

Е. Я. Антонюк, А. Т. Забуга

К ДИНАМИКЕ ДВУХСЕКЦИОННОГО ЭКИПАЖА
В УГЛОВОМ КОРИДОРЕ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: model@inmech.kiev.ua*

Abstract. The kinematics of joined two-section transport robot with three steering wheels is considered. A motion takes place in an angular corridor. A geometrical synthesis of the smooth by the first derivative program trajectory is carried out with saving the optimal maneuverability of vehicle. A dynamical model of motion on the given trajectory is developed. For the general case of motion, the analytical expressions of reactions at points of wheel contact with ground are given. An essential influence of the curvature radius of the program trajectory on values of reactions is noted.

Key words: wheeled vehicle, steering wheels, angular corridor, program trajectory, nonholonomic system, dynamical model.

Введение.

Необходимость создания транспортных средств, в том числе роботов, способных двигаться по узким извилистым проходам, вызвала в современной литературе достаточно широкий цикл публикаций [1, 2, 4 – 6, 11 – 13, 15]. Исследования посвящены разработке программных траекторий, кинематике и динамике движения, в том числе проверке возможности разрыва фрикционных связей между колесами и опорной поверхностью. Эти исследования все чаще соотносятся с транспортными сочлененными системами с двумя и тремя рулевыми колесами, что позволяет более успешно выполнять задачи реализации сложных траекторий, имеющих на практике [2, 13]. Типовым ограничением для движения экипажа может служить угловой коридор, в котором угол изменения вектора скорости может достигать величины $\pi/2$ и более. Трудность прохождения такого препятствия существенно возрастает, если длина секции сопоставима с максимально возможной для данного коридора.

Известно, что наиболее эффективное прохождение данного коридора с углом поворота, равным $\pi/2$, реализуется, когда огибающая множества положений однозвеного транспортного средства с двумя рулевыми колесами в процессе поворота является астроидой [6]. Однако, при строгом осуществлении такого варианта возникают трудности, которые состоят в том, что движение по программной траектории должно быть прерывистым, при этом в процессе остановки угол поворота одного из колес достигает величины $0,5\pi$, после чего экипаж вновь приводится в движение. Другим недостатком такой программной траектории при ее реализации является значительный рост нормальных составляющих реакций неголономных связей в упомянутых положениях. Поэтому в дальнейшем характер программного движения двухзвеной механической системы несколько видоизменяется, т.е. астроида будет только частью полной огибающей, сопряженной в начале и конце с двумя другими кривыми (ролеттами). Эти кривые не уменьшают предельно возможную проходную длину экипажа, которая обеспечивается астроидой, но понижают величины ускорений и нормальных реакций усилий, реализуемых силами трения контакта колес с основанием. Движение реализуется непрерывно, без остановок.

§ 1. Программная траектория.

На рис. 1 изображен находящийся в угловом коридоре I, II двухзвенный экипаж ABD , который должен пройти из участка I коридора в II с поворотом на угол, равный $\pi/2$. Как отмечено выше, наиболее эффективными геометрическими возможностями в таком случае обладает маршрут, который формирует огибающую множества положений экипажа в виде астроида [6]. Именно эта кривая обеспечивает наибольшую длину экипажа, который в состоянии преодолеть такое препятствие. Угловая точка C коридора должна находиться вне астроида. При таком движении двухзвенного экипажа, например, из исходного положения $A_0B_0D_0$ точка A

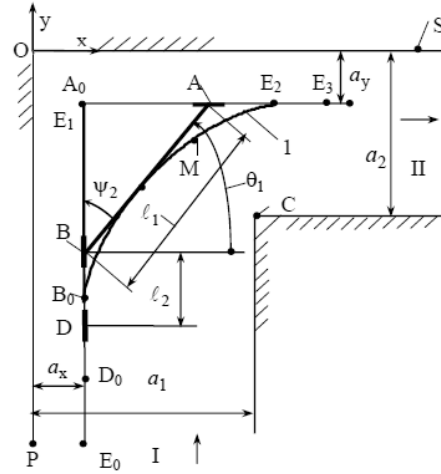


Рис. 1

должна двигаться параллельно оси Ox (вправо по рис. 1), а B и D – параллельно Oy вплоть до совпадения B с E_1 (движение звена AB при этом будет плоскопараллельным). После этого движение прекращается и колесо B должно быть повернуто на угол $\pi/2$ (т.е. стать параллельным Ox); после этого обе точки A и B должны продолжать движение параллельно Ox , а D – параллельно Oy вплоть до совпадения точки D с E_1 (движение звена BD на этом участке будет плоскопараллельным). Далее движение вновь прекращается и в процессе остановки колесо D необходимо повернуть на угол $\pi/2$, после чего осуществить прямолинейное поступательное движение двухзвенного экипажа ABD параллельно Ox , что обеспечит полный проход его в участок II (рис. 1).

