* Influence of Boundary Conditions on the Natural Frequencies of Nonaxisymmetric Electroelastic Vibrations of Piezoceramic Plates // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 5. – P. 592 – 601.
15. *Tiersten H. F.* Linear piezoelectric plate vibrations. – New York : Plenum Press, 1969. – 211 p.
16. *Tzou H. S., Ye R.* Piezothermoelasticity and Precision Control of Piezoelectric Systems: Theory and Finite Element Analysis // *J. Vib. Acoust.* – 1994. – **116**. – P. 489 – 495.

Поступила 30.11.2010

Утверждена в печать 03.12.2013