

А. А. Мартынюк, А. С. Хорошун, А. Н. Черниенко

О ПРАКТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ РОБОТА
ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАДАННЫХ ОБЛАСТЕЙ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail:center@inmech.kiev.ua*

Abstract. A practical stability of motion of the robot that interacts with an environment is studied. The sufficient conditions of practical stability of the motion around a programmed trajectory are established for the force of interaction between robot and environment which obeys the given law.

Key words: robot interacting with an environment, programmed motion, practical stability, Lyapunov function.

Введение.

Широкое применение роботов в различных производствах стимулирует совершенствование как математических моделей их поведения, так и средств качественного анализа движений. Одной из центральных проблем в этом направлении является анализ практической устойчивости робота, взаимодействующего со средой.

В данной статье получены достаточные условия движения робота относительно наперед заданных областей в фазовом пространстве, которые характеризуют начальное состояние и область допустимых движений, при условии, что сила взаимодействия робота со средой асимптотически стремится к наперед заданной. Статья является продолжением работы [12] и в ней сохранены принятые там обозначения.

1. Постановка задачи.

Движение робота описываем следующей системой дифференциальных уравнений [3, 14]:

$$H(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) = \tau + J^T(q)F,$$

где $q, \dot{q}, \ddot{q} \in R^n$ – векторы обобщенных координат, скоростей и ускорений робота; $H(q)$ – положительно определенная матрица моментов инерции манипуляторов; $h(q, \dot{q})$ – n -мерная нелинейная вектор-функция, которая вводит в рассмотрение моменты центробежных, кориолисовых и гравитационных сил; $\tau = \tau(t)$ – n -мерный вектор управления; $J^T(q)$ – $n \times m$ -мерная матрица Якоби, которая описывает взаимосвязь между скоростями рабочих органов робота и его обобщенными скоростями; $F = F(t)$ – n -мерный вектор обобщенных сил или обобщенных сил и моментов сил, действующих на исполнительные органы робота со стороны динамической среды.

Если среда не обладает смещениями, которые независимы от движений исполнительных органов робота, то ее математическая модель описывается нелинейным векторным уравнением следующего вида, [3]:

$$M(s)\ddot{s} + L(s, \dot{s}) = -F, \quad s = \varphi(q),$$

где s – вектор смещений среды; $\varphi(q)$ – векторная функция, связывающая координаты s и q . При некоторых предположениях [3] это уравнение можно представить в виде

$$M(q)\ddot{q} + L(q, \dot{q}) = -S^T(q)F,$$

где $M(q)$ – невырожденная матрица размерности $n \times n$; $L(q, \dot{q})$ – нелинейная n -мерная векторная функция; $S^T(q)$ – n -мерная матрица ранга n .

Таким образом, совокупность систем уравнений, которые описывают движение робота и поведение среды, представляют собой математическую модель робота, взаимодействующего со средой. Согласно работам [3, 10, 14], указанную совокупность систем дифференциальных уравнений можно привести к векторному дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \alpha(t, x) + \beta(t, x)\mu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где $x(t) \in R^{2n}$ – вектор состояния робота в момент $t \in R_+$; $A(t)$ – матрица и $\alpha(t, x) = o(\|x\|)$ при $x \rightarrow 0$; $\beta(t, x)\mu(t)$ – вектор-функции соответствующей размерности. Вопрос об устойчивости движения робота, взаимодействующего со средой, решаем путем рассмотрения решений системы уравнений, состоящей из уравнения (1) и уравнения

$$\frac{d\mu}{dt} = Q(\mu), \quad \mu(t) = F(t) - F_p(t), \quad (2)$$

где функция $Q(t)$ характеризует качество переходного процесса при соответствующих предположениях о функциях, описывающих воздействие среды на робот. Отметим, что поскольку силу взаимодействия между средой и роботом $F(t)$ предполагаем асимптотически стремящейся к наперед заданной $F_p(t)$, то решение уравнения (2) $\mu(t) = 0$ предполагаем также асимптотически устойчивым.