Огибающая 1 положений секции AB длиной l_1 при описанном плоскопараллельном движении будет астроида [6]

$$y = a_y - \left[l_1^{2/3} - (x - a_x)^{2/3} \right]^{3/2}; \quad (1.1)$$

$$a_x = x_c - 0,5l_{CM} \sin \theta_c - l_1 \cos^3 \theta_c; \quad a_y = y_c + 0,5l_{CM} \cos \theta_c + l_1 \sin^3 \theta_c;$$

$$\cos(\theta_c - \varphi) = \frac{l_1}{\rho} \cos 2\theta_c; \quad \varphi = \arctg \frac{y_c}{x_c}; \quad \rho = \sqrt{x_c^2 + y_c^2};$$

$$l_{CM} = \sqrt{l_1^2 (\sin^6 \theta_c + \cos^6 \theta_c) + 2l_1 (y_c \sin^3 \theta_c - x_c \cos^3 \theta_c) + x_c^2 + y_c^2}; \quad (1.2)$$

x_c, y_c – координаты угловой точки C коридора, угол θ_c координирует нормаль из точки C к астроида, точка M определяет пересечение этой нормали с астроида (1.1).

Огибающая секции BD при описанном программном движении будет определяться тем же уравнением (1.1) с заменой l_1 на l_2 , т.е. на длину звена BD . Остальные параметры, т.е. a_x, a_y астроида, образованной звеном BD , принимаются согласно (1.2) с сохранением l_1 .

Длина l_{\max} (наиболее длинной из секций) робота, способного пройти в угловом коридоре с шириной его участков a_1 и a_2 (рис. 1), определяется неравенством [6]

$$l_{\max} < (a_1^{2/3} + a_2^{2/3})^{3/2}. \quad (1.3)$$

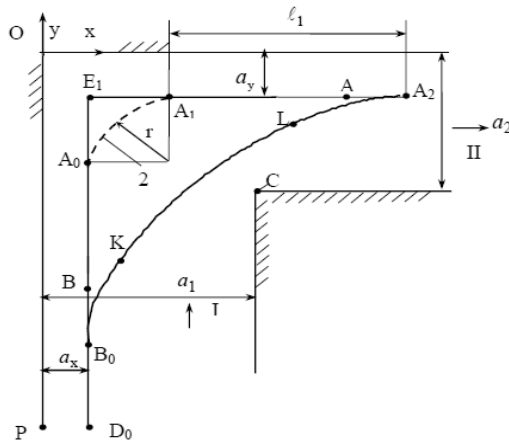


Рис. 2

Как отмечено выше, движение робота по такому закону должно быть прерывистым с остановками, так как в угловых точках программной траектории при мгновенном повороте в условиях наличия скоростей неизбежен неограниченный рост реакций неголономных связей системы. Чтобы исключить такой эффект и связанный с ним разрыв фрикционных связей между колесами и опорной поверхностью и реализовать непрерывное движение, целесообразно изменить программную траекторию E_1E_2 (рис. 1) для точки A и $E_0E_1E_2$ для B . Для этого достаточно вместо ломаной линии $E_0E_1E_3$ (рис. 1)

использовать для программной траектории (рис. 2) $B_0A_0A_1A_2$, в которой A_0A_1 – сопрягаемая с прямыми A_0B_0 и A_1A_2 дуга четверти окружности радиуса r ($r < \ell_i, i = \overline{1,2}$).

Такой закон позволит исключить скачкообразное изменение вектора скорости движения в точке E_1 (рис. 1, 2) с различными производными dy/dx в окрестности слева и справа от нее и тем самым предотвратит «жесткие» удары [14]. При введении дуги A_0A_1 расстояния от угловой точки C коридора до огибающих звеньев AB и BD сохранятся неизменными.

К части KL астроида (1.1) (рис. 2) добавятся участки B_0K и LA_2 , сопрягаемые в точках K и L с астроида (т.е. имеющие в этих точках одинаковые с ней первые производные). Отмеченные вводимые участки не снижают максимальную проходную длину ℓ_{\max} звена AB , которая по-прежнему будет определяться зависимостью (1.3). Сохранят свои выражения также $a_x, a_y, \theta_c, \ell_{CM}$ согласно (1.2). Новая огибающая будет начинаться в точке B_0 и кончаться в A_2 . Конечная точка B_3 , выполнившего первую часть маневра однозвенного экипажа, совпадет с точкой A_1 .

Координаты точек $j = \overline{K, L}$ определяются зависимостями

$$x_j = a_x + \ell \cos^3 \theta_j; \quad y_j = a_y - \ell \sin^3 \theta_j; \quad (1.4)$$

$$\theta_K = \frac{\pi}{2} - \alpha_k; \quad \theta_L = \alpha_k; \quad \alpha_k = \arcsin \frac{r}{\ell_i}; \quad i = \overline{1,2}.$$

Итак, огибающая B_0K положений звена AB (рис. 2), сформированная при движении точки A по дуге четверти окружности (на участке $\theta_{i-1} \leq \theta_1 < \pi/2$) и точки B вдоль прямой B_0A_0 (рис. 1), описывается параметрическими уравнениями

$$x = a_x + \ell_1 \cos^3 \theta_1 + \ell_1 \sin \theta_1 \cos^2 \theta_1 (r - \ell_1 \cos \theta_1) / n_1(\theta_1); \quad (1.5)$$

$$y = a_y + (x - a_x) \operatorname{tg} \theta_1 + b_1.$$

На участке движения точки A от A_1 до A_2 и точки B до A_0 огибающая положений звена AB будет астроида (1.1).

