А.С.Хорошун

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ АНАЛИЗА АБСОЛЮТНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕТОЧНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail:center@inmech.kiev.ua

Abstract. An absolute parametric stability of nonlinear out-of-true singularly disturbed systems is analysed by use of multi-component Lyapunov functions. The case is considered when the initial system does not separate on the “fast” and “slow” subsystems. The sufficient conditions and domains of absolute parametric stability of system in hand are obtained.

Key words: nonlinear out-of-true singularly disturbed system, multi-component Lyapunov function, vector Lyapunov function, matrix-valued Lyapunov function, absolute parametric stability.

Введение.

Роль многокомпонентных функций Ляпунова, векторных [2, 10] и матричнозначных [6, 19], при анализе разных типов устойчивости различных классов систем чрезвычайно важна. Их использование позволяет более точно учитывать внутреннюю структуру исследуемых систем и ее влияние на поведение решений [11, 20]. Отметим, что условия устойчивости, полученные с помощью многокомпонентных функций Ляпунова, часто оказываются менее строгими, чем аналогичные условия, полученные с помощью, например, скалярных функций Ляпунова. Также, в некоторых случаях они позволяют получить условия устойчивости, когда получение таких условий с помощью скалярных функций невозможно.

Исследование свойств устойчивости сингулярно возмущенных систем является актуальной задачей [7, 8, 9, 15 – 18, 21, 22]. В работе [14] с помощью векторной функции Ляпунова проведен анализ абсолютной параметрической устойчивости неточных сингулярно возмущенных систем в случае, когда система допускает разделение на “быструю” и “медленную” подсистемы. Однако, такое разделение не всегда возможно.

В данной работе предложена методика исследования свойств устойчивости неточных сингулярно возмущенных систем в случае, когда выделить “быструю” и “медленную” подсистемы не удается. Используются векторные и матричнозначные вспомогательные функции Ляпунова.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим нелинейную неточную сингулярно-возмущенную систему дифференциальных уравнений типа Лурье следующего вида:

$$\dot{x} = A_{11}(p)x + A_{12}(p)y + q_1(p)f_1(\sigma_1);$$

$$\mu\dot{y} = A_{21}(p)x + A_{22}(p)y + q_2(p)f_2(\sigma_2), \qquad (1)$$

где $\sigma_1 = c_{11}(p)x + c_{12}(p)y + r_1$; $\sigma_2 = c_{21}(p)x + c_{22}(p)y + r_2$; $x(t) \in R^n$; $y(t) \in R^m$ – переменные, определяющие состояние системы в момент времени $t \in R^+$; $r_1 \in R^{k_1}$, $r_2 \in R^{k_2}$ – корректирующие векторы, $\mu \in (0,1]$ – малый параметр. Матрицы

$A_{11}(p) \in R^{n\times n}$, $A_{12}(p) \in R^{n\times m}$, $q_1(p) \in R^{n\times k_1}$, $A_{21}(p) \in R^{m\times n}$, $A_{22}(p) \in R^{m\times m}$, $q_2(p) \in R^{m\times k_2}$, $c_{11}(p) \in R^{k_1\times n}$, $c_{12}(p) \in R^{k_1\times m}$, $c_{21}(p) \in R^{k_2\times n}$, $c_{22}(p) \in R^{k_2\times m}$ имеют элементы, непрерывно зависящие от векторного параметра $p \in R^l$.

Нелинейные функции $f_1 : R^{k_1} \to R^{k_1}$, $f_2 : R^{k_2} \to R^{k_2}$ – непрерывно дифференцируемы на R^{k_1} и R^{k_2}, соответственно, и таковы, что $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 0$, $\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\Big|_{\sigma_1=0} = I^{k_1\times k_1}$, $\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial \sigma_2}\Big|_{\sigma_2=0} = I^{k_2\times k_2}$, где $I^{k_1\times k_1}$ и $I^{k_2\times k_2}$ – единичные матрицы соответствующих размерностей. Заметим, что в общем случае матрицы $I^{k_1\times k_1}$ и $I^{k_2\times k_2}$ могут быть произвольными постоянными матрицами, отличными от нулевой. Здесь же, для простоты изложения, они выбраны в виде единичных матриц. Предполагаем, что для системы (1) справедлива теорема о существовании и единственности решения начальной задачи.

Относительно системы (1) сделаем следующие предположения.

Предположение 1. *а) Существует значение параметра* $p^* \in R^l$ *такое, что матрицы*

$$c_1(p) = A_{11}(p) + q_1(p)\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\bigg|_{\sigma_1=0} c_{11}(p),\ \ c_2(p) = A_{22}(p) + q_2(p)\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial \sigma_2}\bigg|_{\sigma_2=0} c_{22}(p)$$

– устойчивы, а матрица $c_3(p) = A_{11}(p) + q_1(p)\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\Big|_{\sigma_1=0} c_{11}(p) - A_{12}(p)\times$

$$\times\left[A_{22}(p) + q_2(p)\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial \sigma_2}\bigg|_{\sigma_2=0} c_{22}(p)\right]^{-1} A_{21}(p)$$ *– невырождена в точке* $p = p^*$.

б) Существует значение параметра $p^* \in R^l$ *такое, что матрицы* $c_2(p)$ *и* $c_3(p)$ *невырождены в точке* $p = p^*$.

Отметим, что подход, используемый в работе [14] для исследования параметрической устойчивости сингулярно возмущенных систем, применить для исследования параметрической устойчивости системы (1) не представляется возможным. Как легко заметить, выразить переменную y через переменную x в явном виде из уравнения

$$0 = A_{21}(p)x + A_{22}(p)y + q_2(p)f_2(\sigma_2),$$

т.е. выделить из системы (1) “медленную” и “быструю” подсистемы, не удастся. Этим и объясняется невозможность применения подхода, о котором упоминалось выше.

Целью данной работы является применение многокомпонентных функций Ляпунова для исследования параметрической устойчивости системы (1). Ниже предложен способ построения векторной и матричнозначной функций Ляпунова и на их основании получены достаточные условия абсолютной параметрической устойчивости системы (1). Также указан подход для оценки области в пространстве параметров, для которой такая устойчивость имеет место.

2. Вспомогательные результаты.

Рассмотрим нелинейную систему уравнений следующего вида:

$$A(p)x + B(p)\,\varphi\,(r + C(p)x) = 0, \tag{2}$$

где $x(t) \in R^n$ – переменная; $p \in R^l$, $r \in R^m$ – векторные параметры, матрицы $A(p), B(p), C(p)$ имеют соответствующие размерности и элементы, непрерывно зависящие от параметра p; $\varphi : R^m \to R^m$ – нелинейная непрерывная функция. Относительно системы (2) сделаем следующее предположение.

Предположение 2.

(1) функция $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \ldots, \varphi_m(u))^T$ *определена и непрерывна на некотором открытом множестве* $\Gamma \subseteq R^m$ *вместе с частными производными* $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}, i, j = 1, \ldots, m;$

(2) точка $u = 0$ *принадлежит множеству* Γ, *причем* $\varphi(0) = 0$ и $\left.\dfrac{\partial \varphi(u)}{\partial u}\right|_{u=0} \neq 0;$

(3) существует значение параметра $p^* \in R^l$ *такое, что матрица*

$K(p) = A(p) + B(p)\left.\dfrac{\partial \varphi(u)}{\partial u}\right|_{u=0} C(p)$ *– невырождена в точке* $p = p^*$.

Определим область $\Pi = \left\{(x, p, r)\middle|\ \Omega_x : \|x\| \le a, \Omega_p : \left\|p - p^*\right\| \le b, \Omega_r : \|r\| \le c\right\}$ такую, что для всех (p, r) из $\Omega_p \times \Omega_r$ существует $x^e(p, r)$ – единственное состояние равновесия системы (2), которое принадлежит Ω_x. Для этого уравнение (2) представим в виде $x = (K(p^*))^{-1}\left(K(p)x - [A(p)x + B(p)\varphi(r + C(p)x)]\right) - (K(p^*))^{-1}(K(p) - K(p^*))x$ и рассмотрим итерационный процесс

$$x_{n+1} = (K(p^*))^{-1}\left(K(p)x_n - [A(p)x_n + B(p)\varphi(r + C(p)x_n)]\right) - \\ -(K(p^*))^{-1}(K(p) - K(p^*))\,x_n. \tag{3}$$

Применим к нему теорему о неподвижной точке в случае метрического пространства с числовым множителем в качестве оператора [3]. Согласно указанной теореме, при выполнение условий

$$\max_{p\in\Omega_p}(\| B(p) \| \| C(p) \|) \max_{u\in\Omega_u}\left\| \left.\frac{\partial \varphi(u)}{\partial u}\right|_u - \left.\frac{\partial \varphi(u)}{\partial u}\right|_{u=0} \right\| + \\ + \max_{p\in\Omega_p}\left\| K(p) - K(p^*) \right\| \le \frac{1}{2\left\|(K(p^*))^{-1}\right\|} \tag{4}$$

для всех $u \in \Omega_u$, где $\Omega_u = \left\{u \in R^m \,\middle|\, \| u \| \le d\right\}$ и

$$\|\varphi(r)\| \le \frac{a}{2\left\|(K(p^*))^{-1}\right\| \max_{p\in\Omega_p}\| B(p) \|} \tag{5}$$

для всех $r \in \Omega_r$, итерационный процесс (3) имеет единственную неподвижную точку, суть соответствующее ему уравнение имеет точно одно решение. Так как $u = r + C(p)x$, то с помощью неравенства

$$\max_{p\in\Omega_p}\| C(p) \| a + c \le d \tag{6}$$

и оценки (5) можем оценить границу области Π. Отметим, что в данной работе здесь и далее используется спектральная норма для матриц и евклидова норма для векторов.

