

В. П. Шевченко, Р. Н. Нескородев

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ**

*Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24, 83000, Донецк, Украина; e-mail: r.neskorodiev@donnu.edu.ua*

Abstract. In article the method of the numerical solution of problems linear viscoelasticity of the anisotropic body, not demanding obvious construction of analytical representation of kernels of creep and a relaxation is offered. The approached decision of the integrated equations is based on direct use of the experimental data preliminary smoothed and filled in richer grid. Results of numerical research of a viscoelastic stress state orthotropic plate weakened by an elliptic hole are submitted.

Key words: viscoelastic, creep, relaxation, fulfilment of experimental data, algebra of operators Volterra, resolvent operator, orthotropic plate.

Введение.

При решении граничных задач линейной теории вязкоупругости существенное значение имеет построение алгебры операторов Вольтерра. Для специального класса операторов с дробно экспоненциальными ядрами такой подход был представлен в работах Ю.Н. Работнова [8]. В работах [11, 12] предложена методика определения параметров наследственных ядер в вязкоупругой модели. Это делает возможным явное построение резольвенты по заданному ядру. Точное описание вязкоупругих свойств реальных тел приводит к операторам с ядрами более сложной природы. Для таких ядер построение резольвенты в аналитической форме приводит к непреодолимым трудностям. В работе [1] показано, что построение алгебры операторов Вольтерра не связано с каким-либо их специальным видом и может быть осуществлено для любых резольвентных операторов. Это обстоятельство делает возможным реализацию решений граничных задач теории вязкоупругости во времени проводить алгебраическими методами. Решение может быть осуществлено с использованием произвольных исходных операторов и выражено через значения этих операторов, заданных непосредственно таблицей экспериментальных данных.

Для решения задач линейной вязкоупругости анизотропных сред использовались методы цепных дробей [16, 17] и малого параметра [13-15]. В работах [6, 10] предложен новый подход к решению линейных задач вязкоупругости анизотропного тела, который не требует построения аналитического представления ядер ползучести и релаксации в специальной форме. Метод основан на численном определении резольвент интегральных уравнений состояния среды. Численное определение резольвент интегральных уравнений предполагает работу с табличными данными, заданными на достаточно густой сетке.

В настоящей работе предложен метод сглаживания и восполнения таблицы экспериментальных данных. На основе таких таблиц строятся матрицы уравнений состояния, элементы которых имеют явную зависимость от времени. Эти соотношения получены на основе алгебры резольвентных операторов Вольтерра, которые не связаны с каким-либо специальным видом ядер. Решение задач вязкоупругости в произвольный момент времени приводится к тем же алгоритмам, которые используются в теории упругости. Предложенным методом решена задача об обобщенном плоском напряженном состоянии анизотропной пластины для неограниченной среды, ослабленной отверстием с эллиптическим контуром. Решение является точным и доведено до численных результатов.

§1. Постановка задачи. Обращение интегральных уравнений линейной теории вязкоупругости.

Рассмотрим упругое равновесие анизотропного тела, отнесенного к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$. Ставится задача определения перемещений, напряжений и деформаций, возникающих в теле при его длительном нагружении внешними усилиями. В момент приложения внешних усилий или деформаций (время $t = 0$) упругие постоянные материала, из которого изготовлено тело, характеризуются матрицей \mathbf{A} (модулей упругости) или \mathbf{a} (коэффициентов деформации), а решение является упругим. Дальнейшее поддержание усилий или деформаций (время $t > 0$) приводит к тому, что материал продолжает деформироваться. Для описания этого процесса используем модели, учитывающие свойство материала деформироваться во времени [2]

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{R}(0)\mathbf{e}(t) + \int_0^t \frac{d\mathbf{R}(t-\tau)}{d(t-\tau)} \mathbf{e}(\tau) d\tau; \quad (1.1)$$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{P}(0)\mathbf{s}(t) + \int_0^t \frac{d\mathbf{P}(t-\tau)}{d(t-\tau)} \mathbf{s}(\tau) d\tau. \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{s}(t) = s_i(t) = [s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6]^T$, $\mathbf{e}(t) = e_k(t) = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6]^T$ – вектор-столбцы напряжений и деформаций в произвольный момент времени t ; $\mathbf{R} = R_{ij}$ и $\mathbf{P} = P_{ij}$ ($i, j = \overline{1, 6}$) – регулярные части матриц функций релаксации и ползучести. Они характеризуют вязкоупругий материал так же, как их упругие аналоги, т.е. модули упругости $\mathbf{R}(0) = \mathbf{A} = A_{ij}$ и коэффициенты деформации $\mathbf{P}(0) = \mathbf{a} = a_{ij}$ – характеризуют свойства упругого материала.

Закон Гука для упругой задачи получаем из (1.1) и (1.2) в предположении, что $t = 0$. В компактной форме он представляется так:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}. \quad (1.3)$$

($\boldsymbol{\sigma} = \sigma_i = s_i(0)$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_k = e_k(0)$ – векторы напряжений и деформаций в момент времени $t = 0$).

Мгновенные значения функций ползучести $\mathbf{P}(t=0) = \mathbf{a}$, релаксации $\mathbf{R}(t=0) = \mathbf{A}$, напряжений $\mathbf{s}(t=0) = \boldsymbol{\sigma}$ и деформаций $\mathbf{e}(t=0) = \boldsymbol{\varepsilon}$ показывают, что функции времени наделяются начальными значениями, являющимися решением упругой задачи.

