

А. И. Маневич¹, З. Колаковский²

К ТЕОРИИ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН
С УЧЁТОМ СДВИГОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

¹ Днепропетровский национальный университет,
просп. Гагарина 72, 49010, Днепропетровск, Украина. e-mail: armanevich@yandex.ru

² Technical University of Lodz, Department of Strength of Materials,
Stefanowskiego 1/15, 90-924 Lodz, Poland. e-mail: zbigniew.kolakowski@p.lodz.pl

Abstract. Basing on the dimensionless equations of dynamics of plates with taking into account the shear deformations and rotational inertia, which depend only on one generalized parameter of shear compliance, the physical sense of “the second spectrum” of eigen frequencies is clarified. A parametrical analysis in generalized parameters is carried out.

Key words: plate, first order shear deformations theory, free oscillations, second spectrum, parametrical analysis.

Введение.

Теория пластин с учётом сдвиговых деформаций развивается в течение нескольких десятилетий, начиная с работ [13, 17] («сдвиговая теория первого порядка» или «теория Рейсснера – Миндлина»; обзоры в [2, 3, 4, 20]). Динамика пластин с учётом податливости на сдвиг и инерции поворота рассмотрена впервые, по-видимому, в работе [6]. Позже обширные исследования в этой области выполнены авторами работ [1, 5, 8, 10 – 12, 16] и другими исследователями. В этих работах представлен, в частности, детальный численный анализ влияния сдвиговой податливости на собственные частоты колебаний на основе различных вариантов теории.

Следует обратить внимание на следующее обстоятельство. Уже в первых работах по динамике пластин и стержней с учётом сдвиговых деформаций ([6] и др.) было установлено существование двух спектров собственных частот (одной и той же пространственной форме полного прогиба соответствуют две существенно различные собственные частоты, как правило, низкая и высокая частоты). Но смысл этих двух ветвей до настоящего времени полностью не выяснен. Обычно утверждается, что первая ветвь относится к, преимущественно, изгибным колебаниям и волнам, вторая – к преимущественно сдвиговым. Но поскольку речь идёт лишь о соотношении изгибной и сдвиговой компонент, присутствующих в обоих спектрах, различие между двумя спектрами оказывается чисто количественным. Одновременно в ряде работ отмечены сомнения относительно значимости второго спектра как для балок Тимошенко, так и для пластин со сдвиговой податливостью, как не имеющего физического смысла, и предложено отбрасывать результаты, связанные со второй ветвью собственных частот [7, 17, 18]. Анализ различных публикаций показывает, что до настоящего времени отсутствует единая точка зрения на смысл второго спектра собственных значений.

В работе [19] был отмечен важный факт: для первого спектра балки Тимошенко углы сдвига и изгиба имеют одинаковую фазу и складываются, составляя полный

угол прогиба; для второго спектра сдвиговые и изгибные углы противоположны по фазе и приводят к полному углу, равному их разности. Позже это наблюдение для балок подтверждено в других работах [9, 17]. Для пластин аналогичные утверждения, насколько авторам известно, не выдвигались, даже в форме результатов иллюстративных расчётов.

В данной работе на основе безразмерных уравнений динамики пластины (в рамках «теории сдвиговой деформации первого порядка»), зависящих лишь от одного обобщённого безразмерного параметра сдвиговой податливости, дано строгое обоснование качественного различия между двумя спектрами собственных частот (на примере шарнирно опертой пластины) и выполнен обобщённый параметрический анализ.

§1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Существуют различные варианты вывода основных уравнений сдвиговой теории пластин первого порядка (обсуждавшиеся в [2, 3, 20] и др.). Ниже дан простейший вариант вывода.

Рассмотрим изотропную пластину постоянной толщины h с осями координат x , y в срединной плоскости и осью z – по нормали. Пусть $w(x, y)$ – полный прогиб (от изгиба и сдвига), ψ_x, ψ_y – углы поворота нормальных сечений вследствие изгиба, β_x, β_y – углы сдвига (осреднённые по толщине пластины).