Пусть для функции $\varphi(u)$ выполняется условие

$$\left\| \left.\frac{\partial \varphi(u)}{\partial u}\right|_u - \left.\frac{\partial \varphi(u)}{\partial u}\right|_{u=0} \right\| \le \frac{\dfrac{1}{2\left\|(K(p^*))^{-1}\right\|} - \max_{p\in\Omega_p}\left\|K(p) - K(p^*)\right\|}{\max_{p\in\Omega_p}\left(\| B(p) \| \| C(p) \|\right)} \tag{7}$$

для всех $u \in R^m$, где область Ω_p такова, что выполняется условие

$$\max_{p\in\Omega_p}\left\|K(p)-K(p^*)\right\|\le\frac{1}{2\left\|(K(p^*))^{-1}\right\|}. \tag{8}$$

Покажем, что в этом случае для всех $(p,r)\in\Omega_p\times\Omega_r$, где $\Omega_r=\left\{r\in R^m\,\middle|\,\|r\|\le c\right\}$, c – произвольное, как угодно большое наперед заданное положительное число, существует единственное состояние равновесия $x^e(p,r)$ системы (2).

Пусть c – произвольное, как угодно большое наперед заданное положительное число, а Ω_p определяется так, как указано выше. Выберем

$$a=2\left\|(K(p^*))^{-1}\right\|\max_{p\in\Omega_p}\|B(p)\|\left(\frac{\dfrac{1}{2\left\|(K(p^*))^{-1}\right\|}-\max\limits_{p\in\Omega_p}\left\|K(p)-K(p^*)\right\|}{\max\limits_{p\in\Omega_p}\left(\|B(p)\|\|C(p)\|\right)}+1\right)c.$$

Так как при выполнении условия (7) неравенство (4) справедливо для всех $u\in R^m$, то $d=+\infty$ и для выбранных a и c неравенство (6) выполняется. Поскольку

$$\|\varphi(r)\|=\left\|\varphi(0)+\left.\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\right|_{u=\tilde r}r\right\|\le\left\|\left.\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\right|_{u=\tilde r}\right\|c\le$$

$$\le\left(\left\|\left.\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\right|_{u=\tilde r}-\left.\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\right|_{u=0}\right\|+\left\|\left.\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}\right|_{u=0}\right\|\right)c\le$$

$$\le\left(\frac{\dfrac{1}{2\left\|(K(p^*))^{-1}\right\|}-\max\limits_{p\in\Omega_p}\left\|K(p)-K(p^*)\right\|}{\max\limits_{p\in\Omega_p}\left(\|B(p)\|\|C(p)\|\right)}+1\right)c=\frac{a}{2\left\|(K(p^*))^{-1}\right\|\max\limits_{p\in\Omega_p}\|B(p)\|},$$

то неравенство (5) выполняется для всех $r\in\Omega_r$.

Суммируя все вышеизложенное, при выполнении условия (7) для всех $(p,r)\in$ $\in\Omega_p\times\Omega_r$, где Ω_p выбирается с учетом неравенства (8), а $\Omega_r=\{r\in R^m\mid\|r\|\le c\}$, существует единственное состояние равновесия $x^e(p,r)$ системы (2).

3. Анализ существования состояния равновесия нелинейной неточной сингулярно возмущенной системы.

Состояние равновесия нелинейной неточной сингулярно возмущенной системы вида (1) имеет вид $((x^e(p,r_1,r_2))^T,(y^e(p,r_1,r_2))^T)^T$, где $x^e(p,r_1,r_2)$ и $y^e(p,r_1,r_2)$ являются решениями системы уравнений

$$0=A_{11}(p)x+A_{12}(p)y+q_1(p)f_1(c_{11}(p)x+c_{12}(p)y+r_1);$$

$$0=A_{21}(p)x+A_{22}(p)y+q_2(p)f_2(c_{21}(p)x+c_{22}(p)y+r_2). \tag{9}$$

Заметим, что систему (9) можно представить в виде

$$A(p)z+q(p)f(C(p)z+r)=0, \tag{10}$$

где

$$z=(x^T,y^T)^T,\;\; r=(r_1^T,r_2^T)^T,\;\; f:R^{k_1+k_2}\to R^{k_1+k_2},\;\; f:(f_1^T,f_2^T)^T,\;\; A(p)=\begin{pmatrix}A_{11}(p) & A_{12}(p)\\ A_{21}(p) & A_{22}(p)\end{pmatrix},$$

$q(p)=\begin{pmatrix} q_1(p) & 0 \\ 0 & q_2(p) \\ & \end{pmatrix}$, $C(p)=\begin{pmatrix} c_{11}(p) & c_{12}(p) \\ c_{21}(p) & c_{22}(p) \\ & \end{pmatrix}$. Тогда, очевидно, решение системы уравнений (9) существует, если существует решение системы уравнений (10) и $(x^e(p,r_1,r_2)^T,(y^e(p,r_1,r_2))^T)^T=z^e(p,r)$, где $z^e(p,r)$ – решение системы уравнений (10).

Отметим, что при сделанных предположениях относительно функций f_1 и f_2 для функции f выполняются условия (1) и (2) Предположения 2. Также, учитывая условия Предположения 1, a, b и используя формулу определителя блочной матрицы (см. [5]), получим, что условие 3 Предположения 2 также выполняется. Таким образом, все условия Предположения 2 для системы уравнений (10) выполнены как в случае a, так и в случае b. Поэтому, для исследования вопроса о существовании решений системы уравнений (10), можно использовать результаты п. 2. Тогда единственное решение системы (10), суть единственное состояние равновесия системы (1), существует для всех $(p,r)\in\Omega_p\times\Omega_r$, где Ω_p такова, что выполняется условие

$$\max_{p\in\Omega_p}\left\|K(p)-K(p^*)\right\|\le\frac{1}{2\left\|(K(p^*))^{-1}\right\|},\tag{11}$$

где $K(p)=A(p)+q(p)\left.\frac{\partial f(u)}{\partial u}\right|_{u=0}C(p)$, $\left.\frac{\partial f(u)}{\partial u}\right|_{u=0}=I^{(k_1+k_2)\times(k_1+k_2)}$ – единичная матрица размерности $(k_1+k_2)\times(k_1+k_2)$, а $\Omega_r=\left\{r\in R^{k_1+k_2}\,\middle|\,\|r\|\le c\right\}$, где c – произвольное положительное как угодно большое наперед заданное число, если для всех $u\in R^{k_1+k_2}$ верно

$$\left\|\left.\frac{\partial f(u)}{\partial u}\right|_{u}-\left.\frac{\partial f(u)}{\partial u}\right|_{u=0}\right\|\le\frac{\dfrac{1}{2\left\|(K(p^*))^{-1}\right\|}-\max\limits_{p\in\Omega_p}\left\|K(p)-K(p^*)\right\|}{\max\limits_{p\in\Omega_p}\left(\|q(p)\|\|C(p)\|\right)}=\alpha.\tag{12}$$

Поскольку матрица $\left(\left.\frac{\partial f(u)}{\partial u}\right|_{u}-\left.\frac{\partial f(u)}{\partial u}\right|_{u=0}\right)$ блочно-диагональная, то

$$\left\|\left.\frac{\partial f(u)}{\partial u}\right|_{u}-\left.\frac{\partial f(u)}{\partial u}\right|_{u=0}\right\|=$$

$$=\max\left\{\left\|\left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial\sigma_1}\right|_{\sigma_1}-\left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial\sigma_1}\right|_{\sigma_1=0}\right\|,\left\|\left.\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial\sigma_2}\right|_{\sigma_2}-\left.\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial\sigma_2}\right|_{\sigma_2=0}\right\|\right\}.$$

Таким образом, окончательно, если для системы дифференциальных уравнений (1) выполняются условия $\left\|\left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial\sigma_1}\right|_{\sigma_1}-\left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial\sigma_1}\right|_{\sigma_1=0}\right\|\le\alpha$ для всех $\sigma_1\in R^{k_1}$, $\left\|\left.\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial\sigma_2}\right|_{\sigma_2}-\left.\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial\sigma_2}\right|_{\sigma_2=0}\right\|\le\alpha$ для всех $\sigma_2\in R^{k_2}$, то для всех $(p,r_1,r_2)\in$ $\in\Omega_p\times\Omega_{r_1}\times\Omega_{r_2}$, где Ω_p определяется из условия (11), а $\Omega_{r_1}=\left\{r_1\in R^{k_1}\,\middle|\,\|r_1\|\le c_1\right\}$, $\Omega_{r_2}=\left\{r_2\in R^{k_2}\,\middle|\,\|r_2\|\le c_1\right\}$, c_1 – произвольное положительное как угодно большое наперед заданное число, существует единственное состояние равновесия этой системы.