Соотношения между модулями упругости и коэффициентами деформации в теории упругости имеют вид $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{a}$. Соответствующие соотношения между функциями ползучести и релаксации неверны. Однако, имеют место соотношения [4]

$$\mathbf{P}(0) = [\mathbf{R}(0)]^{-1}; \quad \mathbf{P}(\infty) = [\mathbf{R}(\infty)]^{-1} \quad (1.4)$$

для мгновенных и длительных модулей упругости и коэффициентов деформации. Численные соотношения между функциями ползучести и релаксации приведены в работах [6, 10]. Они имеют вид

$$\mathbf{R}_k = \left(\mathbf{I} - \sum_{i=1}^k \mathbf{R}_{k-i} (\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}) \right) \mathbf{A} \quad (k = 0, 1, \dots, N); \quad (1.5)$$

$$\mathbf{P}_k = \left(\mathbf{I} - \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_{k-i} (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i-1}) \right) \mathbf{a} \quad (k = 0, 1, \dots, N), \quad (1.6)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица, $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}(t_i)$, $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}(t_i)$, $\mathbf{P}_{k-i} = \mathbf{P}(t_k - t_i)$, $\mathbf{R}_{k-i} = \mathbf{R}(t_k - t_i)$ – значения функций в соответствующие моменты времени.

С помощью представлений (1.5) по экспериментально полученным значениям функции ползучести в точках сетки находим функции релаксации, а с помощью (1.6) – наоборот. Таким образом, соотношения (1.5) и (1.6) полностью решают задачу обращения уравнений (1.1) или (1.2).

Рассмотрим другой способ обращения уравнения состояния (1.2), записав его в форме

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{a} \left(\mathbf{I} \mathbf{s}(t) + \mathbf{A} \int_0^t \frac{d\mathbf{P}(t-\tau)}{d(t-\tau)} \mathbf{s}(\tau) d\tau \right). \quad (1.7)$$

Следуя Ю.Н. Работнову [8], введем символическую запись интегрального оператора Вольтерра следующим образом:

$$\mathbf{A} \int_0^t \frac{d\mathbf{P}(t-\tau)}{d(t-\tau)} \mathbf{s}(\tau) d\tau = \lambda \mathbf{P}^* \mathbf{s}(t), \quad (1.8)$$

где λ – регулярная точка оператора \mathbf{P}^* .

Тогда уравнение (1.7) можно представить в форме

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{a} (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{P}^*) \mathbf{s}(t). \quad (1.9)$$

Решим уравнение (1.9) относительно функции $\mathbf{s}(t)$ формально, поступая с операторами так же, как с постоянными множителями. Получим следующую запись:

$$\mathbf{s}(t) = (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{P}^*)^{-1} \mathbf{a}^{-1} \mathbf{e}(t) = [\mathbf{I} - \lambda \mathbf{R}^*(-\lambda)] \mathbf{A} \mathbf{e}(t). \quad (1.10)$$

Оператор $(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{P}^*)^{-1}$ называется обратным или резольвентой, а оператор $\mathbf{R}^*(-\lambda)$ – резольвентным для \mathbf{P}^* [1].

В работе [8] построена алгебра операторов Вольтерра для специального класса операторов с дробно-экспоненциальными ядрами. В статье [1] показано, что построение алгебры операторов Вольтерра не связано с каким либо специальным видом ядра и может быть осуществлено для любых резольвентных операторов. Интегральные операторы с произвольными ядрами обладают теми же свойствами, которые были доказаны для операторов с дробно-экспоненциальными ядрами. Приведем эти свойства [1].

Свойство 1. (Теорема умножения) Для любых регулярных точек λ и μ имеют место равенства

$$\mathbf{R}^*(\lambda) \mathbf{R}^*(\mu) = [\mathbf{R}^*(\lambda) - \mathbf{R}^*(\mu)] / (\lambda - \mu) \quad (\lambda \neq \mu); \quad \mathbf{R}^*(\lambda) \mathbf{R}^*(\lambda) = \partial \mathbf{R}^*(\lambda) / \partial \lambda. \quad (1.11)$$

Свойство 2. Для любого резольвентного оператора $\mathbf{R}^*(\lambda)$ имеет место формула обращения

$$[\mathbf{I} - \delta \mathbf{R}^*(\lambda)]^{-1} = \mathbf{I} + \delta \mathbf{R}^*(\lambda + \delta). \quad (1.12)$$

Свойство 3. (Теорема о степенях) Возведение в степень резольвентного оператора равносильно дифференцированию по параметру

$$[\mathbf{R}^*(\lambda)]^n = \frac{1}{(n-1)!} \partial^{n-1} \mathbf{R}^*(\lambda) / \partial \lambda^{n-1}. \quad (1.13)$$

Кроме указанных выше свойств, формулы М. И. Розовского [1] для дробно-экспоненциальных операторов полностью переносятся на произвольные резольвентные операторы.

Интегральные операторы вязкоупругости являются взаимно резольвентными. Это следует из однозначной взаимнообратимости уравнений состояния (1.1) и (1.2). Из этого факта и свойств (1.11) – (1.13) следует, что при решении граничных задач вязкоупругости нет нужды строить конкретный вид резольвентных операторов и изучать их свойства. Процедура построения решения связана с алгебраическими свойствами

операторов и может быть осуществлена независимо от их вида. Решение выражается через значения резольвентного оператора. Покажем, что реализация решений граничных задач вязкоупругости может быть осуществлена без каких либо конкретных аналитических заданий исходных операторов. Рассмотрим установившуюся ползучесть. В этом случае деформация ползучести осуществляется при постоянных во времени напряжениях. Если нагрузки постоянны, то при решении конкретных задач напряжения $\mathbf{s}(\tau)$ в (1.8) можно принять зависимыми от верхнего предела. Оператор (1.8) представим в виде произведения оператора $\lambda \mathbf{P}^* \bullet 1$ на напряжение $\mathbf{s}(t)$. Таким образом, имеем

$$\lambda \mathbf{P}^* \bullet 1 = \mathbf{A} \int_0^t \frac{d\mathbf{P}(t-\tau)}{d(t-\tau)} d\tau = -\mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{P}(t), \text{ а уравнение (1.9) в этом случае примет вид}$$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{s}(t). \quad (1.14)$$

Аналогичным образом, рассматривая символический способ обращения уравнения (1.1) при постоянной деформации, получим уравнение состояния

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{e}(t). \quad (1.15)$$

Здесь функция релаксации определяется формулами (1.5).