Полные углы поворота нормали к срединной поверхности в двух плоскостях равны

$$\frac{\partial w}{\partial x} \equiv w_{,x} = \psi_x + \beta_x; \quad \frac{\partial w}{\partial y} \equiv w_{,y} = \psi_y + \beta_y. \quad (1.1)$$

Перемещения произвольной точки в плоскости пластины выражаются через углы ψ_x, ψ_y : $u = -z\psi_x$; $v = -z\psi_y$; соответственно, деформации $\varepsilon_x^{(z)} = -z\psi_{x,x}$; $\varepsilon_y^{(z)} = -z\psi_{y,y}$; $\gamma_{xy}^{(z)} = -z(\psi_{x,y} + \psi_{y,x})$. Соотношения упругости при пренебрежении нормальными напряжениями σ_z приводят к выражениям для изгибающих и крутящих моментов (при обычных правилах знаков для моментов)

$$M_x = -D(\psi_{x,x} + \nu\psi_{y,y}); \quad M_y = -D(\psi_{y,y} + \nu\psi_{x,x}); \quad M_{xy} = -D\frac{1-\nu}{2}(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}). \quad (1.2)$$

Поперечные силы выражаются через осреднённый угол сдвига и затем – через полный прогиб и углы ψ_x, ψ_y :

$$Q_x = Gh\beta_x = Gh(w_{,x} - \psi_x); \quad Q_y = Gh\beta_y = Gh(w_{,y} - \psi_y) \quad (1.3)$$

(отметим, что здесь, следуя [3, 20], не вводим сдвиговой поправочный коэффициент k , равный $2/3$, $5/6$ или $\pi^2/12$, так как под β_x, β_y понимаются осреднённые по толщине углы сдвига).

Уравнения равновесия для силовых факторов при поперечных колебаниях с учётом внешней распределённой поперечной нагрузки $q(x, y, t)$ имеют вид (ρ – плотность)

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} - \rho h w_{,tt} + q = 0; \quad (1.4)$$

$$M_{x,x} + M_{y,y} - Q_x + \frac{\rho h^3 \psi_{x,tt}}{12} = 0; \quad (1.5)$$

$$M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_y + \frac{\rho h^3 \psi_{y,tt}}{12} = 0. \quad (1.6)$$

Исключая Q_x и Q_y из (1.5), (1.6) и подставляя в (1.4), получаем разрешающее уравнение относительно прогиба и углов ($\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – гармонический оператор)

$$-D(\nabla^2 \psi_{x,x} + \nabla^2 \psi_{y,y}) + \frac{\rho h^3 \psi_{x,xtt}}{12} + \frac{\rho h^3 \psi_{y,ytt}}{12} - \rho h w_{,tt} + q = 0. \quad (1.7)$$

Если ввести потенциальную функцию φ – «проникающий потенциал» или прогиб вследствие изгиба (без сдвига и без учёта возможного, так называемого, «краевого потенциала»)

$$\psi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \psi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (1.8)$$

уравнение (1.7) принимает вид

$$D \nabla^2 \nabla^2 \varphi - \frac{\rho h^3 \nabla^2 \varphi_{,tt}}{12} + \rho h w_{,tt} - q = 0. \quad (1.9)$$

Второе уравнение получим из первого уравнения (1.4) с учётом соотношений упругости (1.3)

$$G h (w_{,xx} - \psi_{x,x}) + G h (w_{,yy} - \psi_{y,y}) - \rho h w_{,tt} + q = 0,$$

откуда с учётом (1.8) следует уравнение

$$G h (\nabla^2 w - \nabla^2 \varphi) - \rho h w_{,tt} + q = 0. \quad (1.10)$$

Уравнения (1.9) и (1.10) составляют разрешающую систему уравнений динамики сдвиговой теории пластины первого порядка. Исключая из этой системы функцию φ , получаем разрешающее уравнение динамики пластины относительно полного прогиба в виде

$$\nabla^2 \nabla^2 w - \left(\frac{\rho}{G} + \frac{\rho h^3}{12D} \right) \nabla^2 w_{,tt} + \frac{\rho h}{D} w_{,tt} + \frac{\rho h^3}{12D G} w_{,ttt} = \frac{q}{D} + \frac{\rho h^3}{12D G h} \frac{q_{,tt}}{G h} - \frac{1}{G h} \nabla^2 q. \quad (1.11)$$

Для классической модели пластины (но с учётом инерции вращения) следует принять $G \rightarrow \infty$; тогда приходим к уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\rho h}{D} w_{,tt} - \frac{\rho h^3}{12D} \nabla^2 w_{,tt} = \frac{q}{D}, \quad (1.12)$$

где последнее слагаемое в левой части (1.12) учитывает инерцию вращения (в двух плоскостях).