Уравнение движения робота, взаимодействующего со средой, представим в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \alpha(t, x) + \beta(t, x) \int_{t_0}^t Q(\mu(s))ds, \quad (3)$$

принимая во внимание, что вектор-функция $\mu(t)$ имеет представление

$$\mu(t) = \int_{t_0}^t Q(\mu(s))ds. \quad (4)$$

Пусть $S(t)$ обозначает открытую связную область в R^{2n} , $\bar{S}(t)$ – замыкание $S(t)$ и $\partial S(t)$ – граница области $S(t)$. Предположим, что область $S(t)$ ограничена при всех $t \in R_+$ и $\lim_{t \rightarrow t^*} S(t) = S(t^*)$ существует при любом $t^* \in R_+$. Обозначим

$$S(t) \setminus S_0(t_0) = \{x \in R^{2n} : x \in S(t), x \in \bar{S}_0(t_0)\}.$$

Определение 1. Движение $x(t)$ исполнительного органа робота практически устойчиво относительно $(S_0(t_0), S(t), t_0, \tau)$, если при $x_0 \in S_0(t_0)$ решение $x(t, t_0, x_0)$ уравнения (3) удовлетворяет условию $x(t, t_0, x_0) \in S(t)$ при всех $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$, $\tau \leq +\infty$.

Если условия этого определения выполняются при любом $t_0 \in R_+$, тогда движение $x(t)$ равномерно по t_0 практически устойчиво относительно областей $S_0(t), S(t)$.

Если в *Определении 1* величина $\tau < +\infty$, то речь идет о практической устойчивости относительно $(S_0(t_0), S(t), t_0, \tau)$ на конечном интервале времени τ .

Заметим, что из непрерывности функции $\beta(t, x)$ и устойчивости решения $\mu(t) = 0$ уравнения (4) следует существование интегрируемой функции $w(t)$ и постоянной $M > 0$ таких, что

$$\|\beta(t, x)\mu(t)\| \leq Mw(t) \quad (5)$$

при всех $(t, x) \in R_+ \times S(t)$, где $\mu(t)$ удовлетворяет соотношению (4).

Кроме того, так как $\alpha(t, x) = o(\|x\|)$ при $x \rightarrow 0$, то существует интегрируемая функция $c(t)$ и постоянная $k > 1$ такие, что

$$\|\alpha(t, x)\| \leq c(t)\|x\|^k \quad (6)$$

при всех $(t, x) \in R_+ \times S(t)$.

Вектор-функции $\alpha(t, x)$ и $\beta(t, x)\mu(t)$ в уравнении (1) рассматриваем как возмущения системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0. \quad (7)$$

Целью этой статьи является получение условий $(S_0(t_0), S(t), t_0, \tau)$ практической устойчивости движения исполнительного органа робота при условии, что сила взаимодействия робота со средой асимптотически стремится к наперед заданной.

2. Основной результат.

Так как система (7) – линейная, то качественный анализ движения, которое описывается уравнением (3), можно провести при помощи вспомогательной функции вида

$$V(x) = x^T x, \quad x \in R^{2n} \quad (8)$$

и ее полной производной вдоль решений этой системы.

Заметим, что $V(x) = 0$ при $x = 0$ и $V(x) > 0$ при $x \in R^{2n} \setminus \{0\}$. Нетрудно показать, что

$$2\Theta_m(t) \leq \frac{dV}{dt} \Big|_{(7)} \leq 2\Theta_M(t), \quad (9)$$

где $\Theta_m(t)$ и $\Theta_M(t)$ – минимальные и максимальные собственные значения матрицы $C_1(t) = 0,5(A^T(t) + A(t))$.

Для полной производной функции (8) имеем равенство

$$\frac{dV}{dt} \Big|_{(3)} = \frac{dV}{dt} \Big|_{(7)} + x^T \alpha(t, x) + (\alpha(t, x))^T x + (\beta(t, x)\mu(t))^T x + x^T \beta(t, x)\mu(t). \quad (10)$$

Учитывая оценки (5), (6), получаем:

$$1) \left\| x^T \alpha(t, x) + (\alpha(t, x))^T x \right\| \leq 2 \|\alpha(t, x)\| \|x\| \leq 2c(t)\|x\|^{k+1} \quad (11)$$

при всех $(t, x) \in R_+ \times S(t)$;

$$2) \left\| (\beta(t, x)\mu(t))^T x + x^T \beta(t, x)\mu(t) \right\| \leq 2 \|\beta(t, x)\mu(t)\| \|x\| \leq 2Mw(t)\|x\| \quad (12)$$

при всех $(t, x) \in R_+ \times S(t)$.