Из соотношений (1.14) и (1.9), а также из (1.15) и (1.10) определим значения резольвентных операторов

$$\lambda \mathbf{P}^* = \mathbf{A}\mathbf{P}(t) - \mathbf{I}; \quad \lambda \mathbf{R}^*(-\lambda) = \mathbf{I} - \mathbf{R}(t)\mathbf{a}. \quad (1.16)$$

Соотношения (1.16) связывают интегральные операторы \mathbf{P}^* и $\mathbf{R}^*(-\lambda)$ с функциями ползучести и релаксации $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{R}(t)$, заданными таблично. Это обстоятельство позволяет, используя свойства интегральных операторов (1.11) – (1.13), производить соответствующие действия с функциями ползучести и релаксации, заданными таблично.

Отметим, что при использовании формул (1.5) или (1.6) для увеличения точности вычислений необходимо осуществить математическую обработку табличных данных, т.е. провести сглаживание кривой и увеличить число точек N разбиения отрезка $[0, t]$.

§2. Метод сглаживания и восполнения таблиц экспериментальных данных.

Функции ползучести $\mathbf{P}(t)$ или релаксации $\mathbf{R}(t)$ строим на основании табличных данных, которые определяются при проведении эксперимента. Таблица экспериментальных данных может содержать погрешности измерений, которые обусловлены различными причинами. Поэтому данные таблицы должны подлежать определенной математической обработке. Эта задача тесно связана с задачей сглаживания и восполнения, когда по заданным точкам измерения (t_k, ε_k) необходимо провести гладкую кривую $w(t)$ при минимальной погрешности. При этом в качестве функции $w(t)$ выбирают выражение, которое соответствует ожидаемому поведению рассматриваемого физического процесса. Установлено, что функции ползучести должны быть монотонно возрастающими, а функции релаксации – монотонно убывающими функциями времени [2, 4]. Если уровень нагрузок меньше предела прочности материала, то развитие деформаций практически полностью прекращаются при достижении определенного времени. В этом случае имеет место затухающий процесс, а представление для функции $w(t)$ следует выбирать в виде ряда, содержащего затухающую экспоненциальную функцию, т.е.

$$w(t) = \left(1 + \sum_{k=1}^m a_k t^{\alpha k} \right) \exp(-\beta t^\alpha). \quad (2.1)$$

В представлении (2.1) подлежат определению величины α , β и a_k и процесс аппроксимации носит название – нелинейное приближение.

Пусть на отрезке $[0, t]$ задана дискретная сетка значений временной переменной $t: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$. В узлах сетки даны экспериментально полученные значения

функции $\varepsilon(t) : \varepsilon(t_0) = \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \varepsilon(t)$. Необходимо осуществить вычисление величин α , β и a_k так, чтобы функция (2.1) сглаживала кривую, заданную таблицей и, используя эту функцию, провести восполнение таблицы.

Алгоритм сглаживания таблицы исходных экспериментальных данных основан на использовании дискретного метода наименьших квадратов. Потребуем, чтобы исконая сглаживающая функция минимизировала функционал

$$\Phi(a_1, a_2, \dots, a_m, \alpha, \beta) = \sum_{p=0}^n [w(t_p) - \varepsilon_p]^2. \quad (2.2)$$

Приравнявая производные по коэффициентам a_k нулю, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно этих коэффициентов. Эту систему решаем при варьировании величин α и β для достижения выполнения условия (2.2). После поиска постоянных α , β и a_k определена функция, позволяющая осуществить гладкое восполнение сеточных значений в любой точке отрезка $[0, t]$.

В качестве примера проведем обработку данных эксперимента, приведенного в работе [9] для стеклотекстолита ТС8/3-250. Опыты выполнены при постоянной нагрузке. Приведем случай, когда уровень нагрузки был равным 0,3 от предела прочности σ_p материала для самого показательного направления ($\theta = 45^\circ$) к основе ткани. Испытания проведены до практически полного прекращения развития деформаций. Данные работы [9] для указанного случая, отнесенные к величине ε_0 , приведены в табл. 1.

Таблица 1

t , час	0	12	24	48	120	240	360	504
$\varepsilon_k / \varepsilon_0$	1,000	1,200	1,271	1,336	1,432	1,542	1,632	1,684
t , час	624	744	864	1008	1128	1248	1320	1400
$\varepsilon_k / \varepsilon_0$	1,736	1,755	1,774	1,826	1,832	1,838	1,839	1,839

Для $m = 4$ функция наилучшего приближения (2.1) получена при таких параметрах: $\alpha = 0,476$; $\beta = 0,068$; $a = [0,1503; 0,0005; 0,0003; 0]$.