Уравнения вида (1.9), (1.10) и разрешающее уравнение (1.11) (или им равносильные) неоднократно встречались в литературе (в различных обозначениях [6, 16 и др.]). Следует отметить, что введение одной потенциальной функции (1.8), согласно которому две независимые функции ψ_x, ψ_y выражены через одну функцию φ , равносильно предположению о полном прогибе как суперпозиции прогибов, вызванных изгибом и сдвигом. Это предположение, в точности оправданное для балки Тимошенко, для пластины накладывает некоторое ограничение, так как исключает из рассмотрения так называемый краевой эффект Рейсснера [14, 20]. Для учёта этого эффекта

необходимо дополнить уравнение (1.11) уравнением второго порядка для «краевого потенциала» (уравнение Гельмгольца) и порядок системы повышается до шестого. Однако указанный краевой эффект появляется лишь при специальных граничных условиях, которые в данной работе не рассматриваются (наличие крутящих моментов на крае), и приведенные выше уравнения адекватны для решения рассмотренных задач. Отметим также, что в последние годы теория, основанная на суперпозиции изгибного и сдвигового прогибов пластины, получила широкое распространение (так называемая “two variable refined plate theory” [8, 16 и др.]).

Наряду с уравнением (1.11) получим также уравнение относительно изгибного прогиба φ , которое может быть использовано для анализа форм колебаний. Исключая из уравнений (1.9), (1.10) w , получаем уравнение относительно φ в виде

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi - \left(\frac{\rho}{k^2 G} + \frac{\rho h^3}{12D} \right) \nabla^2 \varphi_{,tt} + \frac{\rho h}{D} \varphi_{,tt} + \frac{\rho}{k^2 G} \frac{\rho h^3}{12D} \varphi_{,tttt} = \frac{q}{D}. \quad (1.13)$$

Отметим, что операторы в левых частях уравнений для w (1.11) и φ (1.13) совпадают. Можно получить также уравнение относительно сдвигового прогиба S , равного разности $S = w - \varphi$, если вычтем из (1.11) уравнение (1.13). Очевидно, что при этом оператор в левой части уравнения останется тем же (правая часть изменится).

§2. Обобщённые уравнения в безразмерных переменных и параметрах.

Анализ динамики пластины непосредственно на основе уравнений (1.9), (1.10) или (1.11), (1.13) нецелесообразен ввиду большого количества входящих в них параметров. Введём безразмерные переменные, отнеся координаты и перемещения к толщине пластины и вводя безразмерное время,

$$\xi = \frac{x}{h}; \quad \eta = \frac{y}{h}; \quad W = \frac{w}{h}; \quad \Phi = \frac{\varphi}{h}; \quad \tau = \frac{c}{h} t; \quad c^2 = \frac{E}{\rho} \quad (2.1)$$

(c – скорость звука в материале пластины). Вводим также безразмерные параметры

$$\chi = \frac{E}{G}; \quad \tilde{q} = \frac{q}{E} \quad (2.2)$$

(χ – параметр, характеризующий податливость балки на сдвиг; для классической модели пластины Кирхгофа $\chi = 0$, что соответствует бесконечно большой жёсткости на сдвиг).

Система уравнений (1.9), (1.10) в безразмерных переменных принимает вид (здесь и далее ∇^2 обозначает уже оператор Лапласа в безразмерных переменных ξ, η)

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi - (1 - \nu^2) \nabla^2 \Phi_{,\tau\tau} + 12(1 - \nu^2) W_{,\tau\tau} = 12(1 - \nu^2) \tilde{q}; \quad (2.3)$$

$$\nabla^2 W - \chi W_{,\tau\tau} - \nabla^2 \Phi = -\chi \tilde{q}. \quad (2.4)$$

Уравнения (1.11) и (1.13) в безразмерных переменных принимают, соответственно, вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 W - (\chi + 1 - \nu^2) \nabla^2 W_{,\tau\tau} + (1 - \nu^2) (12 W_{,\tau\tau} + \chi W_{,\tau\tau\tau\tau}) = \\ = 12(1 - \nu^2) \tilde{q} - \chi \nabla^2 \tilde{q} + (1 - \nu^2) \chi \tilde{q}_{,\tau\tau}; \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi - (\chi + 1 - \nu^2) \nabla^2 \Phi_{,\tau\tau} + 12(1 - \nu^2) \Phi_{,\tau\tau} + (1 - \nu^2) \chi \Phi_{,\tau\tau\tau\tau} = 12(1 - \nu^2) \tilde{q}. \quad (2.5)$$