Замечание. Было использовано, что $\|r\|=\sqrt{r_1^2+\ldots+r_{k_1}^2+r_{k_1+1}^2+\ldots+r_{k_2}^2}=\sqrt{\|r_1\|^2+\|r_2\|^2}\le$

$\le \|r_1\| + \|r_2\|$. Тогда, условие $\|r\| \le c$ выполняется, если выполняются условия $\|r_1\| \le \dfrac{c}{2} = c_1$ и $\|r_2\| \le \dfrac{c}{2} = c_1$, т. е. $\Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2} \subset \Omega_r$.

4. Использование векторной функции Ляпунова для исследования абсолютной параметрической устойчивости нелинейной неточной сингулярно возмущенной системы в случае устойчивых подсистем исходной системы.

Пусть для системы (1) выполняются условия Предположения 1, *а)*. Рассмотрим векторную функцию $V(x,y) = (v_1^T(x), v_2^T(y))^T$, где $v_1(x) = (x - x^e)^T P_1^*(x - x^e)$, $v_2(y) = (y - y^e)^T P_2^*(y - y^e)$, $((x^e(p, r_1, r_2))^T, \ (y^e(p, r_1, r_2))^T)^T$ – состояние равновесия системы (1), соответствующее некоторым значениям p, r_1, r_2, $P_1^* \in R^{n \times n}$, $P_2^* \in R^{m \times m}$ – симметричные положительно определенные матрицы, являющиеся решениями алгебраических уравнений Ляпунова $c_1^T(p^*)P_1^* + P_1^* c_1(p^*) = -Q_1$, $c_2^T(p^*)P_2^* + P_2^* c_2(p^*) = -Q_2$, соответственно, $Q_1 \in R^{n \times n}$, $Q_2 \in R^{m \times m}$ – симметричные положительно определенные матрицы. Отметим, что согласно условиям Предположения 1, *а)*, матрицы P_1^* и P_2^* существуют. Оценим производные компонент функции $V(x,y)$ в силу системы (1). Для первой компоненты имеем

$$\left.\frac{dv_1(x)}{dt}\right|_{(1)} = \left(A_{11}(p)x + A_{12}(p)y + q_1(p) f_1(\sigma_1)\right)^T P_1^*(x - x^e) +$$

$$+(x - x^e)^T P_1^* \left(A_{11}(p)x + A_{12}(p)y + q_1(p) f_1(\sigma_1)\right) =$$

$$= (x - x^e)^T \left[\left(A_{11}(p) + q_1(p) \left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\right|_{\tilde{\sigma}_1} c_{11}(p) \right)^T P_1^* + \right.$$

$$\left. + P_1^* \left(A_{11}(p) + q_1(p) \left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\right|_{\tilde{\sigma}_1} c_{11}(p) \right) \right] (x - x^e) +$$

$$+(y - y^e)^T \left(A_{12}(p) + q_1(p) \left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\right|_{\tilde{\sigma}_1} c_{12}(p) \right)^T P_1^*(x - x^e) +$$

$$+(x - x^e)^T P_1^* \left(A_{12}(p) + q_1(p) \left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\right|_{\tilde{\sigma}_1} c_{12}(p) \right) (y - y^e), \tag{13}$$

где $\tilde{\sigma}_1 \in R^{k_1}$ – некоторая точка. Здесь использовано, что $A_{11}(p)x^e + A_{12}(p)y^e + q_1(p) f_1\left(c_{11}(p)x^e + c_{12}(p)y^e + r_1\right) = 0$ и формула конечных приращений Лагранжа [4]. Из (13) получим

$$\left.\frac{dv_1(x)}{dt}\right|_{(1)} = (x - x^e) \times$$

$$\times \left[\left(c_1(p^*)\right)^T P_1^* + P_1^* c_1(p^*) + \left(c_1(p) - c_1(p^*)\right)^T P_1^* + P_1^* \left(c_1(p) - c_1(p^*)\right) \right] (x - x^e) +$$

$$+(x - x^e)^T \left(q_1(p) \left(\left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\right|_{\tilde{\sigma}_1} - \left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\right|_{\sigma_1 = 0} \right) c_{11}(p) \right)^T P_1^*(x - x^e) +$$

$$+(x-x^e)^T P_1^* \left(q_1(p) \left(\left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\right|_{\tilde{\sigma}_1} - \left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\right|_{\sigma_1=0} \right) c_{11}(p) \right) (x-x^e)+$$

$$+(y-y^e)^T \left(A_{12}(p)+q_1(p)I^{k_1\times k_1}c_{12}(p)+q_1(p)\left(\left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\right|_{\tilde{\sigma}_1} - \left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\right|_{\sigma_1=0} \right) c_{12}(p) \right)^T P_1^*(x-x^e)+$$

$$+(x-x^e)^T P_1^* \left(A_{12}(p)+q_1(p)I^{k_1\times k_1}c_{12}(p)+q_1(p)\left(\left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\right|_{\tilde{\sigma}_1} - \left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\right|_{\sigma_1=0} \right) c_{12}(p) \right) (y-y^e) \le$$

$$\le \left(-\lambda_{\min}(Q_1)+\lambda_{\max}(M_1(p,p^*))+2\left\|P_1^*\right\| \left\|q_1(p)\right\| \left\|c_{11}(p)\right\| \left\| \left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\right|_{\tilde{\sigma}_1} - I^{k_1\times k_1} \right\| \right) \left\|x-x^e\right\|^2+$$

$$+2\left\|P_1^*\right\| \left(\left\| A_{12}(p)+q_1(p)I^{k_1\times k_1}c_{12}(p) \right\| + \left\|q_1(p)\right\| \left\|c_{12}(p)\right\| \left\| \left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\right|_{\tilde{\sigma}_1} - I^{k_1\times k_1} \right\| \right)\times$$

$$\times \left\|x-x^e\right\| \left\|y-y^e\right\|, \qquad (14)$$

где $M_1(p,\, p^*)=(c_1(p)-c_1(p^*))^T P_1^*+P_1^*(c_1(p)-c_1(p^*))$.

Пусть функция $f_1(\sigma_1)$ такова, что $\left\| \left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\right|_{\sigma_1} - I^{k_1\times k_1} \right\| \le \beta_1$ для всех $\sigma_1 \in R^{k_1}$, $\beta_1>0$.

Продолжим оценку (14), учитывая, что

$$\lambda_{\min}(P_1^*)\left\|x-x^e\right\|^2 \le v_1(x) \le \lambda_{\max}(P_1^*)\left\|x-x^e\right\|^2;$$

$$\lambda_{\min}(P_2^*)\left\|y-y^e\right\|^2 \le v_2(y) \le \lambda_{\max}(P_2^*)\left\|y-y^e\right\|^2;$$

$$\left.\frac{dv_1(x)}{dt}\right|_{(1)} \le \left(-\lambda_{\min}(Q_1)+\lambda_{\max}\left(M_1(p,p^*)\right)+2\left\|P_1^*\right\| \left\|q_1(p)\right\| \left\|c_{11}(p)\right\| \beta_1 \right) \frac{v_1(x)}{\lambda_{\min}(P_1^*)}+$$

$$+2\left\|P_1^*\right\| \left(\left\| A_{12}(p)+q_1(p)I^{k_1\times k_1}c_{12}(p) \right\| + \left\|q_1(p)\right\| \left\|c_{12}(p)\right\| \beta_1 \right) \frac{(v_1(x))^{1/2}}{(\lambda_{\min}(P_1^*))^{1/2}} \frac{(v_2(y))^{1/2}}{(\lambda_{\min}(P_2^*))^{1/2}}=$$

$$=\gamma_1 \frac{v_1(x)}{\lambda_{\min}(P_1^*)}+\delta_1 \frac{(v_1(x))^{1/2}}{(\lambda_{\min}(P_1^*))^{1/2}} \frac{(v_2(y))^{1/2}}{(\lambda_{\min}(P_2^*))^{1/2}}, \qquad (15)$$

где обозначено: $\gamma_1=-\lambda_{\min}(Q_1)+\lambda_{\max}(M_1(p,p^*))+2\left\|P_1^*\right\| \left\|q_1(p)\right\| \left\|c_{11}(p)\right\| \beta_1$, $\delta_1=2\left\|P_1^*\right\| \times$ $\times \left(\left\| A_{12}(p)+q_1(p)I^{k_1\times k_1}c_{12}(p) \right\| + \left\|q_1(p)\right\| \left\|c_{12}(p)\right\| \beta_1 \right)$.

