

РАСПРОСТРАНЕНИЕ, ДИФРАКЦИЯ И РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

УДК 621.371.162

А. С. БРЮХОВЕЦКИЙ

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины,
ул. Ак. Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина
E-mail: bryu@ire.kharkov.ua

ОБ УЧЕТЕ СФЕРИЧНОСТИ ВОЛНОВЫХ ФАЗОВЫХ ФРОНТОВ В ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ВОЛН ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРОЙ

Для случая рассеяния волн турбулентной атмосферой найдены асимптотики трехкратных интегралов, определяющих интенсивность рассеянного поля. Для невырожденного рассеяния (гессиан фазы отличен от нуля) использован метод стационарной фазы по трем переменным интегрирования. Для вырожденного рассеяния (гессиан фазы равен нулю) – комбинированный метод: приближение дифракции Фраунгофера по одной из переменных и метод стационарной фазы по двум другим. Установлена связь с известными в литературе результатами расчетов.

Ключевые слова: рассеяние волн, интеграл от осциллирующей функции, стационарная фаза, френелевская зона, дифракция Фраунгофера

1. Введение

Авторы имеющихся исследований по рассеянию волн турбулентной атмосферой обычно исходят из борновского приближения задачи рассеяния слаботенной средой [1, 2], представленного осциллирующим интегралом от “возмущающего потенциала”, пропорционального случайной неоднородности диэлектрической проницаемости. Этот интеграл зависит от большого числа внешних параметров и не вычисляется точно, возможна лишь его асимптотическая оценка. Вот в способах проведения такой оценки и состоит разница в подходах к решению проблемы различных авторов.

Почти во всех проведенных исследованиях игнорируется сферичность волн. При этом в качестве малоубедительного аргумента выдвигается предположение о малости радиуса корреляции неоднородностей – характеристики интеграла от положительно определенной функции корреляции ([1], с. 21), не имеющей никакого отношения к вычислению вышеуказанного осциллирующего интеграла, оценка которого, очевидно, не может превышать вклада от области пере-

менных интегрирования порядка характерного периода осцилляций подинтегральной функции.

Результатом вышеуказанного “упрощения” является замена фазы подинтегральной функции ее линейной аппроксимацией (приближение дифракции Фраунгофера). При этом вычисления сводятся к хорошо изученной в математике задаче асимптотической оценки интеграла Фурье, которая легко выполняется ([3], с. 60) интегрированием по частям.

Исключением из ряда подобных работ является статья [4] В. И. Татарского, где в рамках некоторой модели для частного случая однопозиционной локализации задача исследуется в приближении дифракции Френеля без предположения о малости радиуса корреляции. Модель рассеяния предполагает гауссовость диаграмм направленности и гауссовость излучаемого импульса в бесконечном пространстве.

В качестве первоисточника, откуда взята эта модель, В. И. Татарским указывается его совместная с А. И. Коном публикация [5] в 1986 г. На самом деле, эта модель (за исключением гауссовости излучаемого импульса) была предложена автором настоящей статьи гораздо раньше и опубликована в закрытых изданиях в 1969–1970 гг.,

из-за чего была известна ограниченному кругу специалистов, в число которых входил и В. И. Татарский. Изложение этой модели, позволившей объяснить основные физические особенности радиолокационного отражения от звукового импульса, в настоящее время можно найти в диссертации [6], с которой в 1989 г. снят гриф секретности, а также в некоторых ее фрагментах в статье [7].

В общем случае математически корректные методы асимптотической оценки интегралов от осциллирующих функций составляют раздел в большой области математической физики, к настоящему времени получившей название теории волновых катастроф [8]. Согласно основным ее положениям асимптотическое поведение волнового поля определяется эволюцией фазового фронта в процессе распространения. Если особенности (катастрофы) волнового фронта отсутствуют, таким асимптотическим методом является известный метод стационарной фазы (МСФ), который и используется в настоящей работе.

Основную причину, по которой он до сих пор не использовался в рассматриваемых расчетах, достаточно точно определяет высказывание классиков в теории рассеяния и излучения волн ([9], с. 131): “Хотя математическое определение седловой точки выглядит очень просто, найти положение седловых точек аналитическими методами, вообще говоря, очень трудно...”

Для условий, когда выражение для фазы можно заменить ее френелевским приближением, в настоящей статье разработан математический аппарат, позволяющий в аналитическом виде определить координаты стационарной точки и вычислить асимптотику рассеянного поля, содержащую интегралы Френеля.