Если $q = 0$, то (2.4) примет вид

$$\nabla^2 \Phi = \nabla^2 W - \chi W_{,\tau\tau}. \quad (2.6)$$

Прогиб от сдвига (нормированный делением на h), равен разности $S = W - \Phi$. Из (2.6) следует, что

$$\nabla^2 S = \nabla^2 W - \nabla^2 \Phi = \chi W_{,\tau\tau}. \quad (2.7)$$

Полученные выше уравнения содержат только один обобщённый параметр χ , что даёт возможность провести исчерпывающий общий анализ решения.

§3. Собственные колебания шарнирно опёртой пластины.

Для выяснения особенностей динамики пластины при учёте сдвига рассмотрим простейшую задачу о свободных колебаниях прямоугольной пластины, занимающей в плане область $0 \leq x \leq l$; $0 \leq y \leq b$. На краях пластины выполняются условия шарнирного опирания, например, на краях $x=0$ и $x=l$ ($\xi=0$ и $\xi=l/h$) имеем для изгибного прогиба $\Phi = 0$; $\Phi_{,\xi\xi} = 0$. Как следует из (2.6), (2.7), аналогичные условия выполняются для полного прогиба: $W = 0$; $W_{,\xi\xi} = 0$, а также для сдвигового прогиба.

Принимая для свободных колебаний $\tilde{q} = 0$, имеем из (2.5) уравнение

$$\nabla^2 \nabla^2 W - (\chi + 1 - \nu^2) \nabla^2 W_{,\tau\tau} + 12(1 - \nu^2) W_{,\tau\tau} + \chi(1 - \nu^2) W_{,\tau\tau\tau} = 0 \quad (3.1)$$

и аналогичные уравнения для Φ и S . Принимаем решение в виде

$$W(\zeta, \eta, \tau) = W_{mn} e^{i\Omega_{mn}\tau} \sin \alpha_m \zeta \sin \beta_n \eta; \quad \Phi(\zeta, \eta, \tau) = \Phi_{mn} e^{i\Omega_{mn}\tau} \sin \alpha_m \zeta \sin \beta_n \eta; \quad (3.2)$$

$$S(\zeta, \eta, \tau) = S_{mn} e^{i\Omega_{mn}\tau} \sin \alpha_m \zeta \sin \beta_n \eta$$

$$\left(\alpha_m = \frac{m\pi h}{\ell}; \quad \beta_n = \frac{n\pi h}{b}; \quad m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots \right). \quad (3.3)$$

Отметим, что безразмерная частота Ω_{mn} связана с размерной частотой ω_{mn} соотношением $\omega_{mn} = \Omega_{mn} c / h$.

Подстановка (3.2) в (3.1) приводит к частотному уравнению

$$(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 - \Omega_{mn}^2 (\chi + (1 - \nu^2)) (\alpha_m^2 + \beta_n^2) - 12(1 - \nu^2) \Omega_{mn}^2 + \chi(1 - \nu^2) \Omega_{mn}^4 = 0. \quad (3.4)$$

При отсутствии сдвиговой податливости $\chi = 0$ (но с учётом инерции поворота) частотное уравнение упрощается и даёт единственное значение частоты (для данных m и n)

$$\Omega_{mn,0}^2 = \frac{\alpha_m^4 (1 + \gamma_{mn}^2)^2}{(1 - \nu^2) (\alpha_m^2 (1 + \gamma_{mn}^2) + 12)}, \quad (3.5)$$

где

$$\gamma_{mn} = \frac{\beta_n}{\alpha_m} = \frac{n}{m} \frac{\ell}{b}. \quad (3.6)$$

Для общего случая $\chi \neq 0$ частотное уравнение (3.4) запишем в виде

$$a \Omega_{mn}^4 - d \Omega_{mn}^2 + c = 0 \quad (3.7)$$

$$(a = (1 - \nu^2)\chi; \quad d = \alpha_m^2(1 + \gamma_{mn}^2)(1 - \nu^2 + \chi) + 12(1 - \nu^2); \quad c = \alpha_m^4(1 + \gamma_{mn}^2)^2). \quad (3.8)$$