Для второй компоненты имеем

$$\left.\frac{dv_2(y)}{dt}\right|_{(1)} = {}^{1}\!/_{\mu}\left(A_{21}(p)x+A_{22}(p)y+q_2(p)f_2(\sigma_2) \right)^T P_2^*(y-y^e)+$$

$$+(y-y^e)^T P_2^*\, {}^{1}\!/_{\mu}\left(A_{21}(p)x+A_{22}(p)y+q_2(p)f_2(\sigma_2) \right)=$$

$$=\frac{1}{\mu}(y-y^e)^T \left[\left(A_{22}(p)+q_2(p)\left.\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial \sigma_2}\right|_{\tilde{\sigma}_2} c_{22}(p) \right)^T P_2^*+ \right.$$

$$+P_2^*\left(A_{22}(p)+q_2(p)\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial\sigma_2}\bigg|_{\tilde\sigma_2}c_{22}(p)\right)\Bigg](y-y^e)+$$

$$+\frac{1}{\mu}(x-x^e)^T\left(A_{21}(p)+q_2(p)\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial\sigma_2}\bigg|_{\tilde\sigma_2}c_{21}(p)\right)^T P_2^*(y-y^e)+$$

$$+\frac{1}{\mu}(y-y^e)^T P_2^*\left(A_{21}(p)+q_2(p)\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial\sigma_2}\bigg|_{\tilde\sigma_2}c_{21}(p)\right)(x-x^e), \qquad (16)$$

где $\tilde\sigma_2\in R^{k_2}$ – некоторая точка. Здесь, как и в оценке $\left.\frac{dv_1(x)}{dt}\right|_{(1)}$, использовано, что $A_{21}(p)x^e+A_{22}(p)y^e+q_2(p)f_2\left(c_{21}(p)x^e+c_{22}(p)y^e+r_2\right)=0$ и формула конечных приращений Лагранжа. Из (16) получим

$$\left.\frac{dv_2(y)}{dt}\right|_{(1)}=\frac{1}{\mu}(y-y^e)\Big[(c_2(p^*))^T P_2^*+P_2^*c_2(p^*)+(c_2(p)-c_2(p^*))^T P_2^*+P_2^*(c_2(p)-c_2(p^*))\Big]\times$$

$$\times(y-y^e)+\frac{1}{\mu}(y-y^e)^T\left(q_2(p)\left(\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial\sigma_2}\bigg|_{\tilde\sigma_2}-\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial\sigma_2}\bigg|_{\sigma_2=0}\right)c_{22}(p)\right)^T P_2^*(y-y^e)+$$

$$+\frac{1}{\mu}(y-y^e)^T P_2^*\left(q_2(p)\left(\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial\sigma_2}\bigg|_{\tilde\sigma_2}-\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial\sigma_2}\bigg|_{\sigma_2=0}\right)c_{22}(p)\right)(y-y^e)+$$

$$+\frac{1}{\mu}(x-x^e)^T\left(A_{21}(p)+q_1(p)I^{k_2\times k_2}c_{21}(p)+q_2(p)\left(\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial\sigma_2}\bigg|_{\tilde\sigma_2}-\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial\sigma_2}\bigg|_{\sigma_2=0}\right)c_{21}(p)\right)^T\times$$

$$\times P_2^*(y-y^e)+1/\mu(y-y^e)^T P_2^*\times$$

$$\times\left(A_{21}(p)+q_2(p)I^{k_2\times k_2}c_{21}(p)+q_2(p)\left(\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial\sigma_2}\bigg|_{\tilde\sigma_2}-\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial\sigma_2}\bigg|_{\sigma_2=0}\right)c_{21}(p)\right)(x-x^e)\le$$

$$\le\frac{1}{\mu}\left(-\lambda_{\min}(Q_2)+\lambda_{\max}(M_2(p,p^*))+2\left\|P_2^*\right\|\left\|q_2(p)\right\|\left\|c_{22}(p)\right\|\left\|\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial\sigma_2}\bigg|_{\tilde\sigma_2}-I^{k_2\times k_2}\right\|\right)\left\|y-y^e\right\|^2+$$

$$+\frac{2}{\mu}\left\|P_2^*\right\|\left(\left\|A_{21}(p)+q_2(p)I^{k_2\times k_2}c_{21}(p)\right\|+\left\|q_2(p)\right\|\left\|c_{22}(p)\right\|\left\|\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial\sigma_2}\bigg|_{\tilde\sigma_2}-I^{k_2\times k_2}\right\|\right)\times\left\|x-x^e\right\|\left\|y-y^e\right\|, \qquad (17)$$

где $M_2(p,p^*)=\left(c_2(p)-c_2(p^*)\right)^T P_2^*+P_2^*\left(c_2(p)-c_2(p^*)\right)$.

Пусть функция $f_2(\sigma_2)$ такова, что $\left\|\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial\sigma_2}\bigg|_{\sigma_2}-I^{k_2\times k_2}\right\|\le\beta_2$ для всех $\sigma_2\in R^{k_2}$, $\beta_2>0$. Продолжим оценку (17), учитывая, что $\lambda_{\min}(P_1^*)\left\|x-x^e\right\|^2\le v_1(x)\le$ $\le\lambda_{\max}(P_1^*)\left\|x-x^e\right\|^2$, $\lambda_{\min}(P_2^*)\left\|y-y^e\right\|^2\le v_2(y)\le\lambda_{\max}(P_2^*)\left\|y-y^e\right\|^2$.

$$\left.\frac{dv_2(y)}{dt}\right|_{(1)} \le \frac{1}{\mu}\Big(-\lambda_{\min}(Q_2)+\lambda_{\max}(M_2(p,p^*))+2\left\|P_2^*\right\|\left\|q_2(p)\right\|\left\|c_{22}(p)\right\|\beta_2\Big)\frac{v_2(y)}{\lambda_{\min}(P_2^*)}+$$

$$+\frac{2}{\mu}\left\|P_2^*\right\|\left(\left\|A_{21}(p)+q_2(p)I^{k_2\times k_2}c_{21}(p)\right\|+\left\|q_2(p)\right\|\left\|c_{22}(p)\right\|\beta_2\right)\frac{(v_1(x))^{1/2}}{(\lambda_{\min}(P_1^*))^{1/2}}\frac{(v_2(y))^{1/2}}{(\lambda_{\min}(P_2^*))^{1/2}}=$$

$$=\frac{1}{\mu}\gamma_2\frac{v_2(y)}{\lambda_{\min}(P_2^*)}+\frac{1}{\mu}\delta_2\frac{(v_1(x))^{1/2}}{(\lambda_{\min}(P_1^*))^{1/2}}\frac{(v_2(y))^{1/2}}{(\lambda_{\min}(P_2^*))^{1/2}}, \tag{18}$$

где обозначено: $\gamma_2=-\lambda_{\min}(Q_2)+\lambda_{\max}(M_2(p,p^*))+2\left\|P_2^*\right\|\left\|q_2(p)\right\|\left\|c_{22}(p)\right\|\beta_2$, $\delta_2=2\left\|P_2^*\right\|\left(\left\|A_{21}(p)+q_2(p)I^{k_2\times k_2}c_{21}(p)\right\|+\left\|q_2(p)\right\|\left\|c_{22}(p)\right\|\beta_2\right)$. Таким образом, исходя из оценок (15), (18), для производной векторной функции $V(x,y)$ в силу системы (1) имеет место оценка относительно конуса R_+^2, т.е.

$$\left.\frac{dV(x,y)}{dt}\right|_{(1)} \le \begin{pmatrix} \dfrac{\gamma_1}{\lambda_{\min}(P_1^*)}v_1(x)+\dfrac{\delta_1}{(\lambda_{\min}(P_1^*))^{\frac{1}{2}}(\lambda_{\min}(P_2^*))^{\frac{1}{2}}}(v_1(x))^{1/2}(v_2(y))^{1/2} \\ \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\gamma_2}{\lambda_{\min}(P_2^*)}v_2(y)+\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\delta_2}{(\lambda_{\min}(P_1^*))^{1/2}(\lambda_{\min}(P_2^*))^{1/2}}(v_1(x))^{1/2}(v_2(y))^{1/2} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Воспользовавшись неравенством $-az^2+bz\le-\dfrac{a}{2}z^2+\dfrac{b^2}{2a}$, продолжим оценку (19):

$$\left.\frac{dV(x,y)}{dt}\right|_{(1)} \le \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{\gamma_1}{\lambda_{\min}(P_1^*)}v_1(x)+\dfrac{\delta_1^2}{(-\gamma_1)\lambda_{\min}(P_2^*)}v_1(x)v_2(y) \\ \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\gamma_2}{\lambda_{\min}(P_2^*)}v_2(y)+\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\delta_2^2}{(-\gamma_2)\lambda_{\min}(P_1^*)}v_1(x)v_2(y) \end{pmatrix}=AV(x,y)$$

$$\left(A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{\gamma_1}{\lambda_{\min}(P_1^*)} & \dfrac{\delta_1^2}{(-\gamma_1)\lambda_{\min}(P_2^*)} \\ \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\delta_2^2}{(-\gamma_2)\lambda_{\min}(P_1^*)} & \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\gamma_2}{\lambda_{\min}(P_2^*)} \end{pmatrix}\right). \tag{20}$$

Используя полученные оценки, сформулируем и докажем теорему, которая определяет достаточные условия абсолютной параметрической устойчивости нелинейной неточной сингулярно возмущенной системы относительно некоторой области в пространстве параметров.