При дальнейшем движении точки B по дуге 2 окружности ($0 < \theta_1 < \theta_{1-2}$) огибающая LA_2 может быть описана уравнениями (θ_{1-2} см. ниже в (2.10))

$$\begin{aligned} x &= a_x + \ell_1 \cos^3 \theta_1 + r - n_2(\theta_1) - \ell_1 \sin \theta_1 \cos^2 \theta_1 (r - \ell_1 \sin \theta_1) / n_2(\theta_1); \\ y &= a_y + x \operatorname{tg} \theta_1 + b_2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Зависимости n_i, b_i в (1.5), (1.6) имеют такой вид:

$$\begin{aligned} n_1(\theta_1) &= \sqrt{2\ell_1 r \cos \theta_1 - \ell_1^2 \cos^2 \theta_1}; \quad n_2(\theta_1) = \sqrt{2\ell_1 r \sin \theta_1 - \ell_1^2 \sin^2 \theta_1}; \\ b_1 &= -\ell_1 \sin \theta_1 - r + n_1(\theta_1); \quad b_2 = -\ell_1 \sin \theta_1 - (r - n_2(\theta_1)) \operatorname{tg} \theta_1. \end{aligned}$$

Последующее движение двухзвенного экипажа даст аналогичную огибающую для секции BD (длиной ℓ_2). Следует отметить, что в точках сопряжения прямых с окружностью на программной траектории $B_0A_0A_1A_2$ (рис. 2) будет происходить «мягкий удар» вследствие скачкообразного появления (или исчезновения) нормального ускорения, обратно пропорционального радиусу r .

§2. Динамическая модель.

Расчетная схема динамической системы рассматриваемого двухсекционного инерционного робота ABD (рис. 1) с тремя рулевыми колесами в точках A, B, D изображена на рис. 3, где приняты обозначения: θ_1 и θ_2 – углы наклона звеньев 1 и 2, отсчитываемые от горизонтали (звенья условно представлены прямолинейными отрезками AB и BD длиной соответственно ℓ_1 и ℓ_2); ψ_1, ψ_2, ψ_3 – углы поворота рулевых колес A, B, D в горизонтальной плоскости, отсчитываемые от линии звена AB (для ψ_1 и ψ_2) и от звена BD для ψ_3 ; C_1 и C_2 – центры масс звеньев 1 и 2; λ_1 и λ_2 – расстояния ℓ_{BC_1} и ℓ_{BC_2} от точки B до центров масс; O_1 и O_2 – мгновенные центры скоростей звеньев 1 и 2. Положительный отсчет углов принят в направлении, противоположном вращению часовой стрелки. Неголономные связи [1, 4 – 6] в точках A, B, D между опорной плоскостью и колесами наложены таким образом, что горизонтальные векторы линейных скоростей движения точек A, B, D корпуса робота реализуются в плоскостях колес.

Мгновенные центры O_1 и O_2 скоростей звеньев 1 и 2 лежат на пересечении перпендикуляров к плоскостям колес в точках A, B и B, D .

Уравнения плоскопараллельного движения систем изложены, например, в [4, 16]. Для системы по рис. 3 и с программной траекторией согласно рис. 2 уравнение сформируем в векторной форме на основе общего уравнения динамики (по Даламберу–Лагранжу) для системы с идеальными связями [3, 7, 8] и представим в виде

$$\sum_{i=1}^N m_i \bar{W}_i \cdot \delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i, \quad (2.1)$$

откуда для рассматриваемой (по рис. 3) дискретной системы, движущейся плоскопараллельно, имеем

$$\begin{aligned} -m_1 \bar{V}_{C_1} \cdot \delta \bar{S}_{C_1} - m_2 \bar{V}_{C_2} \cdot \delta \bar{S}_{C_2} - \\ -J_{C_1} \ddot{\theta}_1 \cdot \delta \theta_1 - J_{C_2} \ddot{\theta}_2 \cdot \delta \theta_2 + \\ + \bar{F}_A \cdot \delta \bar{S}_A + \bar{F}_B \cdot \delta \bar{S}_B + \bar{F}_D \cdot \delta \bar{S}_D = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

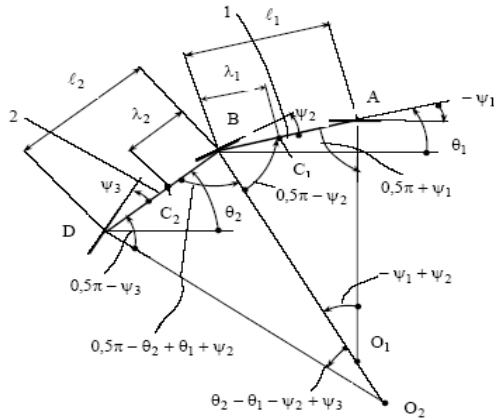


Рис. 3

В (2.1) и (2.2) обозначено: m_i – массы i -х звеньев, $i = \overline{1,2}$; \overline{W}_i – ускорение центра масс i -го звена; $\overline{\delta r}_i$ – виртуальное перемещение; \overline{F}_i – активные внешние силы, действующие на соответствующие точки системы; $\overline{F}_A, \overline{F}_B, \overline{F}_D$ – приведенные усилия, развиваемые двигателями приводов колес; $\overline{V}_{C_1}, \overline{V}_{C_2}$ и $\overline{\delta S}_{C_1}, \overline{\delta S}_{C_2}$ – ускорения центров C_1, C_2 масс звеньев 1 и 2 и их виртуальные перемещения; $\overline{\delta \theta}_1, \overline{\delta \theta}_2$ – виртуальные угловые перемещения звеньев 1 и 2 относительно вертикальных осей; $\overline{\delta S}_A, \overline{\delta S}_B, \overline{\delta S}_D$ – виртуальные перемещения точек A, B, D осей колес; J_{C_1}, J_{C_2} – центральные моменты инерции звеньев 1 и 2 относительно вертикальных осей.