Уравнение (3.7) имеет два корня

$$\Omega_{mn,1}^2 = \frac{d - \sqrt{D}}{2a}; \quad \Omega_{mn,2}^2 = \frac{d + \sqrt{D}}{2a}; \quad (3.9)$$

$$D = [\alpha_m^2(1 + \gamma_{mn}^2)(1 - \nu^2 + \chi) + 12(1 - \nu^2)]^2 - 4(1 - \nu^2)\chi\alpha_m^4(1 + \gamma_{mn}^2)^2. \quad (3.10)$$

Для дальнейшего важно, что дискриминант D может быть представлен также в форме

$$D = [\alpha_m^2(1 + \gamma_{mn}^2)(1 - \nu^2 - \chi) + 12(1 - \nu^2)]^2 + 48(1 - \nu^2)\chi\alpha_m^2(1 + \gamma_{mn}^2). \quad (3.11)$$

Из (3.11) видно, что всегда $D > 0$, оба корня $\Omega_{mn,1}^2$, $\Omega_{mn,2}^2$ – действительны, а из (3.8) – (3.10) следует, что оба корня положительны. Для каждой пары m и n есть две собственные частоты (две ветви или два спектра собственных частот).

§4. О двух спектрах собственных частот.

Для выяснения качественных отличий между двумя ветвями частот рассмотрим соотношение амплитудных величин W_{mn} , Φ_{mn} и S_{mn} . Подставив выражения (3.2) в уравнения (2.6) и (2.7), имеем равенства

$$\alpha_m^2(1 + \gamma_{mn}^2)\Phi_{mn} = \alpha_m^2(1 + \gamma_{mn}^2)W_{mn} - \chi\Omega_{mn}^2W_{mn}; \quad (4.1)$$

$$\alpha_m^2(1 + \gamma_{mn}^2)S_{mn} = \chi\Omega_{mn}^2W_{mn},$$

откуда получим формулы

$$\Phi_{mn} = \left(1 - \frac{\chi\Omega_{mn}^2}{\alpha_m^2(1 + \gamma_{mn}^2)}\right)W_{mn}; \quad (4.2)$$

$$S_{mn} = \frac{\chi\Omega_{mn}^2}{\alpha_m^2(1 + \gamma_{mn}^2)}W_{mn}; \quad (4.3)$$

$$\Phi_{mn} = \frac{\alpha_m^2(1 + \gamma_{mn}^2) - \chi\Omega_{mn}^2}{\chi\Omega_{mn}^2}S_{mn}. \quad (4.4)$$

Определим знак числителя $\alpha_m^2(1 + \gamma_{mn}^2) - \chi\Omega_{mn}^2$ в (4.4) для каждого из двух корней $\Omega_{mn,1}^2$ и $\Omega_{mn,2}^2$ по (3.9). Для обоих корней имеем

$$\alpha_m^2(1 + \gamma_{mn}^2) - \chi\Omega_{mn}^2 = \frac{2a\alpha_m^2(1 + \gamma_{mn}^2) - \chi d \pm \chi\sqrt{D}}{2a}. \quad (4.5)$$

Для определения знака величины (4.5) (учитывая, что $a > 0$) сравним величины D и e^2 , где $e \equiv 2a\alpha_m^2(1 + \gamma_{mn}^2)/\chi - d$. С учётом обозначений (3.8) тогда имеем

$$\begin{aligned} e &= 2(1 - \nu^2)\alpha_m^2(1 + \gamma_{mn}^2) - [\alpha_m^2(1 + \gamma_{mn}^2)(1 - \nu^2 + \chi) + 12(1 - \nu^2)] = \\ &= \alpha_m^2(1 + \gamma_{mn}^2)(1 - \nu^2 - \chi) - 12(1 - \nu^2), \end{aligned}$$

и с учётом (3.11) получаем

$$D - e^2 = \left[\alpha_m^2 (1 + \gamma_{mn}^2) (1 - \nu^2 - \chi) + 12(1 - \nu^2) \right]^2 + 48(1 - \nu^2) \chi \alpha_m^2 (1 + \gamma_{mn}^2) - \left[\alpha_m^2 (1 + \gamma_{mn}^2) (1 - \nu^2 - \chi) - 12(1 - \nu^2) \right]^2 = 48(1 - \nu^2)^2 \alpha_m^2 (1 + \gamma_{mn}^2) > 0.$$

Отсюда следует, что всегда $\sqrt{D} > |e|$. Следовательно, числитель в (4.5) положителен для первой ветви (верхний знак «+») и отрицателен – для второй. Соответственно, знаки Φ_{mn} и S_{mn} для первой ветви одинаковы и для второй ветви – противоположны. Также из (4.2) и (4.5) следует, что для первой ветви знаки Φ_{mn} и полного прогиба W_{mn} совпадают, а для второй – противоположны (знаки S_{mn} и W_{mn} всегда одинаковые, см. (4.3)).