Теорема 1. *Пусть функции $f_1(\sigma_1)$ и $f_2(\sigma_2)$, входящие в систему (1), таковы, что*

$$\left\|\left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial\sigma_1}\right|_{\sigma_1}-\left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial\sigma_1}\right|_{\sigma_1=0}\right\|\le\beta_1<\min\left\{\alpha,\frac{\lambda_{\min}(Q_1)-\max\limits_{p\in\Omega_p1}(\lambda_{\max}(M_1(p,p^*)))}{2\left\|P_1^*\right\|\max\limits_{p\in\Omega_p1}\left(\left\|q_1(p)\right\|\left\|c_{11}(p)\right\|\right)}\right\}, \tag{21}$$

где область $\Omega_p1=\left\{\,p\in R^l\,\middle|\,\left\|p-p^*\right\|\le b_1\right\}$ такова, что выполняется условие

$$\max_{p\in\Omega_p 1}(\lambda_{\max}(M_1(p,p^*)))<\lambda_{\min}(Q_1), \tag{22}$$

$$\left\|\left.\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial\sigma_2}\right|_{\sigma_2}-\left.\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial\sigma_2}\right|_{\sigma_2=0}\right\|\le\beta_2<\min\left\{\alpha,\frac{\lambda_{\min}(Q_2)-\max\limits_{p\in\Omega_p 2}(\lambda_{\max}(M_2(p,p^*)))}{2\left\|P_2^*\right\|\max\limits_{p\in\Omega_p 2}(\|q_2(p)\|\|c_{22}(p)\|)}\right\}, \tag{23}$$

где область $\Omega_p 2=\left\{p\in R^l\,\middle|\,\left\|p-p^*\right\|\le b_2\right\}$ *такова, что выполняется условие*

$$\max_{p\in\Omega_p 2}\Big(\lambda_{\max}(M_2(p,p^*))\Big)<\lambda_{\min}(Q_2), \tag{24}$$

α *определяется из условия (12), а область* $\Omega_p=\left\{p\in R^l\,\middle|\,\left\|p-p^*\right\|\le b\right\}$ *определяется из условия (11) и для всех* $p\in P\subseteq(\Omega_p\cap\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)$ *выполняется условие*

$$\delta_1\delta_2<\gamma_1\gamma_2, \tag{25}$$

где γ_1, γ_2, δ_1, δ_2 *обозначены выше, то система (1) абсолютно параметрически устойчива относительно области* $P\times\Omega_{r_1}\times\Omega_{r_2}$, *где* $\Omega_{r_1}=\left\{r_1\in R^{k_1}\,\middle|\,\|r_1\|\le c_1,\,c_1>0\right\}$, $\Omega_{r_2}=\left\{r_2\in R^{k_2}\,\middle|\,\|r_2\|\le c_2,\,c_2>0\right\}$, *для всех* $\mu\in(0,1]$.

Доказательство. Согласно условиям (21), (23) – $\beta_1<\alpha$ и $\beta_2<\alpha$. Значит, как было показано в п. 3, для всех $(p,r_1,r_2)\in\Omega_p\times\Omega_{r_1}\times\Omega_{r_1}$, где Ω_p определяется из условия (11), а Ω_{r_1} и Ω_{r_2} такие, как в условии теоремы, существует единственное состояние равновесия системы (1). Очевидно, что оно существует и для всех $(p,r)\in P\times\Omega_{r_1}\times\Omega_{r_2}$. Покажем, что для всех значений параметра из этой области указанное состояние равновесия будет глобально асимптотически устойчиво. Пусть (p,r_1,r_2) – произвольные значения параметров из области $P\times\Omega_{r_1}\times\Omega_{r_2}$ и $((x^e(p,r_1,r_2))^T,(y^e(p,r_1,r_2))^T)^T$ – соответствующее им состояние равновесия системы (1). Рассмотрим векторную функцию, предложенную выше. Ее производная, в силу системы (1), удовлетворяет неравенство $dV(x,y)/dt\big|_{(1)}\le AV(x,y)$, где A определена равенством (20). Отметим, что поскольку выполняются условия (21), (23), то для всех $p\in P\subseteq(\Omega_p\cap\Omega_p 1\cap\Omega_p 2)$ $\gamma_1<0$ и $\gamma_2<0$.

Рассмотрим систему уравнений

$$du/dt=Au, \tag{26}$$

где матрица A задана в (20), а $u=(u_1,u_2)^T\in R_+^2$. Так как $\gamma_1<0$ и $\gamma_2<0$, то функция $f(u)=Au$ – квазимонотонна относительно конуса R_+^2, т. е. система (26) является системой сравнения для системы (1). При выполнении условия (25) матрица A устойчива, значит состояние равновесия $((x^e(p,r_1,r_2))^T,(y^e(p,r_1,r_2))^T)^T$ системы (1) для выбранных значений параметров (p,r_1,r_2) является глобально асимптотически устойчивым. Поскольку (p,r_1,r_2) – произвольная точка области $P\times\Omega_{r_1}\times\Omega_{r_2}$, то система (1) абсолютно параметрически устойчива относительно этой области.

Поскольку все вышеизложенное имеет место для всех $\mu\in(0,1]$, то свойство абсолютной устойчивости системы (1) также сохраняется при всех $\mu\in(0,1]$. Теорема полностью доказана.

5. Использование матричнозначной функции для анализа абсолютной устойчивости нелинейной неточной сингулярно возмущенной системы.

Пусть для системы (1) выполняются условия Предположения 1, *в)*. Рассмотрим матричнозначную функцию следующего вида [12, 13]:

$$V(x,y,\mu)=\begin{pmatrix} v_{11}(x) & v_{12}(x,y,\mu) \\ v_{21}(x,y,\mu) & v_{22}(y,\mu) \end{pmatrix}, \tag{27}$$

где $v_{11}(x)=(x-x^e)^T P_1(x-x^e)$, $v_{22}(y)=(y-y^e)^T P_2(y-y^e)$, $v_{21}(x,y,\mu)=v_{12}(x,y,\mu)=$ $=\mu(x-x^e)^T P_3(y-y^e)$; $((x^e)^T,(y^e)^T)^T$ – состояние равновесия системы (1), соответствующее некоторым значениям p, r_1 и r_2; $P_1\in R^{n\times n}$, $P_2\in R^{m\times m}$ – симметрические положительно определенные матрицы, $P_3\in R^{n\times m}$ – некоторая постоянная матрица.

Рассмотрим также скалярную функцию [12,13]

$$v(x,y,\mu)=\eta^T V(x,y,\mu)\eta,\ \eta^T=(1,1). \tag{28}$$

Учитывая, что для элементов матричнозначной функции (27) имеют место оценки

$$v_{11}(x)\ge\lambda_{\min}(P_1)\left\|x-x^e\right\|^2 \text{ для всех } x\in R^n;$$

$$v_{22}(y,\mu)\ge\mu\lambda_{\min}(P_2)\left\|y-y^e\right\|^2 \text{ для всех } y\in R^m,\ \mu\in(0,1];$$

$$v_{12}(x,y,\mu)\ge-\mu(\lambda_{\max}(P_3P_3^T))^{\frac{1}{2}}\left\|x-x^e\right\|\left\|y-y^e\right\| \text{ для всех } x\in R^n,\ y\in R^m,\ \mu\in(0,1],$$

где $\lambda_{\min}(\cdot)$, $\lambda_{\max}(\cdot)$, – минимальное и максимальное значения соответствующей матрицы, для скалярной функции (28) имеет место следующая оценка:

$$v(x,\ y,\ \mu)\ge u^T H^T A(\mu)Hu, \text{ для всех } (x,\ y,\ \mu)\in R^n\times R^m\times(0,1],$$

где $u^T=(\left\|x-x^e\right\|,\left\|y-y^e\right\|)$, $H=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

$$A(\mu)=\begin{pmatrix} \lambda_{\min}(P_1) & -\mu(\lambda_{\max}(P_3P_3^T))^{1/2} \\ -\mu(\lambda_{\max}(P_3P_3^T))^{1/2} & \mu\lambda_{\min}(P_2) \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Определим производную функции (28) по времени в силу системы (1)

$$\dot v(x,y,\mu)\big|_{(1)}=-2\Big(\sigma_1-\sigma_1^e-{}^1\!/_{a_1}\big(f_1(\sigma_1)-f_1(\sigma_1^e)\big)\Big)^T\Big(f_1(\sigma_1)-f_1(\sigma_1^e)\Big)-$$

$$-2\Big(\sigma_2-\sigma_2^e-{}^1\!/_{a_2}\big(f_2(\sigma_2)-f_2(\sigma_2^e)\big)\Big)^T\Big(f_2(\sigma_2)-f_2(\sigma_2^e)\Big)+z^T B(p,\mu)z, \tag{30}$$

где $\sigma_1^e=c_{11}(p)x^e+c_{12}(p)y^e+r_1$, $\sigma_2^e=c_{21}(p)x^e+c_{22}(p)y^e+r_2$, $a_i>0$ $(i=1,2)$ – некоторые числа, $z^T=\Big((x-x^e)^T,\ (y-y^e)^T,\ \big(f_1(\sigma_1)-f_1(\sigma_1^e)\big)^T,\ \big(f_2(\sigma_2)-f_2(\sigma_2^e)\big)^T\Big)$,

$B(p,\mu)$ – блочная матрица размера 4×4 с элементами $B_{11} = P_1 A_{11}(p) + A_{11}^T(p)P_1 + {}$ $+P_3 A_{21}(p) + A_{21}^T(p)P_3^T$, $B_{21} = \mu P_3^T A_{11}(p) + P_2 A_{21}(p) + A_{22}^T(p)P_3^T + A_{12}^T(p)P_1 = B_{12}^T$,

$B_{22} = \mu P_3^T A_{12}(p) + P_2 A_{22}(p) + \mu A_{12}^T(p)P_3 + A_{22}^T(p)P_2$, $B_{13} = B_{31}^T = P_1 q_1(p) + c_{11}^T(p)$,

$B_{14} = B_{41}^T = P_3 q_2 + c_{21}^T(p)$, $B_{23} = B_{32}^T = \mu P_3^T q_1(p) + c_{12}^T(p)$, $B_{24} = B_{42}^T = P_2 q_2(p) + c_{22}^T(p)$,

$B_{33} = -\dfrac{2}{a_1} I^{k_1\times k_1}$, $B_{34} = B_{43}^T = 0^{k_1\times k_2}$, $B_{44} = -\dfrac{2}{a_2} I^{k_2\times k_2}$.