Принимая во внимание оценки (11), (12), соотношение (10) приведем к виду

$$\frac{dV}{dt} \Big|_{(3)} \leq 2\Theta_M(t) + \psi(t, x) \quad (13)$$

при $(t, x) \in R_+ \times S(t)$, где $\psi(t, x) = 2\left(c(t)\|x\|^{k+1} + Mw(t)\|x\|\right)$, $k > 1$.

Таким образом, при выполнении условий (5), (6) для полной производной функции (8) вдоль решений системы (3) верна оценка (13). Предположим, что $S(t) \supset S_0(t_0)$ и $\partial S(t) \cap \partial S_0(t_0) = \emptyset$ при всех $t \geq t_0$.

Имеет место следующее утверждение о практической устойчивости движения исполнительного органа робота относительно областей $S(t), S_0(t_0)$.

Теорема 1. Пусть слагаемые правой части системы уравнений (1) удовлетворяют условиям (5), (6) и выполняется неравенство

$$\int_{t_0}^t [2\Theta_M(s) + \psi(s, x(s))] ds \leq \inf_{x \in \partial S(t)} V(x(t)) - \sup_{x_0 \in S_0(t_0)} V(x(t_0)) \quad (14)$$

при всех $t \in R_+$, $t_0 \leq t < t_0 + \tau$, $\tau \leq +\infty$. Тогда движение робота, взаимодействующего со средой, практически устойчиво относительно $(S_0(t_0), S(t), t_0, \tau)$.

Доказательство. Пусть $x(t; t_0, x_0)$ – решение уравнения (1) с начальным условием $x_0 \in S_0(t_0)$. Предположим, что существует момент $t_1 \in (t_0, t_0 + \tau)$ такой, что $x(t_1; t_0, x_0) \in \partial S(t_1)$ и $x(t; t_0, x_0) \in \text{int } S(t)$ при $t \in (t_0, t_1)$. При выполнении условий (5), (6) для функции (8) имеем

$$\begin{aligned} V(x(t_1; t_0, x_0)) &= V(x(t_0; t_0, x_0)) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{V}(x(s; t_0, x_0)) \Big|_{(3)} ds = V(x(t_0; t_0, x_0)) + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \dot{V}(x(s; t_0, x_0)) \Big|_{(7)} ds + \int_{t_0}^{t_1} (x(s)^T \alpha(s, x(s)) + (\alpha(s, x(s)))^T x(s) + (\beta(s, x(s))\mu(s))^T x(s) + \\ &+ x(s)^T \beta(s, x(s))\mu(s)) ds, \end{aligned}$$

откуда получаем оценку

$$V(x(t_1; t_0, x_0)) < \sup_{x_0 \in S_0(t_0)} V(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} [2\Theta_M(s) + \psi(s, x(s; t_0, x_0))] ds,$$

которая при выполнении неравенства (14) приводит к противоречию

$$V(x(t_1; t_0, x_0)) < \sup_{x_0 \in S_0(t_0)} V(x(t_0)) + \inf_{x \in \partial S(t_1)} V(x(t_1)) - \sup_{x_0 \in S_0(t_0)} V(x(t_0))$$

или

$$V(x(t_1; t_0, x_0)) < \inf_{x \in \partial S(t_1)} V(x(t_1)).$$

Из этого неравенства следует, что $x(t_1; t_0, x_0) \in \bar{\partial}S(t_1)$ и, следовательно, противоречит принятому предположению о достижении решением $x(t; t_0, x_0)$ границы области $S(t)$ в момент $t = t_1$. Следовательно, не существует $t_1 \in (t_0, t_0 + \tau)$, при котором движение робота покинет область $S(t)$ при условии, что оно начинается в области $S_0(t_0)$.