Таким образом, доказано, что в первой ветви прогибы от изгиба и сдвига колеблются в фазе (как и полный прогиб, равный их сумме); во второй ветви прогибы от сдвига и изгиба осциллируют в противофазе, причём прогиб от сдвига доминирует, вследствие чего полный прогиб колеблется в фазе со сдвиговым прогибом.

В этом состоит качественное отличие собственных форм колебаний (и волн) двух спектров пластин со сдвиговой податливостью.

§5. Численный анализ в безразмерных переменных и параметрах.

Полученные выше безразмерные уравнения свободных колебаний пластины Тимошенко, зависящие только от одного параметра $\chi = E/G$, позволяют придать результатам расчётов большую общность (по сравнению с расчётами, основанными на уравнениях с несколькими параметрами). Это иллюстрируют приведенные ниже результаты численного анализа решения в обобщённых безразмерных параметрах.

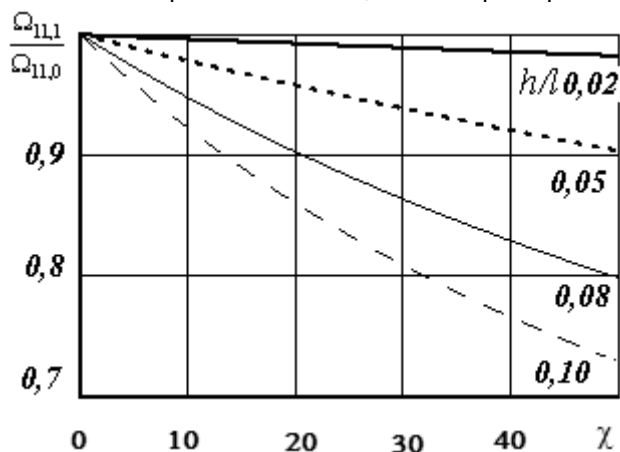


Рис. 1

Рассмотрена квадратная пластина $b = l$, для которой влияние параметра сдвиговой податливости χ на первые собственные значения для обеих ветвей зависит только от относительной толщины пластины h/l . Рис. 1 иллюстрирует влияние сдвиговой податливости на первую собственную частоту колебаний квадратной пластины, нормализованную делением на $\Omega_{11,0}$ (3.5) (принималось $\nu = 0,3$), для различных значений относительной толщины пластины h/l .

Значения безразмерной первой собственной частоты колебаний квадратной пластины (первая ветвь) для разных h/l и трёх значений $\chi=0,2; 3$ и 50 приведены в табл. 1.

Таблица 1

h/l	$\Omega_{11,1}$		
	χ		
	0,1	3,0	50
0,01	0,0005972	0,0005971	0,0005946
0,015	0,001343	0,001342	0,001330
0,02	0,002388	0,002385	0,002346
0,03	0,005371	0,005359	0,005166
0,05	0,01489	0,01480	0,01346
0,075	0,03342	0,03295	0,02730

Таблица 2

m	$\Omega_{11,1}$		
	χ		
	0,1	3,0	50
1	0,002388	0,002385	0,002346
2	0,005967	0,005952	0,005716
3	0,01192	0,01186	0,01098
4	0,02024	0,02007	0,01773
5	0,03091	0,03050	0,02556

Для значения $\chi = 50$ первая собственная частота уменьшается на 10% при $h/l=0,05$ и примерно на 27% при $h/l = 0,1$ (по сравнению с классической моделью $\chi = 0$).

Значения безразмерной собственной частоты $\Omega_{mn,1} = \omega_{mn,1} h/c$ для нескольких значений числа полуволн по длине m при $n = 1$ даны в табл. 2.

Очевидно, что увеличение m равносильно уменьшению длины (увеличению h/l , но с одновременным изменением параметра γ (3.6)), поэтому влияние сдвиговой податливости с увеличением m возрастает.