Введем следующие обозначения:

$$M_i = -\left\| \frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial \sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0} \right\| - \frac{a_i}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left(2\left\| \frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial \sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0} \right\| + a_i\right)^2 - 4\left(\left\| \frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial \sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0} \right\|^2 - \frac{a_i}{2}\lambda_{\min}\left(\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial \sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0} + \left(\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial \sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}\right)^T\right)\right)\right]^{1/2};$$

$$A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} B_{13} & B_{14} \\ B_{23} & B_{24} \end{pmatrix};$$

$$I_{a_1 a_2} = \begin{pmatrix} B_{33} & 0^{k_1\times k_2} \\ 0^{k_2\times k_1} & B_{44} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{a_1}{2} I^{k_1\times k_1} & 0^{k_1\times k_2} \\ 0^{k_2\times k_1} & -\dfrac{a_2}{2} I^{k_2\times k_2} \end{pmatrix}$$

и сформулируем теорему.

Теорема 2. *Пусть для сингулярно возмущенной системы (1) выполняются условия Предположения 1, б), построена матричная функция (27) и для функций* $f_1(\sigma_1)$ *и* $f_2(\sigma_2)$*, входящих в состав системы (1), для всех* $\sigma_1 \in R^{k_1}$, $\sigma_2 \in R^{k_2}$*, соответственно, выполняются условия*

$$\left\| \frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial \sigma_i}\Big|_{\sigma_i} - \frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial \sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0} \right\| < \min\{\alpha, M_i\}, \tag{31}$$

$$a_i > \frac{2\left\| \dfrac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial \sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0} \right\|^2}{\lambda_{\min}\left(\dfrac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial \sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0} + \left(\dfrac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial \sigma_i}\Big|_{\sigma_i=0}\right)^T\right)},\ i = 1, 2;$$

$P \subseteq \Omega_p$, *область* Ω_p *определяется из (11), а* α *– из (12),* $\mu^* = \dfrac{\lambda_{\min}(P_1)\lambda_{\min}(P_2)}{\lambda_{\max}(P_3 P_3^T)}$ *и для всех* $p \in P$ *и* $0 < \mu \le \tilde{\mu} \le \mu^*$*, матрица* $B = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & I_{a_1 a_2}^{-1} \end{pmatrix}$ *устойчива, тогда система (1)* *абсолютно параметрически устойчива относительно области* $P\times\Omega_{r_1}\times\Omega_{r_2}$, *где* $\Omega_{r_1}=\left\{r_1\in R^{k_1}\mid \|r_1\|\le c_1, c_1>0\right\}$, $\Omega_{r_2}=\left\{r_2\in R^{k_2}\mid \|r_2\|\le c_2, c_2>0\right\}$, *для всех* $\mu\in(0,\tilde{\mu}]$.

Замечание. Точка p^* из Предположения 1, *б)* должна принадлежать области P.

Доказательство. Поскольку для всех $\sigma_1\in R^{k_1}$, $\sigma_2\in R^{k_2}$ выполняется условие (31), где α определяется из (12), то, согласно результатам п. 3, для всех $(p, r_1, r_2)\in\in\Omega_p\times\Omega_{r_1}\times\Omega_{r_2}$, где Ω_p определяется из условия (11), а Ω_{r_1} и Ω_{r_2} такие, как указано в условиях теоремы, существует единственное состояние равновесия системы (1). Очевидно, что оно существует и для всех $(p, r_1, r_2)\in P\times\Omega_{r_1}\times\Omega_{r_2}$. Покажем, что для всех значений параметров из этой области указанное состояние равновесия будет глобально асимптотически устойчиво. Пусть (p, r_1, r_2) произвольные значения параметров из области $P\times\Omega_{r_1}\times\Omega_{r_2}$ и $((x^e(p, r_1, r_2))^T, (y^e(p, r_1, r_2))^T)^T$ – соответствующее им состояние равновесия системы (1). Рассмотрим скалярную функцию (28), построенную с помощью матричнозначной функции (27). При всех $\mu<\mu^*$ матрица (29) положительно определена, т. е. скалярная функция $v(x, y, \mu)>0$ для всех $(x, y, \mu)\in\in R^n\times R^m\times(0,\mu]$. Для производной функции (28) по времени в силу системы (1) выполняется оценка (30). При $i=1, 2$ рассмотрим величину

$$(\sigma_i-\sigma_i^e-\frac{1}{a_i}\Big(f_i(\sigma_i)-f_i(\sigma_i^e)\Big)^T\Big(f_i(\sigma_i)-f_i(\sigma_i^e)\Big)=$$

$$=(\sigma_i-\sigma_i^e)^T\left(I^{k_i\times k_i}-\frac{1}{a_i}\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\bigg|_{\tilde{\sigma}_i}\right)^T\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\bigg|_{\tilde{\sigma}_i}(\sigma_i-\sigma_i^e)=$$

$$=(\sigma_i-\sigma_i^e)^T\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\bigg|_{\tilde{\sigma}_i}+\left(\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\bigg|_{\tilde{\sigma}_i}\right)^T\right)-\frac{1}{a_i}\left(\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\bigg|_{\tilde{\sigma}_i}\right)^T\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\bigg|_{\tilde{\sigma}_i}\right)(\sigma_i-\sigma_i^e)=$$

$$=(\sigma_i-\sigma_i^e)^T\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\bigg|_{\sigma_i=0}+\left(\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\bigg|_{\sigma_i=0}\right)^T\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\bigg|_{\tilde{\sigma}_i}+\left(\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\bigg|_{\tilde{\sigma}_i}\right)^T\right)\right)(\sigma_i-\sigma_i^e)+$$

$$+(\sigma_i-\sigma_i^e)^T\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\bigg|_{\sigma_i=0}+\left(\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\bigg|_{\sigma_i=0}\right)^T\right)-\frac{1}{a_i}\left(\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\bigg|_{\tilde{\sigma}_i}\right)^T\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\bigg|_{\tilde{\sigma}_i}\right)(\sigma_i-\sigma_i^e)=$$

$$=(\sigma_i-\sigma_i^e)^T H_i(\sigma_i-\sigma_i^e), \tag{32}$$

где $\tilde{\sigma}_i$ – некоторая точка.

Согласно теоремы Вейля (см. [5]), учитывая что $\lambda_{\min}(-A)=-\lambda_{\max}(A)\ge\ge-\rho(A)\ge-\|A\|$, где $\rho(A)$ – спектральный радиус A, получим следующую оценку:

$$\lambda_{\min}(H_i) \geq \frac{1}{2}\lambda_{\min}\left(\left.\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\right|_{\sigma_i=0} + \left(\left.\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\right|_{\sigma_i=0}\right)^T\right) -$$

$$-\frac{1}{a_i}\left\|\left.\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\right|_{\tilde{\sigma}_i}\right\|^2 - \left\|\left.\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\right|_{\tilde{\sigma}_i} - \left.\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\right|_{\sigma_i=0}\right\| \geq \frac{1}{2}\lambda_{\min}\left(\left.\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\right|_{\sigma_i=0} + \left(\left.\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\right|_{\sigma_i=0}\right)^T\right) -$$

$$-\frac{1}{a_i}\left(\left\|\left.\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\right|_{\tilde{\sigma}_i} - \left.\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\right|_{\sigma_i=0}\right\| + \left\|\left.\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\right|_{\sigma_i=0}\right\|\right)^2 - \left\|\left.\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\right|_{\tilde{\sigma}_i} - \left.\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\right|_{\sigma_i=0}\right\|. \quad (33)$$

Видно, что если $a_i > 2\left\|\left.\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\right|_{\sigma_i=0}\right\|^2 \Bigg/ \lambda_{\min}\left(\left.\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\right|_{\sigma_i=0} + \left(\left.\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\right|_{\sigma_i=0}\right)^T\right)$ и $\left\|\left.\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\right|_{\tilde{\sigma}_i} - \left.\frac{\partial f_i(\sigma_i)}{\partial\sigma_i}\right|_{\sigma_i=0}\right\| < M_i$ (см. обозначения перед Теоремой 2) при всех σ_i, то последняя величина в оценке (33) строго положительна. Значит $\lambda_{\min}(H_i) > 0$ и из (32) имеем, что $\left(\sigma_i - \sigma_i^e - \frac{1}{a_i}(f_i(\sigma_i) - f_i(\sigma_i^e))^T(f_i(\sigma_i) - f_i(\sigma_i^e))\right) > 0, \quad i = 1,2,$ при всех $\sigma_1 \in R^{k_1}$, $\sigma_2 \in R^{k_2}$, соответственно. Согласно введенным обозначениям перед Теоремой 2, матрицу B из выражения (30) можно записать в виде блочной матрицы $B = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & I_{a_1 a_2}^{-1} \end{pmatrix}$. Устойчивость матрицы B, для всех $0 < \mu \leq \tilde{\mu} < \mu^*$, обеспечивает отрицательность величины $z^T B(\mu) z$ в оценке (30) для всех $z \in R^7$.