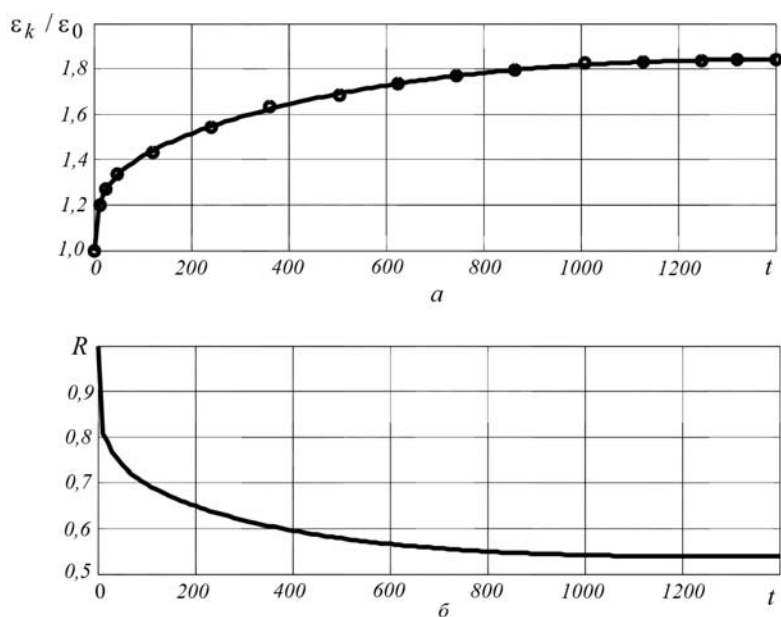


Рис. 1

На рис. 1, *a* кружочками отмечены данные табл. 1, а сплошной линией дана кривая функции ползучести (2.1). На рис. 1, *б* приведена кривая релаксации, соответствующая кривой рис. 1, *a* и вычисленная по формулам (1.5). Точность вычислений контролировали перерасчетом по формулам (1.6). Вычисленные значения таблицы сравнивали со значениями исходной таблицы P_k поточечно. В результате максимальная по абсолютному значению погрешность имеет порядок 10^{-15} . Кроме того, с большой точностью выполняются условия (1.4).

Таким образом, решение граничных задач вязкоупругости сводится к решению задач теории упругости в произвольный момент времени. При этом уравнения закона Гука заменяются уравнениями состояния (1.1), (1.2), которые в результате интегрирования принимают вид (1.15) и (1.14), соответственно. Отметим, что уравнения состояния (1.14) следует использовать, когда на границе тела заданы нагрузки, а уравнения (1.15) – когда заданы перемещения или деформации. Далее рассмотрим апробацию предложенного метода на примере решения граничных задач в условиях обобщенного плоского напряженного состояния пластины.

§3. Обобщенное плоское напряженное состояние пластины.

Рассмотрим упругое равновесие анизотропной пластины толщиной $2h$. Отнесем ее к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ так, чтобы ее срединная плоскость совпала с плоскостью Ox_1x_2 , а ось Ox_3 направим по нормали к срединной плоскости. Предполагаем, что пластина находится в условиях обобщенного плоского напряженного состояния. Уравнения закона Гука для средних напряжений и деформаций в этом случае можно записать в форме (1.3), где введены векторы-столбцы напряжений и деформаций

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}]^T = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6]^T; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}]^T = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_6]^T,$$

а матрицы коэффициентов деформации и модулей упругости имеют вид

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \mathbf{a}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{pmatrix}.$$

Указанные уравнения закона Гука вместе с уравнениями равновесия без учета объемных сил $\partial_1\sigma_1 + \partial_2\sigma_6 = 0$, $\partial_1\sigma_6 + \partial_2\sigma_2 = 0$ и уравнениями связи между составляющими деформации и перемещений $\varepsilon_1 = \partial_1u_1$; $\varepsilon_2 = \partial_2u_2$; $\varepsilon_6 = \partial_1u_2 + \partial_2u_1$; $\partial_i = \partial / \partial x_i$, образуют полную систему дифференциально-алгебраических соотношений, описывающих упругие процессы в анизотропной пластине.

Выбрав в качестве неизвестных функций вектор упругих перемещений $\mathbf{u} = [u_1, u_2]$, приходим к системе дифференциальных уравнений относительно этих функций

$$L_{11}u_1 + L_{12}u_2 = 0; \quad L_{21}u_1 + L_{22}u_2 = 0 \quad (3.1)$$

$$(L_{11} = A_{11}\partial_1^2 + 2A_{16}\partial_1\partial_2 + A_{66}\partial_2^2; \quad L_{22} = A_{66}\partial_1^2 + 2A_{26}\partial_1\partial_2 + A_{22}\partial_2^2; \quad (3.2)$$

$$L_{12} = L_{21} = A_{16}\partial_1^2 + (A_{12} + A_{66})\partial_1\partial_2 + A_{26}\partial_2^2).$$

Общее решение системы уравнений (3.1) выражается через две произвольные аналитические функции $\Phi_j(z_j)$ обобщенных комплексных переменных $z_j = x_1 + \mu_j x_2$ [6]

$$u_k^* = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 R_{kj} \Phi_j(z_j). \quad (3.3)$$

Комплексные параметры $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$ являются решением характеристического уравнения четвертого порядка

$$l_{11}(\mu) l_{22}(\mu) - l_{12}(\mu) l_{21}(\mu) = 0. \quad (3.4)$$

Это уравнение получено из системы (3.1), а величины l_{ik} определены из операторов (3.2) заменой операций дифференцирования ∂_1 и ∂_2 величинами 1 и μ , соответственно. Коэффициенты R_{kj} определены из соотношений $R_{kj} = R_{kj}^* / \Delta_j$, где

$$R_{1j}^* = l_{22}(\mu_j) = A_{66} + 2A_{26}\mu_j + A_{22}\mu_j^2; \quad R_{2j}^* = -l_{21}(\mu_j) = -[A_{16} + (A_{12} + A_{66})\mu_j + A_{26}\mu_j^2];$$

$$\Delta_j = A_{21}R_{1j}^* + A_{26}R_{2j}^* + \mu_j(A_{22}R_{2j}^* + A_{26}R_{1j}^*).$$

В соответствии с решением (3.3) представления для напряжений примут вид

$$\sigma_1^* = 2 \operatorname{Re}(\mu_1^2 \Phi_1' + \mu_2^2 \Phi_2'); \quad \sigma_2^* = 2 \operatorname{Re}(\Phi_1' + \Phi_2'); \quad \sigma_6^* = -2 \operatorname{Re}(\mu_1 \Phi_1' + \mu_2 \Phi_2'). \quad (3.5)$$

Отметим, что решение (3.3) выписано для случая, когда параметры μ_j различны. В случае, когда пластина изотропна или уравнение (3.4) имеет равные комплексные параметры $\mu_1 = \mu_2$, при решении граничных задач можно использовать соотношения (3.3), (3.5) с учетом методики, предложенной в работе [18].