Для второй ветви зависимости собственной частоты $\Omega_{mn,2}$ от параметра χ показаны на рис. 2 (для $m = 1; n = 1$). Кривые построены для двух значений $h/l = 0,02; 0,1$. Влияние параметра h/l на собственную частоту для второго спектра оказывается значительно меньшим, чем для первого.

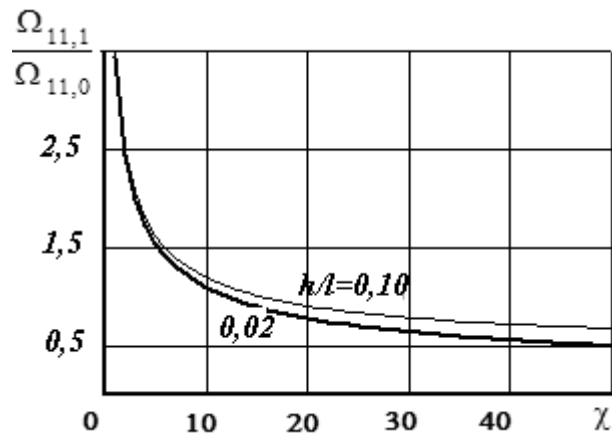


Рис. 2

Значения безразмерной собственной частоты $\Omega_{m1,2} = \omega_{m1,2}h/c$ (второй ветви) для нескольких чисел полувольт по длине m при $n = 1$ ($h/l = 0,02$) даны в табл. 3.

Таблица 3

χ	$\Omega_{11,2}$ ($m = 1$)	$\Omega_{31,2}$ ($m = 3$)	$\Omega_{51,2}$ ($m = 5$)
0,01	34,65	34,70	34,79
0,1	10,96	10,97	11,01
1,0	3,466	3,476	3,495
3,0	2,003	2,014	2,036
5,0	1,552	1,566	1,591
10,0	1,100	1,117	1,150
20,0	0,7804	0,8033	0,8468
30,0	0,6395	0,6668	0,7180
40,0	0,5558	0,5867	0,6439
50,0	0,4988	0,5330	0,5951

Как видно из приведенных данных, собственные частоты для второй ветви на несколько порядков выше, чем для первой. Это – высокочастотная ветвь с совершенно другим характером деформаций по сравнению с первой (низкочастотной) ветвью.

При изменении длины волны собственная частота для второй ветви меняется незначительно.

Рассмотрим влияние параметра сдвиговой податливости на собственные формы, т.е. на отношения Φ_{mn}/W_{mn} ; S_{mn}/Φ_{mn} ; S_{mn}/W_{mn} . Для первой ветви два первых отношения в зависимости от параметра χ показаны на рис. 3, а, б ($h/l = 0,02$; $\nu = 0,3$; $n = 1$).

Как видно из рис. 3, изгибный прогиб превалирует в полном прогибе, хотя доля сдвигового прогиба возрастает с увеличением числа полуволн m .

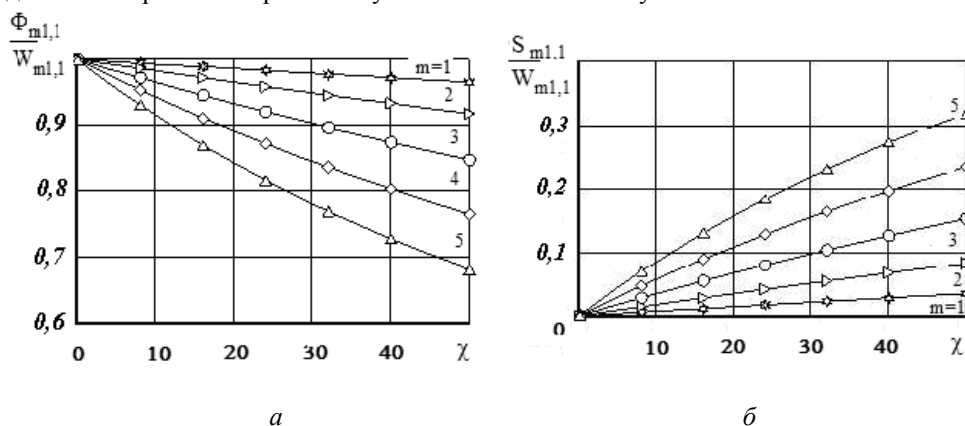


Рис. 3

Для второй ветви соотношение амплитуд изгибного и сдвигового прогибов $\Phi_{m1,2} / S_{m1,2}$ квадратной пластины при различных значениях параметра сдвиговой податливости χ для $h/\ell=0.02$ и разных m приведены в табл. 4 ($n=1$; $\nu=0,3$).