Теорема 2. Пусть слагаемые правой части системы уравнений (1) удовлетворяют условиям (5), (6) и выполняется неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} [2\Theta_M(s) + \psi(s, x(s))] ds \leq \inf_{x \in \partial S(t_2)} V(x(t_2)) - \sup_{x \in \overline{S_0(t_1)}} V(x(t_1)) \quad (15)$$

при всех $t_1, t_2 \in R_+$, $t_0 \leq t_1 < t_2 < t_0 + \tau$, $\tau \leq +\infty$. Тогда движение робота, взаимодействующего со средой, равномерно практически устойчиво относительно областей $S_0(t), S(t)$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству Теоремы 1.

Замечание 1. Области $S(t)$, $S_0(t)$, указанные в Теоремах, могут быть определены так:

$$S(t) = \{x \in R^{2n} : \|x\| < M(t)\}, \text{ где } M(t) = A \exp\left[\int_{t_0}^t \Theta_M(s) ds\right] \text{ и } S_0(t) = \{x \in R^{2n} : \|x\| < m(t)\},$$

$$\text{где } m(t) = \lambda \exp\left[\int_{t_0}^t \Theta_M(s) ds\right], \quad 0 < \lambda \leq A < +\infty.$$

Замечание 2. Во многих практически важных случаях [1] области $S(t)$, $S_0(t)$ определяются так:

$$S = \{x \in R^{2n} : \|x\| < A\}; \quad S_0 = \{x \in R^{2n} : \|x\| < \lambda\} \quad (0 < \lambda \leq A < +\infty).$$

При этом, величины λ и A заранее задаются, исходя из допустимых начальных движений робота и качества переходного процесса.

Пусть области $S(t)$, $S_0(t)$ такие, как определены в *Замечании 2*. Принимая во внимание, что для функции (8) в этом случае верны соотношения

$$\inf_{\|x\|=A} V(x) - \sup_{\|x\|\leq\lambda} V(x) = \inf_{\|x\|=A} \|x\|^2 - \sup_{\|x\|\leq\lambda} \|x\|^2 = A^2 - \lambda^2,$$

Теорема 1 и Теорема 2 примут следующий вид.

Следствие 1. Пусть слагаемые правой части системы уравнений (1) удовлетворяют условиям (5), (6), области $S(t)$, $S_0(t)$ определяются как в *Замечании 2* и при всех $t \in R_+$, $t \geq t_0$, выполняется неравенство

$$\int_{t_0}^t [2\Theta_M(s) + \psi(s, x(s))] ds \leq A^2 - \lambda^2. \quad (16)$$

Тогда движение робота, взаимодействующего со средой (λ, A, t_0) , практически устойчиво.

Если соотношение (16) выполняется для всех $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$, то говорят о (λ, A, t_0, τ) практической устойчивости, т. е. о практической устойчивости на конечном интервале времени τ .

Следствие 2. Пусть слагаемые правой части системы уравнений (1) удовлетворяют условиям (5), (6), области $S(t)$, $S_0(t)$ определяются как в *Замечании 2* и при всех $t_1, t_2 \in R_+$, $t_0 \leq t_1 < t_2$, выполняется неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} [2\Theta_M(s) + \psi(s, x(s))] ds \leq A^2 - \lambda^2.$$

Тогда движение робота, взаимодействующего со средой (λ, A) , равномерно практически устойчиво.

3. Пример.

В качестве примера рассмотрим взаимодействие робота со средой, динамика которой описывается нелинейной моделью вида

$$F = m_e \ddot{y} + b_e \dot{y} + k_1 y + k_2 y^3, \quad (17)$$

где m_e – параметр, представляющий массу среды; b_e – параметр, представляющий демпфирование среды; k_1, k_2 – коэффициенты жесткости среды. Заменой переменных $\eta = y - y_p$, где y_p – желаемая траектория движения робота, уравнение (17) приводим к виду

$$\ddot{\eta} + \frac{b_e}{m_e} \dot{\eta} + \frac{k_2}{m_e} \eta^3 + \frac{3k_2 y_p}{m_e} \eta^2 + \frac{k_1 + 3k_2 y_p^2}{m_e} \eta = \frac{1}{m_e} \mu, \quad (18)$$

где $\mu(t) = F(t) - F_p(t)$, $y_p(t) = c_1 e^{-\alpha_p t} + c_2$, $F_p(t) = F_0(1 - e^{-\alpha_p t})$, $\alpha_p > 0$.