Таким образом, при выполнении условий Теоремы 2, согласно выражению (30), производная функции $v(x, y, \mu)$ в силу системы (1) отрицательна для всех $x \in R^n$, $y \in R^m$, $0 < \mu \leq \tilde{\mu} < \mu^*$. Значит функция $v(x, y, \mu)$ является функцией Ляпунова, позволяющей в силу теоремы 12.1 (см. [1]) установить глобальную асимптотическую устойчивость состояния равновесия $\left(\left(x^e(p, r_1, r_2)\right)^T, \left(x^e(p, r_1, r_2)\right)^T\right)^T$. Так как (p, r_1, r_2) – произвольная точка области $P \times \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$, то система (1) абсолютно параметрически устойчива относительно этой области. Теорема полностью доказана.

6. Примеры.

I. В качестве первого примера рассмотрим систему вида (1), где $x, y \in R^2$, $p \in R^1$, $r_1 \in R^1$, $r_2 \in R^2$, $A_{11}(p) = \begin{pmatrix} p & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $A_{12}(p) = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $q_1(p) = \begin{pmatrix} p \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$,

$c_{11}(p) = \begin{pmatrix} -0{,}01 & p \end{pmatrix}$, $c_{12}(p) = \begin{pmatrix} p & 0{,}01 \end{pmatrix}$, $A_{21}(p) = \begin{pmatrix} 0{,}001 & 0 \\ p & 0{,}001 \end{pmatrix}$, $A_{22}(p) = \begin{pmatrix} -4+p & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$,

$q_q(p) = \begin{pmatrix} 0,1+p & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix}$, $c_{21}(p) = \begin{pmatrix} 0,001+p & 0 \\ 0 & 0,001 \end{pmatrix}$, $c_{22}(p) = \begin{pmatrix} 0,01 & 0 \\ p & 0,01 \end{pmatrix}$. Нелинейные функции $f_1 : R^1 \to R^1$, $f_2 : R^2 \to R^2$ непрерывно дифференцируемы на R^1 и R^2, соответственно, и таковы, что $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 0$, $\left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\right|_{\sigma_1=0} = 1$, $\left.\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial \sigma_2}\right|_{\sigma_2=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Выберем значение параметра p^* равным 0. Определим матрицы $c_1(p)$, $c_2(p)$, $c_3(p)$ и убедимся, что рассматриваемая система удовлетворяет условиям Предположения 1, *а*. Воспользовавшись подходом, предложенным в п. 3, определим область $\Omega_p = \left\{ p \in R^1 \;\middle|\; |p| < 0,1 \right\}$ из (11) и величину $\alpha = 0,976$ из (12). Значит, если функции $f_1(\sigma_1)$ и $f_2(\sigma_2)$ таковы, что $\left| \left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\right|_{\sigma_1} - \left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\right|_{\sigma_1=0} \right| \le 0,976$, для всех $\sigma_1 \in R^1$, и $\left\| \left.\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial \sigma_2}\right|_{\sigma_2} - \left.\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial \sigma_2}\right|_{\sigma_2=0} \right\| \le 0,976$, для всех $\sigma_2 \in R^2$, то для всех $(p, r_1, r_2) \in \Omega_p \times \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$, где $\Omega_{r_1} = \left\{ r_1 \in R^1 \middle| \, | r_1 | \le c \right\}$, $\Omega_{r_2} = \left\{ r_2 \in R^2 \middle| \, \|r_2\| \le c \right\}$, $c > 0$, существует единственное состояние равновесия исследуемой системы.

Выбрав матрицы $Q_1 = Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, определим матрицы $P_1^* = \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$, $P_2^* = \begin{pmatrix} 0,133 & 0,033 \\ 0,033 & 0,133 \end{pmatrix}$. Используя соотношения (21), (22), (23), (24), вычислим $\Omega_p 1 = \left\{ p \in R^1 \middle| \, | p | \le 0,1 \right\}$, $\beta_1 = 0,9$ и $\Omega_p 2 = \left\{ p \in R^1 \middle| \, | p | \le 0,1 \right\}$, $\beta_2 = 0,9$. Условие (25) выполняется для всех $p \in P = \left\{ p \in R^1 \middle| \, | p | \le 0,1 \right\} = \Omega_p \cap \Omega_p 1 \cap \Omega_p 2$. Значит исследуемая система, согласно Теореме 1, абсолютно параметрически устойчива относительно области $P \times \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$ при всех $\mu \in (0,1]$, если для функций $f_1(\sigma_1)$ и $f_2(\sigma_2)$ выполняются условия $\left| \left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\right|_{\sigma_1} - \left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\right|_{\sigma_1=0} \right| \le 0,9$ для всех $\sigma_1 \in R^1$ и $\left\| \left.\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial \sigma_2}\right|_{\sigma_2} - \left.\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial \sigma_2}\right|_{\sigma_2=0} \right\| \le 0,9$ – для всех $\sigma_2 \in R^2$.

Выбрав $f_1(\sigma_1) = 0,45 \sin \sigma_1 + 0,55 \sigma_1$ и $f_2(\sigma_2) = \begin{pmatrix} -0,225 \sin 2\sigma_{2_1} + 1,45 \sigma_{2_1} \\ 0,225 \sin 2\sigma_{2_2} + 1,45 \sigma_{2_2} \end{pmatrix}$, $\sigma_2^T = (\sigma_{2_1} \; \sigma_{2_2})$, убедимся, что эти функции удовлетворяют полученным секторным условиям. На рис. 1, 2 представлены графики, иллюстрирующие поведение переменных $x^T = (x_1, x_2)$, $y^T = (y_1, y_2)$ рассмотренной выше системы при $p = -0,05$, $\mu = 0,25$, $r_1 = -20$, $r_2^T = (10 - 20)$, $x_0^T = (25 - 25)$, $y_0^T = (15 - 20)$. Состояния равновесия, соответствующие значениям параметров приведенных выше, равны: $x^e = (0,811 - 0,863)^T$, $y^e = (0,375; 0,804)^T$.

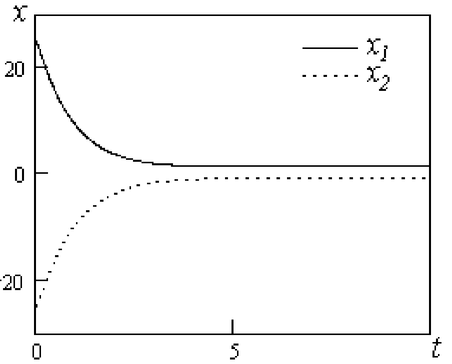

Рис. 1

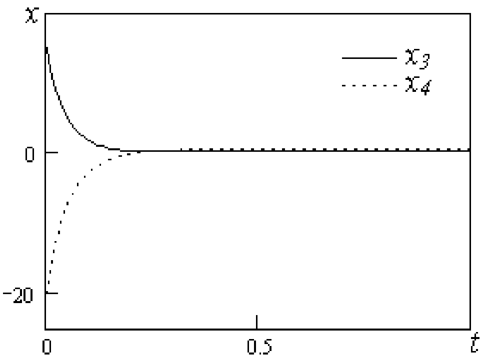

Рис. 2

II. В качестве второго примера рассмотрим систему вида (1), где $x, y \in R^2$, $p \in R^1$, $r_1 \in R^1$, $r_2 \in R^2$, $A_{11}(p) = \begin{pmatrix} 2+p^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{12}(p) = \begin{pmatrix} -20 & 0 \\ p & -20 \end{pmatrix}$, $q_1(p) = \begin{pmatrix} \sin p + p \\ 0,1 \end{pmatrix}$, $c_{11}(p) = \begin{pmatrix} -0,01 & p \end{pmatrix}$, $c_{22}(p) = \begin{pmatrix} p & 0,01 \end{pmatrix}$, $A_{21}(p) = \begin{pmatrix} 1 & \tan p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{22}(p) = \begin{pmatrix} -4 + p^5 \sin p & 0 \\ p^2 & -4 \end{pmatrix}$, $q_q(p) = \begin{pmatrix} 0,01 + p & 0 \\ 0 & 0,01 \end{pmatrix}$, $c_{21}(p) = \begin{pmatrix} 0,01\cos p & 0 \\ p & 0,01 \end{pmatrix}$, $c_{22}(p) = \begin{pmatrix} 0,01 & p \\ 0 & 0,01\cos p \end{pmatrix}$. Нелинейные функции $f_1 : R^1 \to R^1$, $f_2 : R^2 \to R^2$ непрерывно дифференцируемы на R^1 и R^2, соответственно, и таковы, что $f_1(0) = 0$,

$$f_2(0) = 0,\ \left.\frac{\partial f_1(\sigma_1)}{\partial \sigma_1}\right|_{\sigma_1 = 0} = 1,\ \left.\frac{\partial f_2(\sigma_2)}{\partial \sigma_2}\right|_{\sigma_2 = 0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выберем значение параметра p^* равным 0. Определим матрицы $c_1(p)$, $c_2(p)$, $c_3(p)$ и убедимся, что рассматриваемая система удовлетворяет условиям Предположения 1, *b*. Заметим, что матрица $c_1(p^*)$ – неустойчива и использовать векторную функцию Ляпунова, как в примере I, не удастся. С помощью подхода, предложенного в п. 3, определим область $\Omega_p = \left\{ p \in R^1 \middle| \, |p| \le 0,1 \right\}$ из (11) и величину $\alpha = 5,503$ из (12). Таким образом, если функции $f_1(\sigma_1)$ и $f_2(\sigma_2)$ таковы, что $\left| (\partial f_1(\sigma_1))/\partial\sigma_1 \big|_{\sigma_1} - (\partial f_1(\sigma_1))/\partial\sigma_1 \big|_{\sigma_1 = 0} \right| \le 5,503$ для всех $\sigma_1 \in R^1$, и $\left\| (\partial f_2(\sigma_2))/\partial\sigma_2 \big|_{\sigma_2} - (\partial f_2(\sigma_2))/\partial\sigma_2 \big|_{\sigma_2 = 0} \right\| \le 5,503$ для всех $\sigma_2 \in R^2$, то для всех

$(p, r_1, r_2) \in \Omega_p \times \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$, где $\Omega_{r_1} = \left\{ r_1 \in R^1 \middle| \, |r_1| \le c \right\}$, $\Omega_{r_2} = \; = \left\{ r_2 \in R^2 \middle| \, \|r_2\| \le c \right\}$, $c > 0$, существует единственное состояние равновесия исследуемой системы.