Таким образом, смещения и напряжения, отражающие влияние отверстий, выражены через две функции обобщенных комплексных переменных $\Phi_j(z_j)$ и их производные $\Phi_j'(z_j) = d\Phi_j/dz_j$. Плоскость Ox_1x_2 , в которой определены эти функции, обозначим буквой S . Функции $\Phi_j(z_j)$ можно рассматривать как функции обычных комплексных переменных $z_j = x_j + i y_j$, где

$$x_j = x_1 + \alpha_j x_2; \quad y_j = \beta_j x_2; \quad \mu_j = \alpha_j + i\beta_j. \quad (3.6)$$

При этом комплексные потенциалы $\Phi_j(z_j)$ должны быть определены не в области S , а в областях S_j ($j = \overline{1, 2}$), полученных из области S аффинными преобразованиями (3.6).

3.1. Упругая задача для пластины с отверстиями. Рассмотрим решение задачи для пластины, ослабленной отверстиями, когда на бесконечности заданы усилия

$$\sigma_1^0 = p; \quad \sigma_2^0 = q; \quad \sigma_6^0 = t. \quad (3.7)$$

Функции, определяющие перемещения и деформации в пластине без отверстий, представлены в форме

$$u_1^0 = \varepsilon_1^0 x_1 + \frac{\varepsilon_6^0}{2} x_2; \quad u_2^0 = \frac{\varepsilon_6^0}{2} x_1 + \varepsilon_2^0 x_2; \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_1^0 = a_{11}p + a_{12}q + a_{16}t; \quad \varepsilon_2^0 = a_{21}p + a_{22}q + a_{26}t; \quad \varepsilon_6^0 = a_{61}p + a_{62}q + a_{66}t.$$

Поле перемещений и напряжений, которое формируется за счет появления в пластине отверстий, описывается функциями (3.3), (3.5). Определение этих функций осуществляем согласно граничным условиям на контурах отверстий. Рассмотрим два вида таких условий.

Контур не подкреплен. Функции $\Phi_j(z_j)$ определим из условий на контурах:

$$n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_6 = 0; \quad n_1 \sigma_6 + n_2 \sigma_2 = 0. \quad (3.9)$$

Здесь $\sigma_i = \sigma_i^0 + \sigma_i^*$, где σ_i^0 – напряжения в сплошной пластине (3.7), а σ_i^* – компоненты напряжений (3.5), которые учитывают влияние отверстий; $n_1 = \cos(n, x_1)$, $n_2 = \cos(n, x_2)$, n – внешняя нормаль к контуру.

Подставим в условия (3.9) значения для σ_i^* и σ_i^0 . После несложных преобразований получим граничные условия для нахождения функций $\Phi_j(z_j)$:

$$2 \operatorname{Re} [\mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2] = tx - py + c_1; \quad 2 \operatorname{Re} [\Phi_1 + \Phi_2] = ty - qx + c_2. \quad (3.10)$$

Контур жестко подкреплен. При жестко подкрепленных контурах на их боковой поверхности нужно положить равными нулю перемещения

$$u_k = 0 \quad (k = \overline{1, 2}). \quad (3.11)$$

Здесь $u_k = u_k^0 + u_k^*$, где u_k^0 – перемещения (3.8), а u_k^* – проекции перемещений (3.3).

Из условий (3.11) получим граничные условия для функций $\Phi_j(z_j)$:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 R_{kj} \Phi_j(z_j) = -u_k^0 \quad (k = \overline{1, 2}). \quad (3.12)$$

3.2. Пластина с эллиптическим отверстием. Рассмотрим случай, когда пластина ослаблена одним отверстием эллиптического сечения. Полуоси эллипса a и b . Уравнение контура L в параметрической форме имеет вид $x_1 = a \cos(\theta)$; $x_2 = b \sin(\theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).

Уравнения эллиптических контуров L_j в областях S_j представим так:

$$t_j = x_1 + \mu_j x_2 = R_j \sigma + m_j / \sigma \quad (3.13)$$

$$[R_j = (a - i\mu_j b) / 2; \quad m_j = (a + i\mu_j b) / 2; \quad \sigma = \cos(\theta) + i \sin(\theta)].$$

Функция, отображающая внешность единичного круга на внешность эллиптического контура L_j , на основании формулы (3.13) принимает вид

$$z_j = R_j \zeta_j + m_j / \zeta_j \quad (\zeta_j = r_j \sigma; \quad r_j \geq 1). \quad (3.14)$$

Из соотношений (3.13) и (3.14) видно, что на контуре единичного круга имеем равенство $\zeta_j = \sigma$. Это обстоятельство дает возможность для кругового или эллиптического контура получить точное решение задачи. Представим функцию $\Phi_j(z_j)$ в виде

$$\Phi_j(z_j) = a_j / \zeta_j, \quad (3.15)$$

где переменная ζ_j связана с z_j зависимостями (3.14).

Методом рядов из граничных условий (3.10) и (3.12) получим системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов функции (3.15):

для неподкрепленного контура –

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 = (ta - pbi) / 2; \quad a_1 + a_2 = (tbi - qa) / 2;$$

для жестко подкрепленного контура –

$$R_{11} a_1 + R_{12} a_2 = -(\varepsilon_1^0 a + \varepsilon_6^0 bi / 2) / 2; \quad R_{21} a_1 + R_{22} a_2 = -(\varepsilon_6^0 a / 2 + \varepsilon_2^0 bi) / 2.$$

Решение вязкоупругой задачи проводим аналогичным образом, но вместо закона Гука (1.3) выбираем уравнения состояния (1.14) в случае, когда контур не подкреплен, и (1.15), когда контур жестко подкреплен.