Исследования автора [10–12] по рассеянию статистически неровной поверхностью показали принципиальную возможность учета сферичности волн в приближении дифракции Френеля. Поставим целью данной работы решение в этом приближении и задачи рассеяния волн случайными объемными неоднородностями.

2. Интегральное представление интенсивности рассеяния

Рассмотрим вычисление среднего значения вектора Пойнтинга $\langle \vec{S}(\vec{R}_2) \rangle$, представленного формулой (11) на с. 148 монографии В. И. Татарского [1]:

$$\langle \vec{S}(\vec{R}_2) \rangle \approx \frac{c}{(2\pi)^3} \left(\frac{k}{2} \right)^4 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \vec{\chi}_1 \vec{f}_1(\vec{\chi}_1) f_2^*(\vec{\chi}_1) \Phi_\varepsilon(\vec{\chi}_1). \quad (1)$$

Здесь “*” – знак комплексного сопряжения,

$$\vec{f}_1(\vec{\chi}_1) = \int_V d^3 \vec{R}_1 \vec{f}_1(\vec{R}_1) e^{i\Phi(\vec{R}_1)}, \quad (2)$$

$$f_2(\vec{\chi}_1) = \int_V d^3 \vec{R}_1 f_2(\vec{R}_1) e^{i\Phi(\vec{R}_1)}, \quad (3)$$

$$\vec{f}_1(\vec{R}_1) = \vec{n}(\vec{R}_1) |\vec{A}_0(\vec{R}_1)|^2 |\vec{R}_2 - \vec{R}_1|^{-2} \sin^2 \chi(\vec{R}_1), \quad (4)$$

$$f_2(\vec{R}_1) \equiv 1, \quad (5)$$

$$\Phi(\vec{R}_1) = k |\vec{R}_2 - \vec{R}_1| + k |\vec{R}_1 - \vec{R}_0| + \vec{\chi}_1 \vec{R}_1. \quad (6)$$

При этом использовано выражение корреляционной функции $B_\varepsilon(\vec{R}', \vec{R}'')$ через спектральную плотность флуктуаций $\Phi_\varepsilon(\vec{\chi}_1)$ ([1], с. 149, формула (20)) и введены обозначения \vec{R}_2 , \vec{R}_0 , \vec{R}_1 для радиус-векторов точек наблюдения, источника и рассеяния (рис. 1) вместо использованных в [1] обозначений \vec{r} , \vec{R} , \vec{r}' , что облегчает сравнение результатов вычислений с результатами [10–12]. Остальные обозначения соответствуют использованным в [1].

Интегралы (2) и (3) – типичные интегралы от осциллирующих функций, общим методом асимптотической оценки которых (см. [10–12]) является МСФ. В данном случае оцениваемые интегралы не двукратные, а трехкратные, что усложняет сам процесс вычислений. Аналогично тому, как это сделано в работе [12], восполь-

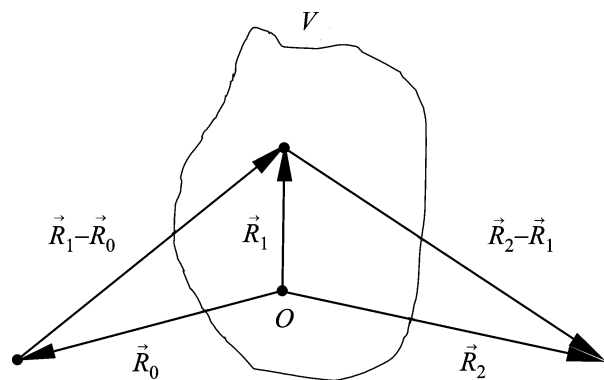


Рис. 1. Геометрия рассеяния

зуюемся приближением дифракции Френеля, разложив фазу (6) до квадратичных членов по координатам x_1, y_1, z_1 точки рассеяния. Предварительно выберем плоскость векторов \vec{R}_0 и \vec{R}_2 как плоскость $y=0$, т. е. $\vec{R}_0 = (x_0, 0, z_0)$, $\vec{R}_2 = (x_2, 0, z_2)$. Такой выбор, как и последующие ортогональные преобразования координат, призван максимально облегчить использование МСФ.