Система (2.2) по рис. 2 и 3 имеет одну степень свободы (одна независимая вариация обобщенных координат). Ее положение на плоскости в общем случае описывается тремя обобщенными координатами, например x_A, θ_1, θ_2 .

Плоский двухзвенный экипаж в общем случае имеет четыре кинематические (и, соответственно, динамические) структуры, каждая из которых характеризуется двумя неравенствами, составленными из ψ_1, ψ_2 и $\theta_1, \theta_2, \psi_2, \psi_3$. В данном случае при прохождении углового коридора согласно схеме рис. 2 используется структура, соответствующая

$$\psi_2 - \psi_1 > 0; \theta_2 + \psi_3 - \theta_1 - \psi_2 > 0. \quad (2.3)$$

В случае равенства нулю левых частей (2.3) имеет место поступательное движение одного или обоих звеньев экипажа.

Ввиду того, что движение звеньев AB и BD меняется от плоскопараллельного до поступательного или наоборот, единая общая запись уравнения движения затруднительна, так как некоторые производные от длин и кинематических передаточных функций ($\dot{\ell}_{O_1C_1}, \dot{\ell}_{O_2C_2}, \dot{u}_{21}$ и другие) при таких переходах принимают неограниченные значения. Поэтому движение рассмотрим в два этапа: на первом этапе независимой координатой примем θ_1 , на втором – θ_2 . Соответственно, для первого этапа уравнение движения принимает вид

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{1}{J_{1np}} \left\{ \dot{\theta}_1 \left[m_1 \dot{\ell}_{O_1C_1} \ell_{O_1C_1} + J_{C_2} u_{21} \dot{u}_{21} + m_2 u_{21} \ell_{O_2C_2} \left(\dot{u}_{21} \ell_{O_2C_2} + u_{21} \dot{\ell}_{O_2C_2} \right) \right] + F_A \ell_{O_1A} - F_B \ell_{O_1B} - F_D \ell_D \right\} \quad (2.4)$$

при начальных условиях $\theta_1(0) = \pi/2 - \varepsilon_1(0)$, $\dot{\theta}_1(0)$; $\varepsilon_1(0) = 3 \cdot 10^{-5}$.

Уравнение движения второго этапа представим в форме

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{1}{J_{2np}} \left\{ \dot{\theta}_2 \left[m_2 \dot{\ell}_{O_2C_2} \ell_{O_2C_2} + J_{C_1} \dot{u}_{12} u_{12} + m_1 u_{12} \ell_{O_1C_1} \left(\dot{u}_{12} \ell_{O_1C_1} + u_{12} \dot{\ell}_{O_1C_1} \right) \right] + F_A \ell_{O_2A} u_{12} - F_B \ell_{O_2B} u_{12} - F_D \ell_{O_2D} \right\} \quad (2.5)$$

при следующих начальных условиях в момент времени t_1 перехода от первого ко второму этапу:

$$\theta_2(t_1) = \frac{\pi}{2} - \arcsin \left\{ \frac{r}{\ell_2} [1 - \cos \varphi_3(t_1)] \right\}; \quad \dot{\theta}_2(t_1) = \dot{\theta}_1(t_1) u_{21}(t_1). \quad (2.6)$$

В (2.4), (2.5) F_B и F_D рассматриваются как усилия торможения, приведенные к звеньям 1 и 2; моменты инерции J_{np} экипажа имеют вид

$$J_{1np} = J_{C_1} + m_1 \ell_{O_1 C_1}^2 + J_{C_2} u_{21}^2 + m_2 u_{21}^2 \ell_{O_2 C_2}^2 ; \quad (2.7)$$

$$J_{2np} = J_{C_1} u_{12}^2 + m_1 u_{12}^2 \ell_{O_1 C_1}^2 + J_{C_2} + m_2 \ell_{O_2 C_2}^2 ;$$

$\ell_{O_1 C_1}, \ell_{O_2 C_2}$ – расстояния от мгновенных центров скоростей O_1 и O_2 до центров масс C_1 и C_2 звеньев 1 и 2; $u_{12} = 1/u_{21}$ – кинематические передаточные функции, равные в области конечных значений отношению угловых скоростей $\dot{\theta}_2$ к $\dot{\theta}_1$ для u_{21} и $\dot{\theta}_1$ к $\dot{\theta}_2$ – для u_{12} .

Для структуры согласно (2.3) справедливы зависимости

$$\begin{aligned} \ell_{O_1 A} &= \frac{\ell_1 \cos \psi_2}{\sin(\psi_2 - \psi_1)} ; & \ell_{O_1 B} &= \frac{\ell_1 \cos \psi_1}{\sin(\psi_2 - \psi_1)} ; \\ \ell_{O_2 B} &= \frac{\ell_2 \cos \psi_3}{\sin(\theta_2 - \theta_1 - \psi_2 + \psi_3)} ; & \ell_D &= \frac{\ell_1 \cos \psi_1 \cos(\theta_2 - \theta_1 - \psi_2)}{\cos \psi_3 \sin(\psi_2 - \psi_1)} ; \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\ell_{O_1 C_1} = \sqrt{\lambda_1^2 + \ell_{O_1 B}^2 - 2\lambda_1 \ell_{O_1 B} \sin \psi_2} ; \quad \ell_{O_2 C_2} = \sqrt{\lambda_2^2 + \ell_{O_2 B}^2 - 2\lambda_2 \ell_{O_2 B} \sin(\theta_2 - \theta_1 - \psi_2)} ;$$