Таблица 4

m	$\Phi_{m1,2} / S_{m1,2}$		
	χ		
	0,1	3,0	50
1	-0,99934	-0,99934	-0,99936
2	-0,99835	-0,99836	-0,99849
3	-0,99672	-0,99675	-0,99722
4	-0,99444	-0,99453	-0,99573
5	-0,99152	-0,99174	-0,99420

Видим, что отношение $\Phi_{m1,2} / S_{m1,2}$ близко к -1 при всех m . Это значит, что изгибные и сдвиговые колебания происходят почти с одинаковыми амплитудами, но в противофазе. При этом полный прогиб пренебрежимо мал.

Выводы.

На основе безразмерных уравнений динамики пластин с учётом сдвиговых деформаций и инерции поворота, зависящих только от одного параметра сдвиговой податливости, выяснен физический смысл второго спектра собственных частот. На примере свободных колебаний шарнирно опёртой пластины доказано, что в первом спектре прогибы от изгиба и сдвига колеблются в фазе (как и полный прогиб, равный их сумме); во второй ветви прогибы от сдвига и изгиба осциллируют в противофазе, причём прогиб от сдвига доминирует, вследствие чего полный прогиб колеблется в фазе со сдвиговым прогибом. Выполнен параметрический анализ собственных частот и собственных форм колебаний в обобщённых параметрах.

РЕЗЮМЕ. На основі безрозмірних рівнянь динаміки пластин із урахуванням деформацій зсуву та інерції повороту, що залежать тільки від одного узагальненого параметра жорсткості на зсув, виявлено фізичний сенс «другого спектру» власних частот. Виконано параметричний аналіз в узагальнених параметрах.

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. – 268 с.
2. Васильев В. В. О теории тонких пластин // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 1992. – №3. – С. 26–47.
3. Васильев В. В. К дискуссии по классической теории пластин // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 1995. – №4. – С. 140–150.
4. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Серия: Механика твёрдых деформируемых тел. Т. 5. – М.: ВИНТИ, 1973. – 272 с.
5. Доннел Л. Г. Балки, пластины и оболочки. – М.: Наука, 1982. – 567 с.
6. Уфлянд Я. С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // Прикл. математика и механика. – 1948. – 12, №3. – С. 287–300.
7. Abbas, B. A. H., Thomas, J. The second frequency spectrum of Timoshenko beams // J. Sound and Vibr. – 1977. – 51, N 1. – P. 123–137.
8. Kim S.-E., Thai H.-T., J. Lee. A two variable refined plate theory for laminated composite plates // Composite Structures – 2009. – 89, N 2. – P. 197–205.
9. Manevich A., Kolakowski Z. Free and forced oscillations of Timoshenko beam made of viscoelastic material // J. Theor. and Appl. Mech. (Warsaw). – 2011. – 49, N 1. – P. 3–16.
10. Mindlin R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1951. – 18, N1 – P. 31–38.
11. Reddy J. N. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation // Int. J. Solids and Struct. – 1984. – 20. – P. 881–896.
12. Reddy J. N., Phan N. D. Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory // J. Sound and Vibr. – 1985. – 98. – P. 157–170.
13. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates // J. Math. and Phys. – 1944. – 23, N 4. – P. 184–191.
14. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1945. – 67. – P. A69–A77.
15. Shimpi R. P., Patel H. G. Free vibrations of plate using two variable refined plate theory // J. Sound and Vibr. – 2006. – 296. – P. 979–999.
16. Stephen, N.G. The second spectrum of Timoshenko beam theory – Further assessment // J. Sound and Vibr. – 2006. – 292, N 1–2. – P. 372–389.
17. Stephen, N.G., Puchegger S. On the valid frequency range of Timoshenko beam theory // J. Sound and Vibr. – 2006. – 297, N 3–5. – P. 1082–1087.
18. Trail-Nash R. W., Collar A. R. The effect of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams // Quart. J. Mech. And Appl. Math. – 1953. – 6, part 2. – P. 186–222.
19. Vasiliev V. V. Modern Conceptions of Plate Theory // Composite Struct. – 2000. – 48, N1. – 3. – P. 39–48.

Поступила 29.11.2010

Утверждена в печать 26.06.2013