Разложение фазы до квадратичных членов выглядит следующим образом:

$$\Phi(\vec{R}_1) \approx \Phi_c + \vec{K}_1 \vec{R}_1 + a_{xx} x_1^2 + a_{yy} y_1^2 + a_{zz} z_1^2 + a_{xz} x_1 z_1, \quad (7)$$

где

$$\vec{K}_1 = k(\vec{\alpha}_0 - \vec{\beta}_0) + \vec{\chi}_1, \quad (8)$$

$$\vec{\alpha}_0 = \left(\frac{\partial R_{01}}{\partial \vec{R}_1} \right)_0 = \frac{-\vec{R}_0}{R_0}, \quad (9)$$

$$\vec{\beta}_0 = - \left(\frac{\partial R_{12}}{\partial \vec{R}_1} \right)_0 = \frac{\vec{R}_2}{R_2}; \quad (10)$$

$$a_{xx} = \frac{1}{2!} \left(\Phi''_{x_1 x_1} \right)_0 = \frac{k}{2} \left(\frac{z_0^2}{R_0^3} + \frac{z_2^2}{R_2^3} \right); \quad (11)$$

$$a_{yy} = \frac{1}{2!} \left(\Phi''_{y_1 y_1} \right)_0 = \frac{k}{2} \left(\frac{x_0^2 + z_0^2}{R_0^3} + \frac{x_2^2 + z_2^2}{R_2^3} \right); \quad (12)$$

$$a_{zz} = \frac{1}{2!} \left(\Phi''_{z_1 z_1} \right)_0 = \frac{k}{2} \left(\frac{x_0^2}{R_0^3} + \frac{x_2^2}{R_2^3} \right); \quad (13)$$

$$a_{xz} = \frac{1}{2!} \left(\Phi''_{x_1 z_1} \right)_0 = -k \left(\frac{x_0 z_0}{R_0^3} + \frac{x_2 z_2}{R_2^3} \right). \quad (14)$$

Нижний индекс “0” в формулах (9)–(14) означает, что производные берутся в точке $\vec{R}_1 = 0$, а $\Phi_c = k(R_0 + R_2)$ – значение фазы в “центре” \vec{R}_c рассеивающего объема V , помещенном в начало координат ($\vec{R}_c = 0$).

3. Значение фазы Φ_s в стационарной точке

Сделаем преобразование поворота $\vec{R}_1 \rightarrow \vec{R}'_1$ на угол φ вокруг оси y :

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 \cos \varphi - z'_1 \sin \varphi, & \begin{cases} x'_1 = x_1 \cos \varphi + z_1 \sin \varphi, \\ z'_1 = -x_1 \sin \varphi + z_1 \cos \varphi. \end{cases} \end{cases}$$

Разложение фазы (7) приобретает вид

$$\Phi(\vec{R}_1) = \Phi(\vec{R}'_1) \approx \Phi_c + \vec{K}'_1 \vec{R}'_1 + A_{xx} x'^2_1 + A_{yy} y'^2_1 + A_{zz} z'^2_1 + A_{xz} x'_1 z'_1, \quad (15)$$

где

$$\begin{cases} A_{xx} = a_{xx} \cos^2 \varphi + a_{zz} \sin^2 \varphi + a_{xz} \sin \varphi \cos \varphi, \\ A_{yy} = a_{yy}, \\ A_{zz} = a_{xx} \sin^2 \varphi + a_{zz} \cos^2 \varphi - a_{xz} \sin \varphi \cos \varphi, \\ A_{xz} = (-a_{xx} + a_{zz}) \sin 2\varphi + a_{xz} \cos 2\varphi. \end{cases} \quad (16)$$

Сделаем преобразование сдвига $\vec{R}'_1 \rightarrow \vec{R}$;

$$\vec{R}'_1 = \vec{R}'_{1s} + \vec{R}. \quad (17)$$

При этом

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{R}'_1) = \Phi(\vec{R}) = \Phi_s + \vec{K}'_1 \vec{R} + A_{xx} x^2 + A_{yy} y^2 + A_{zz} z^2 + \\ + A_{xz} xz + 2(A_{xx} x'_{1s} x + A_{yy} y'_{1s} y + A_{zz} z'_{1s} z) + \\ + A_{xz} (x'_{1s} z + z'_{1s} x), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\Phi_s = \Phi_c + \vec{K}'_1 \vec{R}'_{1s} + A_{xx} x'^2_{1s} + A_{yy} y'^2_{1s} + A_{zz} z'^2_{1s}, \quad (19)$$

а вектор \vec{K}'_1 записан в преобразованной системе координат (x'_1, y'_1, z'_1) подобно вектору \vec{R}'_1 .