Введя новые переменные $x_1 = \eta$, $x_2 = \dot{\eta}$, $x = (x_1, x_2)^T$, уравнение (18) приведем к виду

$$\dot{x} = A(t)x + \beta(t, x)\mu(t) + \alpha(t, x), \quad (19)$$

где приняты обозначения

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1 + 3k_2 y_p^2}{m_e} & -\frac{b_e}{m_e} \end{pmatrix}; \quad \beta(t, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_e} \end{pmatrix}; \quad \alpha(t, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3k_2 y_p}{m_e} x_1^2 - \frac{k_2}{m_e} x_1^3 \end{pmatrix}.$$

Получим оценки, аналогичные (5), (6):

$$\|\beta(t, x)\mu(t)\| \leq \frac{1}{m_e} e^{-\alpha_p t},$$

где выбрано, что $\|F(t) - F_p(t)\| \leq e^{-\alpha_p t}$; $\|\alpha(t, x)\| \leq \frac{3k_2}{m_e} |y_p| \|x\|^2 + \frac{k_2}{m_e} \|x\|^3$, где учтено,

что $x_1^2 \leq x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2$ и $|x_1|^3 = (x_1^2)^{\frac{3}{2}} \leq (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}} = \|x\|^3$.

Вычисляя $C_1(t) = \frac{1}{2}(A^T(t) + A(t))$, получаем, что

$$2\Theta_M(t) = -\frac{b_e}{m_e} + \sqrt{\frac{b_e^2}{m_e^2} + \left(1 - \frac{k_1 + 3k_2 y_p^2}{m_e}\right)^2}.$$

Исходя из оценок для $\|\beta(t, x)\mu(t)\|$ и $\alpha(t, x)$, получим равенство

$$\psi(t, x) = 2\left(\frac{3k_2}{m_e} |y_p| \|x\|^3 + \frac{k_2}{m_e} \|x\|^4 + \frac{1}{m_e} e^{-\alpha_p t} \|x\|\right).$$

Области S и S_0 выберем следующим образом:

$$S = \{x \in R^2 \mid \|x\| < A\}, \quad S_0 = \{x \in R^2 \mid \|x\| < \lambda\}, \quad 0 < \lambda \leq A < +\infty.$$

Тогда, для практической устойчивости движения робота относительно областей (S, S_0) достаточно выполнения условия

$$\int_0^t [2\Theta_M(s) + \psi(s, x(s))] ds \leq A^2 - \lambda^2. \quad (20)$$

Оценим интеграл в левой части неравенства (20), принимая во внимание, что $\|x\| < A$ и $0 < e^{-\alpha_p t} \leq 1$ для всех $t \in R^+$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t [2\Theta_M(s) + \psi(s, x(s))] ds &< \int_0^t \left(-\frac{b_e}{m_e} + \sqrt{\frac{b_e^2}{m_e^2} + \left(1 - \frac{k_1 + 3k_2(|c_1| + |c_2|)^2}{m_e}\right)^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2\left[\frac{3k_2}{m_e} (|c_1| e^{-\alpha_p s} + |c_2|) A^3 + \frac{k_2}{m_e} A^4 + \frac{A}{m_e} e^{-\alpha_p s} \right] \right) ds = \\ &= \int_0^t \left(-\frac{b_e}{m_e} + \sqrt{\frac{b_e^2}{m_e^2} + \left(1 - \frac{k_1 + 3k_2(|c_1| + |c_2|)^2}{m_e}\right)^2} + \frac{6k_2}{m_e} A^3 |c_2| + \frac{2k_2}{m_e} A^4 \right) + \\ &\quad + \left(\frac{6k_2}{m_e} A^3 |c_1| + \frac{2A}{m_e} \right) e^{-\alpha_p s} \Big|_0^t ds < \left(\frac{6k_2}{m_e} A^3 |c_1| + \frac{2A}{m_e} \right) \frac{1}{\alpha_p} + \\ &\quad + \left(-\frac{b_e}{m_e} + \sqrt{\frac{b_e^2}{m_e^2} + \left(1 - \frac{k_1 + 3k_2(|c_1| + |c_2|)^2}{m_e}\right)^2} + \frac{6k_2}{m_e} A^3 |c_2| + \frac{2k_2}{m_e} A^4 \right) t. \quad (21) \end{aligned}$$