$$u_{12} = \begin{cases} \ell_{O_2 B} / \ell_{O_1 B} ; & 0 < \theta_1 \leq \theta_{1-2} ; \\ 0 ; & \theta_1 = 0, \theta_2 \neq 0 ; \end{cases} \quad u_{21} = \begin{cases} 0 ; & \theta_{1-2} < \theta_1 \leq 0,5\pi ; \\ \ell_{O_1 B} / \ell_{O_2 B} ; & 0 < \theta_1 \leq \theta_{1-2} ; \end{cases}$$

$$\ell_D = \ell_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 .$$

Выражения для производных $\dot{\ell}_{O_1 C_1}, \dot{\ell}_{O_2 C_2}, \dot{u}_{21}$ по времени получены с помощью системы аналитических вычислений Maple

$$\begin{aligned} \dot{\ell}_{O_1 A} &= -\frac{\ell_1 \sin \psi_2 \dot{\psi}_2}{\sin(\psi_2 - \psi_1)} - \frac{\ell_1 \cos \psi_2 \cos(\psi_2 - \psi_1) (\dot{\psi}_2 - \dot{\psi}_1)}{\sin(\psi_2 - \psi_1)^2} ; \\ \dot{\ell}_{O_1 B} &= -\frac{\ell_1 \sin \psi_1 \dot{\psi}_1}{\sin(\psi_2 - \psi_1)} - \frac{\ell_1 \cos \psi_1 \cos(\psi_2 - \psi_1) (\dot{\psi}_2 - \dot{\psi}_1)}{\sin(\psi_2 - \psi_1)^2} ; \\ \dot{\ell}_{O_1 C_1} &= -\frac{\ell_{O_1 B} \dot{\ell}_{O_1 B} - \lambda_1 \dot{\ell}_{O_1 B} \sin \psi_2 - \lambda_1 \ell_{O_1 B} \dot{\psi}_2 \cos \psi_2}{\ell_{O_1 C_1}} . \end{aligned} \quad (2.9)$$

В целом прохождение углового коридора по программной траектории $D_0 B_0 A_0 A_1 A_2$ (рис. 2) можно рассматривать состоящим из пяти последовательных участков:

- 1) $\theta_{1-1} < \theta_1 \leq 0,5\pi$; 2) $\theta_{1-2} < \theta_1 \leq \theta_{1-1}$; 3) $0 < \theta_1 \leq \theta_{1-2}$;
- 4) $\theta_{1-3} < \theta_2 \leq \theta_{1-4}$; 5) $0 < \theta_2 \leq \theta_{1-3}$.

При этом управляющие воздействия ψ_1, ψ_2, ψ_3 в форме углов между звеном AB и вертикальными плоскостями колес A и B (для ψ_1 и ψ_2) и между звеном BD и плоскостью колеса D (для ψ_3) выражаются как функции углов θ_1 и θ_2 , т.е.

$$\psi_1 = \begin{cases} \pi/2 - \theta_1 - \varphi_1, & \theta_{1-1} < \theta_1 \leq \pi/2 \\ -\theta_1, & \theta_{1-2} < \theta_1 \leq \theta_{1-1}; \\ -\theta_1, & 0 < \theta_1 \leq \theta_{1-2}; \\ 0, & \theta_{1-4} < \theta_2 \leq \theta_{1-3}; \\ 0, & 0 < \theta_2 \leq \theta_{1-4}; \end{cases} \quad \psi_2 = \begin{cases} \pi/2 - \theta_1, & \theta_{1-1} < \theta_1 \leq \pi/2; \\ \pi/2 - \theta_1, & \theta_{1-2} < \theta_1 \leq \theta_{1-1}; \\ \pi/2 - \theta_1 - \varphi_3, & 0 < \theta_1 \leq \theta_{1-2}; \\ 0, & \theta_{1-4} < \theta_2 \leq \theta_{1-3}; \\ 0, & 0 < \theta_2 \leq \theta_{1-4}; \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\psi_3 = \begin{cases} 0, & \theta_{1-1} < \theta_1 \leq \pi/2; \\ 0, & \theta_{1-2} < \theta_1 \leq \theta_{1-1}; \\ \pi/2 - \theta_2, & 0 < \theta_1 \leq \theta_{1-2}; \\ \pi/2 - \theta_2, & \theta_{1-4} < \theta_2 \leq \theta_{1-3}; \\ \pi/2 - \theta_2 - \varphi_3, & 0 < \theta_2 \leq \theta_{1-4}, \end{cases}$$

где $\theta_{1-1} = \arccos(r/\ell_1)$; $\theta_{1-2} = \arcsin(r/\ell_1)$; $\theta_{1-3} = \arccos(r/\ell_2)$; $\theta_{1-4} = \arcsin(r/\ell_2)$.