§4. Формирование матриц $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{R}(t)$ уравнений состояния (1.14) и (1.15).

В качестве примера рассмотрим задачу определения значений интегральных операторов, входящих в уравнения состояния для случая обобщенного плоского напряженного состояния изотропной пластинки. Для этого используем свойства резольвентных операторов (1.11) – (1.13). Матрица \mathbf{a} формируется с помощью технических упругих постоянных ν , E и G , которые в процессе длительного нагружения пластинки заменяются временными интегральными операторами

$$\bar{\nu} = \nu(1 + P_\nu^*); \quad \bar{E} = E(1 - R_E^*); \quad \bar{G} = G(1 - R_G^*). \quad (4.1)$$

Отметим, что из экспериментов на ползучесть или релаксацию определяются операторы именно технических упругих постоянных. Из операторов (4.1) формируется матрица $\mathbf{P}(t)$ с элементами

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{16} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{26} \\ \bar{a}_{61} & \bar{a}_{62} & \bar{a}_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\bar{E} & -\bar{\nu}/\bar{E} & 0 \\ -\bar{\nu}/\bar{E} & 1/\bar{E} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\bar{G} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Предположим, что из опыта получена кривая ползучести для коэффициента Пуассона $\bar{\nu} = \nu p_\nu(t)$. Здесь $p_\nu(t)$ – таблично заданная кривая ползучести для коэффициента ν . В соответствии с соотношениями (4.1) запишем

$$\bar{\nu} = \nu(1 + P_\nu^*) = \nu p_\nu(t). \quad (4.3)$$

Согласно (4.3), значения интегрального оператора определяются формулой $P_\nu^* = p_\nu(t) - 1$.

Аналогичным образом определяются интегральные операторы R_E^* и R_G^* по заданным кривым релаксации $r_E(t)$ и $r_G(t)$. Отметим, что по заданным функциям $p_\nu(t)$, $r_E(t)$ и $r_G(t)$ соответствующие функции релаксации и ползучести $r_\nu(t)$, $p_E(t)$ и $p_G(t)$ определяются соотношениями (1.5) и (1.6).

Если экспериментальные значения величины \bar{E} не известны, то они могут быть определены согласно предположению, что оператор объемного сжатия является постоянной величиной [8]. Это означает, что имеет место равенство

$$\frac{1 - 2\bar{\nu}}{\bar{E}} = \frac{1 - 2\nu}{E}, \quad (4.4)$$

из которого определим величины

$$\bar{E} = E \frac{1 - 2\bar{\nu}}{1 - 2\nu} = E \frac{1 - 2\nu p_\nu(t)}{1 - 2\nu} = E r_E(t); \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{\bar{E}} = \frac{1}{E} \frac{1 - 2\nu}{1 - 2\bar{\nu}} = \frac{1}{E} \frac{1}{1 - \delta P_\nu^*} = \frac{1}{E} [1 + \delta P_\nu^*(\delta)] = \frac{1}{E} p_E(t); \quad \delta = 2\nu / (1 - 2\nu). \quad (4.6)$$

Из (4.5) находится функция $r_E(t)$. По формулам (1.6) вычисляется $p_E(t)$, а из соотношений (4.6) имеем

$$P_\nu^*(\delta) = [p_E(t) - 1] / \delta. \quad (4.7)$$

Для операторов (4.1) получим формулы

$$-\frac{\bar{\nu}}{\bar{E}} = -\frac{\nu}{E} (1 + P_\nu^*) [1 + \delta P_\nu^*(\delta)] = -\frac{\nu}{E} [1 + (1 + \delta) P_\nu^*(\delta)]; \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{\bar{G}} = \frac{2(1 + \bar{\nu})}{\bar{E}} = \frac{2(1 + \nu)}{E} (1 + \delta_1 P_\nu^*) [1 + \delta P_\nu^*(\delta)] = \frac{1}{G} [1 + (\delta_1 + \delta) P_\nu^*(\delta)]; \quad \delta_1 = \nu / (1 + \nu).$$

Таким образом, для компонент матрицы (4.2) получаем соотношения (4.6) и (4.8), в которых интегральный оператор $P_v^*(\delta)$ следует заменить его значением по формуле (4.7). После определения матрицы ползучести $\mathbf{P}(t)$ матрицу релаксации $\mathbf{R}(t)$ построим путем использования соотношений (1.5).

Как видно, в предложенной методике не ставится вопрос о выборе ядер ползучести или релаксации для реальных материалов, обладающих ползучестью.

При решении граничных задач анизотропной теории вязкоупругости возникают трудности, связанные с экспериментальным определением реологических параметров материалов. Опытные данные, которые имеются в литературе, не содержат полной информации о величинах, необходимых для решения задач вязкоупругости. В случае изотропного материала широко применяется гипотеза об упруго сжимаемом материале, из которой следуют зависимости (4.4). Это предположение позволяет уменьшить количество операторов, которые должны быть известны из опытов. В работе [7] для ортотропных материалов введены предположения, которые аналогичны гипотезе, принятой для изотропного тела.

Таким образом, на основе свойств резольвентных операторов для интегральных уравнений с ядрами произвольного вида, предложен метод получения решения задач вязкоупругости путем использования непосредственно экспериментальных данных, заданных таблично. Предварительно табличные данные подвергаются сглаживанию и восполнению.

§5. Численные исследования.

Апробация предложенного метода осуществлена проведением численных исследований для изотропной и ортотропной пластин с неподкрепленным и жестко подкрепленным контуром. Результаты для изотропной пластины получены методом, предложенным в данной работе, при использовании методики, изложенной в [18].