Наложим следующие условия на проведенные преобразования: во-первых, в (18) должно отсутствовать слагаемое с xz ; во-вторых, должны отсутствовать члены первого порядка, что эквивалентно трем условиям

$$\begin{cases} K'_{1x} + 2A_{xx} x'_{1s} = 0, \\ K'_{1y} + 2A_{yy} y'_{1s} = 0, \\ K'_{1z} + 2A_{zz} z'_{1s} = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Из первого условия ($A_{xz} = 0$) получаем уравнение для определения угла поворота φ :

$$\operatorname{tg} 2\varphi = a_{xz} / (a_{xx} - a_{zz}), \quad (21)$$

а из (20) – соответственно компоненты \vec{R}'_{1s} :

$$\begin{cases} x'_{1s} = -K'_{1x}/2A_{xx}, \\ y'_{1s} = -K'_{1y}/2A_{yy}, \\ z'_{1s} = -K'_{1z}/2A_{zz}. \end{cases} \quad (22)$$

С учетом этих условий

$$\Phi(\vec{R}) \approx \Phi_s + A_{xx}x^2 + A_{yy}y^2 + A_{zz}z^2, \quad (23)$$

$$\Phi_s = \Phi_c - A_{xx}x'^2_{1s} - A_{yy}y'^2_{1s} - A_{zz}z'^2_{1s}. \quad (24)$$

Поскольку $(\partial\Phi/\partial\vec{R})_{\vec{R}=0} = 0$, очевидно, $(\vec{R}'_1)_{\vec{R}=0} = \vec{R}'_{1s}$ – стационарная точка фазы $\Phi(\vec{R}'_1)$, а Φ_s – ее стационарное значение.

Приняв во внимание свойство инвариантности полного дифференциала, можно записать

$$\begin{cases} A_{xx} = (k/2)(z'^2_0/R_0^3 + z'^2_2/R_2^3), \\ A_{yy} = (k/2)(1/R_0 + 1/R_2), \\ A_{zz} = (k/2)(x'^2_0/R_0^3 + x'^2_2/R_2^3), \end{cases} \quad (25)$$

в чем нетрудно убедиться и непосредственно переходом от (x_1, y_1, z_1) к (x'_1, y'_1, z'_1) в выражениях (16). В формулах (25) учтено, что при повороте системы координат длина векторов не меняется ($R'_0 = R_0, R'_2 = R_2$).

Очевидно, что в системе координат (x, y, z) матрица Гесса, элементами которой служат вторые производные от $\Phi(\vec{R})$, является диагональной и невырожденной, если \vec{R}'_0 и \vec{R}'_2 не лежат на одной прямой. В противном случае либо A_{xx} , либо A_{zz} , а соответственно, и гессиан $H = 8A_{xx}A_{yy}A_{zz}$ обращаются в нуль. Естественно назвать такой случай вырожденным рассеянием. В дальнейшем будем считать, что он отвечает значениям $z'_0 = z'_2 = 0$. При этом $A_{xx} = 0, A_{yy} = A_{zz} = (k/2)(1/R_0 + 1/R_2)$. Случай $x'_0 = x'_2 = 0$ эквивалентен смене обозначений координатных осей $x \leftrightarrow z$.

Приняв во внимание знаки выражений (25) при невырожденном рассеянии, заметим, что Φ_s является минимальным значением фазы. При этом эквифазные поверхности $\Phi(\vec{R}) = \text{const}$ являются эллипсоидами с полуосями $\sqrt{\Delta\Phi/A_{xx}}, \sqrt{\Delta\Phi/A_{yy}}, \sqrt{\Delta\Phi/A_{zz}}$ вдоль координатных осей x, y, z соответственно, причем $\Delta\Phi = \Phi(\vec{R}) - \Phi_s \geq 0$. При значениях $\Delta\Phi = m\pi, (m = 1, 2, \dots)$ поверхность эллипсоида является границей m -й зоны Френеля.

Угол поворота φ первоначальной системы (x_1, y_1, z_1) как решение уравнения (21) достаточно определить в интервале $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, о чем говорилось в [12]. Там же выписаны элементы матрицы поворота $\sin \varphi, \cos \varphi$, выраженные через значения правой части (21).

Канонический вид квадратичной формы, к которому приводится френелевское разложение фазы, позволяет провести вычисление интегралов (2), (3) в преобразованной системе (x'_1, y'_1, z'_1) с помощью МСФ по каждой переменной отдельно. При этом влияние близости границы области интегрирования к стационарной точке по каждой переменной будет прослеживаться независимо от других переменных, если границу объема V задать в виде: $x'_1 = \pm \Delta x/2, y'_1 = \pm \Delta y/2, z'_1 = \pm \Delta z/2$. Обозначим такой объем как V' .