Углы φ_i определяются зависимостями

$$\varphi_1 = \arccos[1 - (\ell_1/r) \cos \theta_1]; \quad \theta_{1-1} \leq \theta_1 < \pi/2; \quad \varphi_3 = \arcsin[1 - (\ell_1/r) \sin \theta_1]; \quad 0 \leq \theta_1 < \theta_{1-2}; \\ \varphi_5 = \arcsin[1 - (\ell_2/r) \sin \theta_2]; \quad 0 \leq \theta_2 < \theta_{1-3}.$$

Производные по времени от управляющих воздействий ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 для строк в (2.10), содержащих φ_1 , φ_3 , φ_5 , имеют вид

$$\dot{\psi}_1 = -\dot{\theta}_1 \left(1 - \sin \theta_1 / \sqrt{\frac{2r}{\ell_1} \cos \theta_1 - \cos^2 \theta_1} \right); \\ \dot{\psi}_s = -\dot{\theta}_{s-1} \left(1 - \cos \theta_{s-1} / \sqrt{\frac{2r}{\ell_{s-1}} \sin \theta_{s-1} - \sin^2 \theta_{s-1}} \right); \quad s = \overline{2,3}. \quad (2.11)$$

В интервале $0 < \theta_1 < \theta_{1-2}$ имеются следующие зависимости между углами θ_2 и θ_1 :

$$\theta_2 = \arccos \left[\frac{r}{\ell_2} \left(1 - \sqrt{\frac{2\ell_1}{r} \sin \theta_1 - \frac{\ell_1^2}{r^2} \sin^2 \theta_1} \right) \right]; \\ \theta_1 = \arcsin \left[\frac{r}{\ell_1} \left(1 - \sqrt{\frac{2\ell_2}{r} \sin \theta_2 - \frac{\ell_2^2}{r^2} \cos^2 \theta_2} \right) \right]. \quad (2.12)$$

Координата центра колеса A определяется выражением

$$x_A = \begin{cases} a_x + \ell_1 \cos \theta_1, & \theta_{1-2} < \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}; \\ a_x + \ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos \theta_2, & 0 < \theta_1 \leq \theta_{1-2}; \\ a_x + \ell_1 + \ell_2 \cos \theta_2 + r(1 - \cos \varphi_3), & 0 < \theta_2 \leq \theta_{1-4}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Методика определения вектора реакций неголономных связей, действующих на колеса двухзвенного робота, изложена в [2]. В несколько иной форме для модели (2.4), (2.5) уравнения реакций приведены в настоящей работе ниже в зависимостях (2.14), (2.15).

§3. Численный пример.

Для корректности оценки динамической модели и эффективности снижения реакций неголономных связей транспортного средства, движущегося в угловом коридоре по сглаженной программной траектории $D_0 B_0 A_0 A_1 A_2$ (рис. 2), приняты параметры коридора и динамической системы: $x_C = 1,6$ м; $y_C = -1,3$ м; $m_1 = 100$ кг; $m_2 = 10$ кг; $J_{C_1} = 5$ кгм²; $J_{C_2} = 2$ кгм²; $\ell_1 = 1,5$ м; $\ell_2 = 1,2$ м; $\lambda_1 = 1$ м; $\lambda_2 = 0,5$ м; $F_B = F_D = 0$.

Приведенное усилие, развиваемое двигателем колеса A , задано зависимостью

$$F_A = \begin{cases} 0, & x_A - a_X < 0; \\ P, & 0 \leq x_A - a_X < a_X; \\ 0, & 2a_X \leq x_A; \end{cases} \quad P = 10 \text{ H};$$

Нормальные реакции N_A, N_B, N_D , действующие на колеса A, B, D со стороны опорной поверхности (направлены перпендикулярно плоскости соответствующего колеса), могут быть определены на основе кинестатики после приложения сил и моментов сил инерции

$$N_A = \frac{1}{\ell_1 \cos \psi_1} \left\{ \left[m_1 \ell_{O_1 C_1} \lambda_1 \sin(\psi_2 - \gamma_A) - J_{C_1} \right] f_1(\theta_1, \dot{\theta}_1) + m_1 \dot{\theta}_1^2 \ell_{O_1 C_1} \lambda_1 \cos(\psi_2 - \gamma_A) + F_A \ell_1 \sin \psi_1 \right\};$$

$$N_D = -\frac{1}{\ell_2 \cos \psi_3} \left\{ \left[-m_2 \ell_{O_2 C_2} \lambda_2 \sin(\theta_1 - \theta_2 + \psi_2 + \gamma_D) - J_{C_2} \right] f_2(\theta_2, \dot{\theta}_2) - m_2 \dot{\theta}_2^2 \ell_{O_2 C_2} \lambda_2 \cos(\theta_1 - \theta_2 + \psi_2 - \gamma_D) - F_D \ell_2 \sin \psi_3 \right\}; \quad (2.14)$$

$$N_B = -\frac{1}{\sin(\theta_1 + \psi_2)} \left[F_A \cos(\theta_1 + \psi_1) + N_A \sin(\theta_1 + \psi_1) + m_1 \ell_{O_1 C_1} \cos(\theta_1 + \psi_2 - \gamma_A) f_1(\theta_1, \dot{\theta}_1) - m_1 \dot{\theta}_1^2 \ell_{O_1 C_1} \sin(\theta_1 + \psi_2 - \gamma_A) + F_B \cos(\theta_1 + \psi_2) + m_2 \ell_{O_2 C_2} \cos(\theta_1 + \psi_2 + \gamma_D) f_2(\theta_2, \dot{\theta}_2) - m_2 \dot{\theta}_2^2 \ell_{O_2 C_2} \sin(\theta_1 + \psi_2 + \gamma_D) + N_D \sin(\theta_2 + \psi_3) - F_D \cos(\theta_2 + \psi_3) \right].$$

В (2.14) принято $\gamma_A = \arcsin \frac{\lambda_1 \cos \psi_2}{\ell_{O_1 C_1}}$; $\gamma_D = \arcsin \frac{\lambda_2 \cos(\theta_2 - \theta_1 - \psi_2)}{\ell_{O_2 C_2}}$.