В [5] представлено решение упругой задачи для бесконечной изотропной пластины, ослабленной круговым отверстием радиуса R , когда на бесконечности заданы усилия $\sigma_1^0 = p$, $\sigma_2^0 = q$, $\sigma_6^0 = 0$. Решение представлено в полярной системе координат в виде явной зависимости перемещений и напряжений от упругих постоянных. Это дает возможность построить точное решение вязкоупругой задачи методом Вольтерра и провести численные исследования. Решение этой задачи в случае, когда контур не подкреплен или жестко подкреплен, приведено в [10]. Результаты исследований использованы в виде теста при решении этой же задачи методом, предложенным в настоящей работе. Сравнение результатов, полученных методом Вольтерра и предложенным в данной работе, показало их полное совпадение.

Результаты, полученные для ортотропной пластинки, изготовленной из композитного материала на основе эпоксидного связующего со следующими упругими и реологическими параметрами [3]:

$$E_1 = 23,0 \cdot 10^3 \text{ МПа}; \quad \lambda_1 = 0,0323 c^{-(1+\alpha)}; \quad \beta_1 = 0,1570 c^{-(1+\alpha)}; \quad \nu_{12} = 0,11;$$

$$E_2 = 16,0 \cdot 10^3 \text{ МПа}; \quad \lambda_2 = 0,1295 c^{-(1+\alpha)}; \quad \beta_2 = 0,2745 c^{-(1+\alpha)}; \quad \nu_{21} = 0,0765;$$

$$G_{12} = 3,08 \cdot 10^3 \text{ МПа}; \quad \lambda_g = 0,0717 c^{-(1+\alpha)}; \quad \beta_g = 0,0276 c^{-(1+\alpha)}; \quad \alpha = -0,846,$$

сопоставлены с данными, полученными в [20] для тонкой бесконечной пластинки с эллиптическим отверстием, свободным от нагружения. На пластинку действуют растягивающие на бесконечности усилия $\sigma_1^0 = p \cos^2 \varphi$, $\sigma_2^0 = p \sin^2 \varphi$, $\sigma_6^0 = p \sin \varphi \cos \varphi$ (φ – угол между направлением растягивающих усилий интенсивности p и положительным направлением оси Ox_1). Соотношение полуосей эллипса $a/b = 2$.

На рис. 2 сплошной линией показаны изменения максимальных напряжений σ_θ/p , возникающих в точке контура, соответствующей $\theta = 90^\circ$ при $\varphi = 0^\circ$, полу-

ченные по предложенной методике. Значения напряжений в этой точке для некоторых моментов времени, согласно работе [20] обозначены точками. Штриховой линией показаны результаты рассматриваемой задачи в упрощенной постановке, когда учитывается только сдвиговая ползучесть, т.е. $\bar{E}_1 = E_1$, $\bar{E}_2 = E_2$.

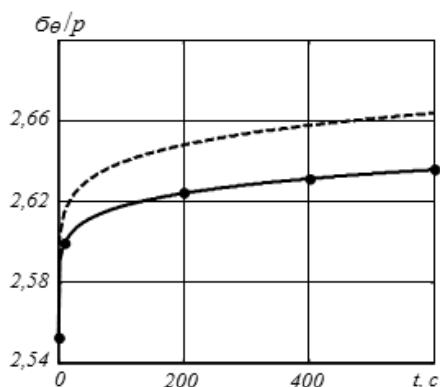


Рис. 2

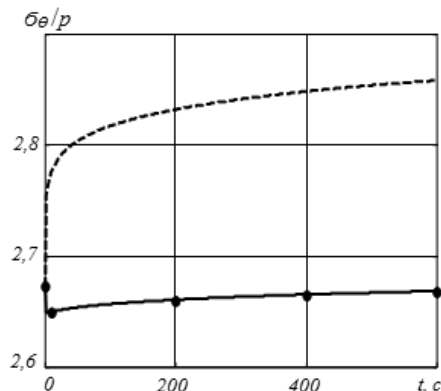


Рис. 3

Аналогичные результаты представлены на рис. 3 в точке $\theta = 0^\circ$ для случая $\varphi = 45^\circ$. Для сравнения в табл. 2 также приведены напряжения σ_θ / p в точках контура эллиптического отверстия для случаев $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 45^\circ$.

Таблица 2

t, c	$\varphi, \text{град.}$	σ_θ / p			$\sigma_\theta / p, [20]$		
		$\theta = 0^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 90^\circ$
0	0	-0,8341	0,9706	2,5529	-0,8341	0,9706	2,5529
	45	2,6733	-1,2027	0,6770	2,6733	-1,2027	0,6769
10	0	-0,7965	0,9431	2,5997	-0,7964	0,9614	2,5991
	45	2,6500	-1,2148	0,6721	2,6492	-1,2048	0,6718
200	0	-0,7861	0,9289	2,6244	-0,7860	0,9570	2,6236
	45	2,6607	-1,2191	0,6761	2,6597	-1,2036	0,6757
400	0	-0,7837	0,9448	2,6316	-0,7876	0,9558	2,6308
	45	2,6655	-1,2202	0,6778	2,6645	-1,2032	0,6773
600	0	-0,7823	0,9222	2,6361	-0,7823	0,9550	2,6353
	45	2,6688	-1,2209	0,6790	2,6678	-1,2028	0,6785

Как видно из рис. 2, 3 и табл. 2, результаты, полученные по методике, предложенной в данной работе, хорошо согласуются с уже известными результатами.

При исследовании напряженного состояния бесконечной пластинки вблизи жестко закрепленного кругового отверстия используем одно из следующих предположений.