Исходя из оценки (21), соотношение (20) будет выполняться для всех $t \in [0, T]$, где

$$T = \frac{A^2 - \lambda^2 - \left(\frac{6k_2}{m_e} A^3 |c_1| + \frac{2A}{m_e} \right) \frac{1}{\alpha_p}}{-\frac{b_e}{m_e} + \sqrt{\frac{b_e^2}{m_e^2} + \left(1 - \frac{k_1 + 3k_2(|c_1| + |c_2|)^2}{m_e}\right)^2} + \frac{6k_2}{m_e} A^3 |c_2| + \frac{2k_2}{m_e} A^4}, \quad (22)$$

если только

$$\left(\frac{6k_2}{m_e} A |c_1| + \frac{2}{m_e} \right) \frac{1}{\alpha_p} < A^2 - \lambda^2.$$

Заметим, что соотношение (20) можно использовать как для оценки граничного времени T , при котором исходная система практически устойчива, так и для выбора подходящих параметров исходной системы, при которых она будет практически устойчивой на предварительно заданном интервале.

Рассмотрим данный пример при конкретных числовых значениях параметров. Выберем $A = 3$, $\lambda = 2$, $F_0 = 10$ Н, $k_1 = 1000$ Н/м, $k_2 = 3,05$ Н/м, $\alpha_p = 20$, $m_e = 1000$ кг, $b_e = 0,5$ Нс/м. Тогда по формуле (22) определим величину $T = 10$ с такую, что движение робота, которое описывается системой (3), при заданных числовых значениях параметров будет практически устойчиво относительно величин $(2, 3, 0, 10)$.

Решим обратную задачу. Пусть требуется выбрать параметры k_1 и k_2 системы (17) таким образом, чтобы движение робота, которое описывается системой (3), было практически устойчиво относительно величин $(2, 3, 0, 10)$. Для этого рассмотрим функцию

$$H(k_1, k_2) = \int_0^{10} \left[-\frac{b_e}{m_e} + \sqrt{\frac{b_e^2}{m_e^2} + \left(1 - \frac{k_1 + 3k_2 y_p^2}{m_e} \right)^2} + 2 \left(\frac{3k_2}{m_e} |y_p| \|x\|^3 + \frac{k_2}{m_e} \|x\|^4 + \frac{1}{m_e} e^{-\alpha_p t} \|x\| \right) \right] ds - (A^2 - \lambda^2).$$

Значения k_1^* и k_2^* , при которых $H(k_1^*, k_2^*) < 0$ и будут искомыми. На рис. 1 представлено пересечение поверхности $z = H(k_1, k_2)$ плоскостью $z = 0$, ниже которой функция $z = H(k_1, k_2)$ принимает отрицательные значения. Множество значений k_1^* и k_2^* указано на рис. 2.

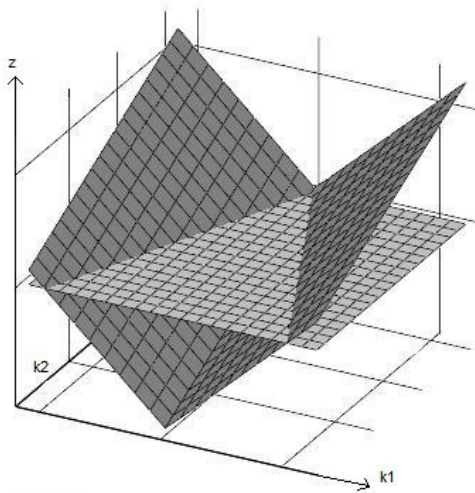


Рис. 1

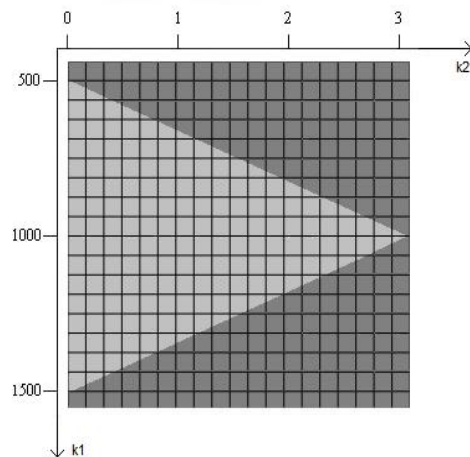


Рис. 2

Заклучение.