Суммарные реакции сил трения, действующие на колеса A, B, D в точках их контакта с основанием, могут быть представлены зависимостями $R_j = \sqrt{N_j^2 + F_j^2}$, $j = A, B, D$.

Ввиду того, что при $\theta_1 + \psi_2 \rightarrow 0$ знаменатель в N_B по (2.14) также стремится к нулю, необходимо при $t < t_1$ перейти ко второй зависимости, т.е.

$$N_B = \frac{1}{\cos(\theta_1 + \psi_2)} \left[F_A \sin(\theta_1 + \psi_1) - N_A \cos(\theta_1 + \psi_1) + m_1 f_1(\theta_1, \dot{\theta}_1) \ell_{O_1 C_1} \sin(\theta_1 + \psi_2 - \gamma_A) + m_1 \dot{\theta}_1^2 \ell_{O_1 C_1} \cos(\theta_1 + \psi_2 - \gamma_A) + F_B \sin(\theta_1 + \psi_2) + m_2 \ell_{O_2 C_2} \sin(\theta_1 + \psi_2 + \gamma_D) f_2(\theta_2, \dot{\theta}_2) + m_2 \dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_1 + \psi_2 + \gamma_D) - N_D \cos(\theta_2 + \psi_3) + F_D \sin(\theta_2 + \psi_3) \right]. \quad (2.15)$$

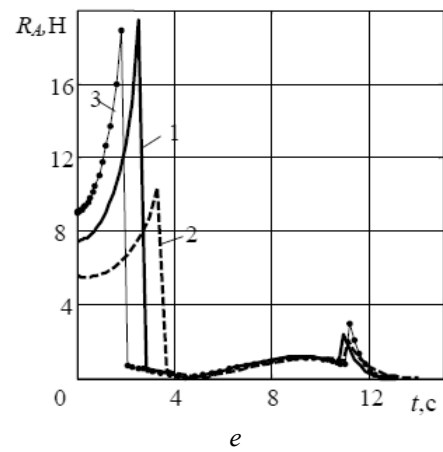
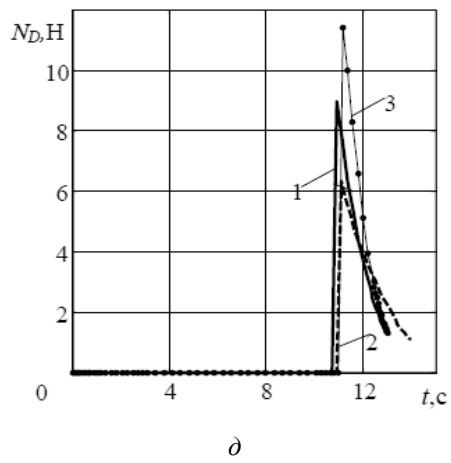
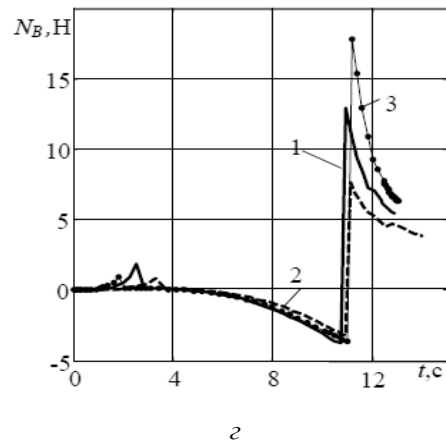
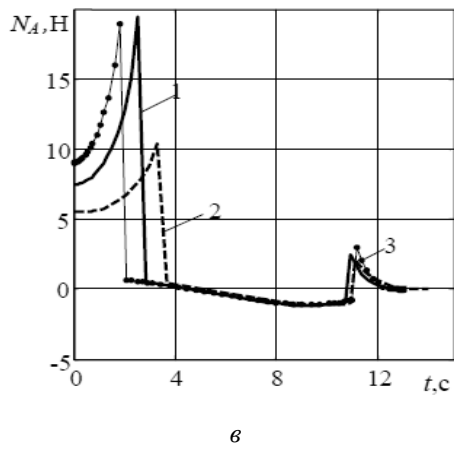
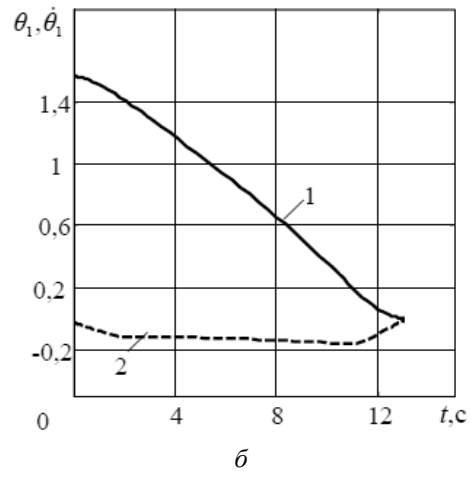
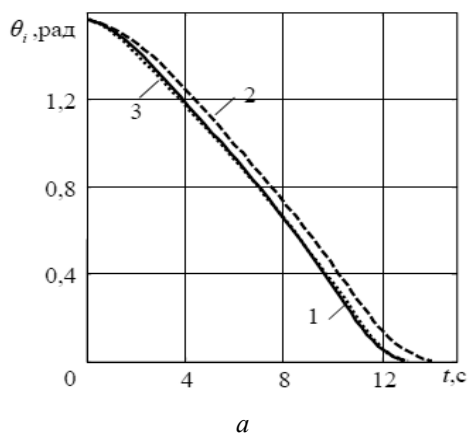