Выберем матрицы $P_1 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и сконструируем матричнозначную функцию вида (27). Выберем $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ ($a_1 > 1$, $a_2 > 1$, где 1 – нижняя оценка для a_i, определяемая в условии Теоремы 2, и вычислим $M_1 = 0,236$, $M_2 = 0,372$. Тогда, согласно условию (31) получим, что функции $f_1(\sigma_1)$ и $f_2(\sigma_2)$ должны удовлетворять следующим оценкам: $\left| (\partial f_1(\sigma_1))/\partial\sigma_1 \big|_{\sigma_1} - (\partial f_1(\sigma_1))/\partial\sigma_1 \big|_{\sigma_1=0} \right| \le 0,23$ для всех $\sigma_1 \in R^1$, и $\left\| (\partial f_2(\sigma_2))/\partial\sigma_2 \,|_{\sigma_2} - (\partial f_2(\sigma_2))/\partial\sigma_2 \,|_{\sigma_2=0} \right\| \le 0,37$ для всех $\sigma_2 \in R^2$.

Определим $\mu^* = 0,6$ и убедимся, что матрица B устойчива для всех $p \in P = \; = \left\{ p \in R^1 \middle| \, |p| \le 0,1 \right\}$, $0 < \mu \le 0,37$. Следовательно, если функции $f_1(\sigma_1)$ и $f_2(\sigma_2)$ удовлетворяют оценкам, приведенным выше, то исследуемая система, согласно Теореме 2, абсолютно параметрически устойчива относительно области $P \times \Omega_{r_1} \times \Omega_{r_2}$, где $\Omega_{r_1} = \{r_1 \in R^1 \,|\, |r_1| \le c\}$, $\Omega_{r_2} = \{r_2 \in R^2 \,|\, \|r_2\| \le c\}$, $c > 0$, при всех $\mu \in (0,\ 0,37]$.

Выбрав $f_1(\sigma_1) = -0,0575 \sin 2\sigma_1 + 1,115\sigma_1$ и $f_2(\sigma_2) = \begin{pmatrix} -0,185 \sin \sigma_{2_1} + 1,185\sigma_{2_1} \\ -0,185 \sin \sigma_{2_2} + 1,185\sigma_{2_2} \end{pmatrix}$, $\sigma_2^T = (\sigma_{2_1}, \sigma_{2_2})$, убедимся, что эти функции удовлетворяют полученным секторным условиям. На рис. 3 представлен график, который иллюстрирует поведение переменных $x^T = (x_1\ x_2)$, $y^T = (y_1\ y_2)$ рассмотренной выше системы при $p = 0,07$, $\mu = 0,3$, $r_1 = -250$, $r_2^T = (10 - 20)$, $x_0^T = (25 - 25)$, $y_0^T = (15 - 20)$. Состояния равновесия, соответствующие выбранным значениям параметров, равны: $x^e = (-13,726,\ -7,306)^T$, $y^e = (-3,329,\ -1,744)^T$.

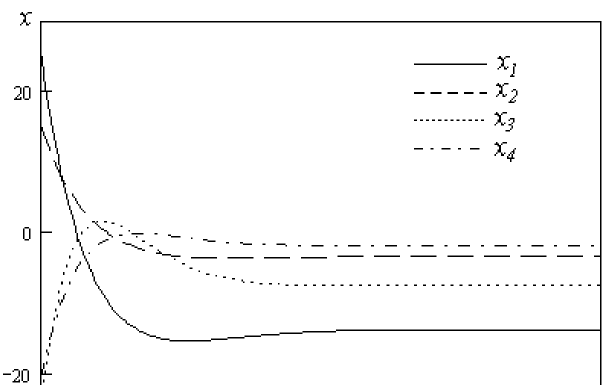

Рис. 3

6. Заключение.

В данной статье для анализа абсолютной параметрической устойчивости неточных сингулярно возмущенных систем использованы многокомпонентные функции Ляпунова, в частности, векторная и матричная. В отличие от работы [14], где для анализа абсолютной параметрической устойчивости неточной сингулярно возмущенной системы также использована векторная функция Ляпунова, в данной работе рассмотрен случай, когда система вида (1) не допускает разделение на “медленную” и “быструю” подсистемы. В этом случае, если система (1) допускает выделение устойчивых при некотором значении параметра подсистем, возможно построить векторную функцию Ляпунова в явном виде и с ее помощью получить достаточные условия абсолютной параметрической устойчивости исходной системы, а также указать область такой устойчивости в пространстве параметров. В случае, если выделение устойчивых подсистем исходной системы по каким-либо причинам не представляется возможным, для анализа абсолютной параметрической устойчивости использована матричнозначная функция Ляпунова. С ее помощью также получены достаточные условия указанного типа устойчивости системы (1) и определена область такой устойчивости в пространстве параметров. В качестве примера применения матричнозначной функции Ляпунова приведена система, одна из подсистем которой неустойчива при некотором значении параметра, однако исходная система – абсолютно параметрически устойчива относительно области, содержащей это значение параметра.

Р Е З Ю М Е . На основі використання багатокомпонентних функцій Ляпунова проведено аналіз абсолютної параметричної стійкості сингулярно збурених механічних систем. Розглянуто випадок, коли висхідна система не дозволяє розділення на “швидку” та “повільну” підсистеми. Отримано достатні умови та області абсолютної параметричної стійкості таких систем.

1. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости – М.: Наука, 1967. – 223 с.
2. *Воронов А.А., Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1987. – 312 с.
3. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика – М.: Мир, 1969. – 447 с.
4. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1988. – 816 с.
5. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
6. *Barnett S., Storey C.* Matrix Methods in Stability Theory. – London, Nelson, 1970. – 170 p.
7. *Hoppensteadt F.* Asymptotic Stability in Singular Perturbation Problems // J. Diff. Eq. – 1968. – N 4. – P. 350 – 358.
8. *Hoppensteadt F.* Singular Perturbations on the Infinite Interval // Trans. Amer. Math. Soc. – 1966. – N 123. – P. 521 – 535.
9. *Kokotovic P.V. O'Malley Jr., Sannuti P.* Singular Perturbation and Order Reduction in Control Theory // Automatica. – 1976. – 12. – P. 123 – 132.
10. *Lakshmikantham V., Matrosov V.M., Sivasundaram S.* Vector Lyapunov Function and Stability Analysis of Nonlinear Systems. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. – 188 p.
11. *Larin V.B., Tunik A.A.* On Inertial Navigation System Error Correction // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 2. – P. 213 – 224.
12. *Martynyuk A.A.* Stability by Lyapunov's matrix function method with applications. – New York: Marcel Dekker, 1998. – 276 p.

13. *Martynyuk A.A.* Uniform asymptotic stability of a singularly perturbed system via the Lyapunov matrix-function // Nonlin. Analysis. – 1987. – N 11. – P. 1 – 4.
14. *Martynyuk A.A., Khoroshun A.S.* Parametric Stability of Singularly Perturbed Nonlinear Uncertain Systems // Int. Appl. Mech. – 2011. – **46**, N 10. – P. 1177 – 1189.
15. *Porter B.* Singular Perturbation Methods in the Design of Stabilizing Feedback Controllers for Multivariable Linear Systems // Int. J. Control. – 1974. – N 20. – P. 689 – 692.
16. *Porter B.* Design of Stabilizing Feedback Controllers for a Class of Multivariable Linear Systems with Slow ana Fast Modes // Int. J. Control. – 1976. – **23**. – P. 49 – 54.
17. *Porter B.* Singular Perturbation Methods in the Design of Stabilizing State Feedback Controllers for Multivariable Linear Systems // Int. J. Control. – 1977. – **26**. – P. 583 – 587.
18. *Siljak D.D.* Singular Perturbation of Absolute Stability // IEEE Trans. – 1972. – AC-17. – 720 p.
19. *Sun J.F., Wang X.L.* Connected Stability Analysis of Delay Systems via the Matrix-Valued Lyuapunov Function // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 5. – P. 623 – 629.
20. *Vasil'ev T.A., Shaldyrvan V.A.* Local Stress Singularities in Mixed Axisymmetric Problems of the Bending of Circular Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 2. – P. 176 – 188.
21. *Wilde R.R., Kokotovic P.* Stability of Singularly Perturbed Systems and Networks with Parasitics // IEEE Trans. – 1972. – AC-17. – P. 245 – 246.
22. *Zien L.* An Upper Bound for the Singular Parameter in a Stable Singularly Perturbed System // J. Franklin Inst. – 1973. – **295.** – P. 373 – 381.

Поступила 31.05.2010 Утверждена в печать 26.06.2013