Понятие практической устойчивости является важным для прикладных задач [2, 5, 6, 13], где одним из приоритетов является изучение движения при заданных оценках областей начальных и последующих отклонений в течение фиксированного промежутка времени (конечного или неограниченного).

В данной статье исследована задача о практической устойчивости движения робота, взаимодействующего со средой. Получены достаточные условия такой устойчивости в виде интегрального неравенства. Полученное неравенство может интерпретироваться двояко: для оценки интервала времени, для которого имеет место практическая устойчивость системы (практическая устойчивость на конечном интервале); для определения параметров системы, при которых практическая устойчивость будет иметь место на заданном интервале времени. В качестве иллюстрации рассмотрен конкретный числовой пример.

Заметим, что в большинстве прикладных задач, подобных той, что рассмотрены в статьях [4, 8, 9], уравнения содержат некоторые неопределенные параметры. Это связано с неточностью измерительных приборов, изменением параметров среды функционирования системы и т.д. Поэтому существенный интерес представляет рассмотрение данной задачи с учетом неопределенных параметров, входящих в состав исходной системы, в контексте задачи о параметрической устойчивости [7, 11].

Р Е З Ю М Е . Досліджено практичну стійкість руху робота, що взаємодіє із середовищем. Встановлено достатні умови практичної стійкості руху робота навколо заданої траєкторії при силі взаємодії між роботом та середовищем, що підкоряється заданому закону.

1. Мартынюк А.А. Практическая устойчивость движения. – К.: Наук. думка, 1983. – 248 с.
2. Colgate J., Hogan N. Robust Control of Dynamically Interacting Systems // Int. J. of Control. – 1988. – 48. – P. 65 – 88.
3. De Luca A., Manes C. Hybrid Force/Position Control for Robots in Contact with Dynamic Environment // Proc. of Robot Control SYROCO '91. – P. 377 – 382.
4. Denisenko V.S., Slyn'ko V.I. Fuzzy Impulsive Stabilization of the Upper Equilibrium Position of a Pendulum on a Moving Foundation // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 5. – P. 576 – 588.
5. De Shutter J., Van Brussel H. Compliant Robot Motion II: A control Approach Based on External Control Loops // Int. J. of Robotic Research. – 1988. – 7, N 4. – P. 17 – 25.
6. Eppinger S., Seering W. Introduction to Dynamic Models for Robot Force Control // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 6. – P. 680 – 692. // IEEE Control Systems Magazine. – 1987. – 7, N 2. – P. 48 – 52.
7. Khoroshun A.S. Global Parametric Quadratic Stabilizability of Nonlinear Systems with Uncertainty // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, N 6. – P. 703 – 710.
8. Larin V.B., Tunik A.A. On Inertial-Navigation System without Angular-Rate Sensors // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 4. – P. 482 – 488.
9. Lila D.M., Martynyuk A.A. Development of Instability in a Rotating Elastoplastic Annular Disk // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 2. – P. 224 – 234.
10. Martynyuk A.A., Chernienko A.N. On the Theory of Motion Stability of a Robot Interacting with a Dynamic Environment // Engineering Simulation. – 2000. – 17. – P. 605 – 620.
11. Martynyuk A.A., Khoroshun A.S. On Parametric Asymptotic Stability of Large Scale Systems // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 5. – P. 565 – 575.
12. Martynyuk A.A., Khoroshun A.S., Chernienko A.N. The Theory of Robot Stability in Dynamic Environment Revisited // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 9. – P. 1056 – 1061.
13. Stokić D. Constrained Motion Control of Manipulation Robots – A Contribution // Robotica. – 1991. – N 9. – P. 157 – 163.
14. Vukobratović M. The role of environmental dynamics in the contact force control of manipulation robots // J. of Dynamic Systems, Measurement and Control. – 1996. – 119, N 1. – P. 86 – 89.

Поступила 16.12.2010

Утверждена в печать 26.06.2013