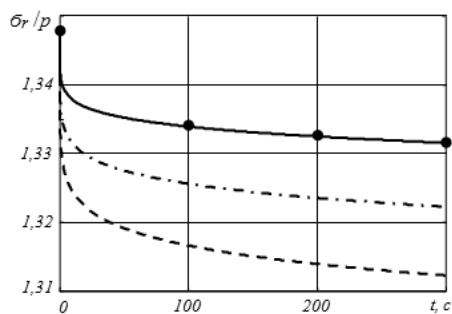


Рис. 4

I. Напряжения и перемещения в сплошной пластинке остаются упругими, т.е. не меняются со временем, а во времени могут меняться только компоненты, учитывающие влияние отверстия;

II. Во времени изменяются все компоненты напряжений и перемещений.

В работах [6, 10] представлены результаты, полученные в рамках предположения I. На рис. 4 показаны изменения максимальных напряжений σ_r / p , возникающих в точке кругового отверстия, соответствующей $\theta = 0^\circ$

при растяжении пластинки усилиями p в направлении оси Ox_1 ($\varphi = 0^\circ$). Сплошная линия соответствует расчету в условиях предположения II, штриховая – в условиях предположения I, штрих-пунктирная линия соответствует упрощенной постановке, когда $\bar{E}_1 = E_1$, $\bar{E}_2 = E_2$ (в этом случае результаты для предположений I и II совпали). Точками указаны значения напряжений согласно работе [19].

Заключение.

Предложен подход решения задач вязкоупругости анизотропного тела, который не требует построения аналитического представления ядер ползучести и релаксации в специальной форме. Метод основан на численном решении интегральных уравнений состояния среды и предполагает работу с таблицами экспериментальных данных, определенных на достаточно густой сетке. Предложен метод сглаживания и восполнения таблицы экспериментальных данных, на основе которых строятся матрицы уравнений состояния, имеющих явную зависимость от времени. Решение задач вязкоупругости в произвольный момент времени приводится к тем же алгоритмам, которые используются в теории упругости. В рамках предложенного подхода представлены результаты численного исследования вязкоупругого напряженного состояния ортотропной пластинки, ослабленной эллиптическим отверстием.

Р Е З Ю М Е . Запропоновано спосіб чисельного розв'язку задач лінійної в'язкопружності анізотропного тіла, що не вимагає явної побудови аналітичного подання ядер повзучості і релаксації. Наближене розв'язування інтегральних рівнянь базується на безпосередньому використанні експериментальних даних, попередньо згладжених і заповнених більш густою сіткою. Представлено результати чисельного дослідження в'язкопружного напруженого стану ортотропної пластинки, що ослаблена еліптичним отвором.

1. Громов В.Г. Алгебра операторов Вольтерра и ее применение в задачах вязко-упругости // Докл. АН СССР. – 1968. – **182**, № 1. – С. 56 – 59.
2. Ильющин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
3. Каминский А.А., Гаврилов Д.А. Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. – К.: Наук. думка, 1992. – 248 с.
4. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 338 с.
5. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
6. Нескородев Р.Н. О новом численно-аналитическом методе решения задач теории вязкоупругости анизотропных сред // Вісник Донецького нац. ун-ту. Сер.А: Природн. науки. – 2009. – Вип. 2. – С. 7 – 15.
7. Нескородев Р.Н. Учет упругой сжимаемости материала в теории вязкоупругости ортотропного тела // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: Материалы VI Междун. науч. конф. (Донецк – Мелекино, 8 – 11 июня 2010). – Донецк, 2010. – С. 67 – 70.
8. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
9. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степаньчев Е.И. Нелинейная ползучесть стеклопластика ТС8/3-250 // Механика полимеров. – 1971. – № 3. – С. 391 – 397.
10. Шевченко В.П., Нескородев Р.Н. Новый метод решения задач вязкоупругости анизотропных сред // Доп. НАН України. – 2010. – № 11. – С. 51 – 58.
11. Golub V.P., Kobzar Yu.M., Ragulina V.S. Determining the Parameters of the Hereditary Kernels of Nonlinear Viscoelastic Materials in Tension // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 1. – P. 102 – 113.
12. Golub V.P., Pavlyuk Ya.V., Fernati P.V. Determining the Parameters of Fractional Exponential Hereditary Kernels for Nonlinear Viscoelastic Materials // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 2. – P. 220 – 231.
13. Kaloerov S.A., Kolomyiets M.A. Determination of the Viscoelastic State of an Anisotropic Plate with Rigid Inclusions // J. Math. Sciences. – 2010. – **167**, N 2. – P. 242 – 254.
14. Kaloerov S.A., Parshikova O.A. Thermoviscoelastic State of Multiply Connected Anisotropic Plates // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 3. – P. 319 – 331.
15. Kaloerov S.A., Petrenko O.A. Problem of Thermoviscoelasticity for a Piecewise Homogeneous Anisotropic Plate // J. Math. Sciences. – 2013. – **192**, N 6. – P. 634 – 649.
16. Kaminskii A.A. Study of the Deformation of Anisotropic Viscoelastic Bodies // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 11. – P. 1434 – 1457.
17. Kaminskii A.A., Gavrilov G.V. A Continued Fraction Operator Technique for Viscoelasticity Problems Involving Anisotropic Aging Materials // J. Math. Sciences. – 2000. – **101**, N 1. – P. 2780 – 2784.
18. Kosmodamianskii A.S., Neskorojev N.M. The Relation Between the Equations of the Two-dimensional Theory of Elasticity for Anisotropic and Isotropic Bodies // J. Appl. Maths Mechs. – 1998. – **62**, N 2. – P. 319 – 321.
19. Podil'chuk I.Yu. Stress Concentration in Viscoelastic Ortotropic Plate with Rigid Circular Inclusion // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, N 8. – P. 660 – 668.
20. Podil'chuk I.Yu. Study of Stress Concentration in a Viscoelastic Ortotropic Plate with an Elliptical Hole // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, N 9. – P. 731 – 739.