Рис. 4

На рис. 4, *a, б, в, г, д, е* изображены некоторые переменные, полученные в результате численного интегрирования уравнения (2.4). Сплошными линиями показаны зависимости траектории с радиусом закругления $r = 0,3$ м; пунктирными – для $r = 0,4$ м и точечными – для $r = 0,25$ м. На рис. 4, *б* сплошная линия соответствует углу θ_1 (рад), пунктирная – угловой скорости $\dot{\theta}_1$ (с⁻¹). Решение подтверждает, что на величины реакций, действующих на колеса, значительно влияет размер радиуса r закругления траекторий (рис. 2), которые увеличиваются с уменьшением радиуса r . Увеличение этого радиуса позволяет увеличить скорость прохождения углового коридора и повысить устойчивость от опрокидывания.

Таким образом, изложенная модель и программа позволяет установить необходимые механические характеристики двигателей при заданных параметрах двухсекционного экипажа и коэффициенте трения скольжения между колесами и опорной поверхностью, при которых будет отсутствовать скольжение колес по поверхности, т.е. переход в неуправляемое движение. Проиллюстрирован динамический эффект при использовании гладкой программной траектории и непрерывного движения с сохранением максимальных возможных размеров (1.3) звеньев экипажа для прохождения данного коридора.

Заключение.

Рассмотрена кинематика сочлененного двухзвенного транспортного робота с тремя управляемыми колесами. Движение происходит в угловом коридоре. Выполнен геометрический синтез гладкой (по первой производной) программной траектории при сохранении оптимальной маневренности экипажа. Разработана динамическая модель движения экипажа по отмеченной траектории. Для общего случая движения даны аналитические выражения реакций в точках контакта колес с основанием. Отмечено существенное влияние радиуса кривизны программной траектории на величины реакций.

РЕЗЮМЕ. Досліджено кінематику зчленованого дволанцюгового транспортного робота з трьома керованими колесами. Рух відбувається в кутовому коридорі. Виконано геометричний синтез гладкої (за першою похідною) програмної траєкторії зі збереженням оптимальної маневреності екіпажу. Розроблено динамічну модель руху екіпажу за заданною траєкторією. Для загального випадку руху наведено аналітичні вирази реакцій в точках контакту коліс з основою. Відмічено суттєвий вплив радіуса кривизни програмної траєкторії на величини реакцій.

1. Ларин В.Б. О выборе программной траектории движения составного колесного экипажа // Прикл. механика. – 2010. – **46**, N 3. – С. 94 – 101.
2. Ларин В.Б. Определение реакций связей двухзвенного колесного транспортного робота с тремя рулевыми колесами // Прикл. механика. – 2010. – **46**, N 4. – С. 96 – 101.
3. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
4. Almeida F.J., Pereira L., Borges-Sousa J. On the Design of a Hybrid Feedback Control System for a Non-Holonomic Car-like Vehicle // Proc. of the 4th European Control Conf. (ECC97). – Brussels (Belgium), 1997. – P. 1 – 4.
5. Anik'ev I.I., Mikhailova M.I., Sushchenko E.A. Experimental Determination of the Reaction of an Elastic Cantilever-Rod System to a Shock Wave // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 6. – P. 736 – 743.
6. Antonyuk E.Ya., Zabuga A.T. Synthesis of a Program Trajectory for a Wheeled Vehicle to Bypass Side Obstacles // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 9. – P. 1065 – 1073.
7. Bloch A.M. Nonholonomic mechanics and control. – New York: Springer – Verlag, 2003. – 483 p.

8. Bryson A.E. Jr., Ho-Yu-Chi. Applied Optimal Control. Optimization, Estimation and Control. – Waltham, Massachusetts: Braisdehl Publishing Company, 1969. – 544 p.
9. Goldsmith W. Impact. – London, 1960. – 340 p.
10. Jonas A. Zukas, Theodore Nicholas, Hallock F. Swift, Longin B. Greszczuk, Donald R. Curran. Impact Dynamics. – New York, 1982. – 452 p.
11. Hussein I.I., Bloch A.M. Optimal Control of Underactuated Nonholonomic Mechanical Systems // IEEE Trans. Automat. Control. – 2008. – **53**, N 3. – P. 668 – 682.
12. Larin V.B. The Control of Manipulators and Wheeled Transport Robots as Systems of Rigid Bodies // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 4. – P. 449 – 481.
13. Larin V.B. Control of a Compound Wheeled Vehicle with Two Steering Wheels // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 12. – P. 1413 – 1420.
14. Martynyuk A.A., Nikitina N.V. Bifurcation Processes in Periodically Perturbed Systems // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 1. – P. 114 – 123.
15. Oriolo G., Panzleri S., Ulivi G. Cyclic Learning control of chained-form systems with application to car-like robots // IFAC 13th Trienni World Congress: Proc. Mobile Robots (San Francisco). – 1996. – P. 187 – 192.
16. Pars L.A. A Treatise on Analytical Dynamics. – London: Heinemann, 1964. – 641 p.

Поступила 22.03.2011

Утверждена в печать 26.06.2013