4. Применимость френелевского разложения фазы

Необходимым условием применимости разложения фазы (15) должна быть малость отброшенных членов разложения по сравнению с оставленными. Обозначим $O_{p,q,r}$ член разложения, содержащий $(x'_1)^p (y'_1)^q (z'_1)^r$. В разложении (15) таковыми будут $O_{2,0,0} = A_{xx}x'^2_1, O_{0,2,0} = A_{yy}y'^2_1, O_{0,0,2} = A_{zz}z'^2_1$. Для аналогичных членов третьего порядка получаются следующие выражения:

$$O_{3,0,0} = (k/2)(x'_0z'^2_0/R_0^5 + x'_2z'^2_2/R_2^5)x'^3_1, \quad (26)$$

$$O_{0,3,0} = 0,$$

$$O_{0,0,3} = (k/2)(z'_0x'^2_0/R_0^5 + z'_2x'^2_2/R_2^5)z'^3_1. \quad (27)$$

Очевидно, что

$$|O_{3,0,0}/O_{2,0,0}| < |x'_1|(|x'_0|/R_0^2 + |x'_2|/R_2^2) \leq |x'_1|/R, \quad (28)$$

где

$$1/R = 1/R_0 + 1/R_2. \quad (29)$$

Аналогично

$$|O_{0,0,3}/O_{0,0,2}| < |z'_1|/R. \quad (30)$$

Поэтому для пренебрежения этими членами третьего порядка достаточно выполнения условий

$$|x'_1|/R \ll 1, \quad |z'_1|/R \ll 1. \quad (31)$$

При произвольной ориентации \vec{R}'_0 и \vec{R}'_2 сделать достаточно аккуратно оценку членов, содержащих смешанные производные третьего порядка, не удастся по причине зависимости от большого числа свободных параметров. Как и в [12], сделать это возможно лишь для двух крайних случаев: 1) векторы \vec{R}'_0 и \vec{R}'_2 лежат на одной прямой; 2) векторы \vec{R}'_0 и \vec{R}'_2 взаимно перпендикулярны.

В первом случае $\vec{R}'_0 = (x'_0, 0, 0)$, $\vec{R}'_2 = (x'_2, 0, 0)$ и отличными от нуля членами третьего порядка являются

$$O_{1,2,0} = (k/2)x'_1 y_1'^2 (-\alpha'_{0x}/R_0^2 + \beta'_{0x}/R_2^2),$$

$$O_{1,0,2} = (k/2)x'_1 z_1'^2 (-\alpha'_{0x}/R_0^2 + \beta'_{0x}/R_2^2).$$

Во втором случае $\vec{R}'_0 = (x'_0, 0, 0)$, $\vec{R}'_2 = (0, 0, z'_2)$ и отличны от нуля

$$O_{2,0,1} = (k/2)x_1'^2 z_1' z_2' / R_2^3,$$

$$O_{1,2,0} = (k/2)x_1' y_1'^2 x'_0 / R_0^3,$$

$$O_{0,2,1} = (k/2)y_1'^2 z_1' z_2' / R_2^3,$$

$$O_{1,0,2} = (k/2)x_1' z_1'^2 x'_0 / R_0^3,$$

при этом $|x'_0/R_0| \equiv 1$, $|z'_2/R_2| \equiv 1$ и условие малости в обоих случаях обеспечивается при выполнении неравенств (31). По-видимому, требования выполнения неравенств (31) остаются справедливыми и для промежуточных ориентаций \vec{R}'_0 и \vec{R}'_2 .

Условия (31) не содержат ограничений на $|y'_1|/R$. Они могут возникнуть лишь при оценке членов четвертого порядка, содержащих $y_1'^2$. Поскольку $A_{yy} \neq 0$ ни при каких обстоятельствах, условие пренебрежения такими членами, по-видимому, могут быть дополнены требованием $(y'_1/R)^2 \ll 1$, т. е. сформулированы в более общем виде как

$$R'_1/R \ll 1. \quad (32)$$

При этом значения членов разложения второго порядка могут быть, вообще говоря, произвольны по сравнению с единицей, для чего необходимо выполнение условий:

$$A_{xx}R^2 \gg 1, \quad A_{yy}R^2 \gg 1, \quad A_{zz}R^2 \gg 1. \quad (33)$$

Второе из них выполняется в силу условий $kR_0 \gg 1$, $kR_2 \gg 1$, принятых при выводе (1), а

первое и третье накладывают некоторые ограничения на сферические углы θ'_0 , θ'_2 векторов \vec{R}'_0 , \vec{R}'_2 , где $\cos\theta'_0 = z'_0/R_0$, $\cos\theta'_2 = z'_2/R_2$. Область значений углов, при которых нарушается одно из двух указанных условий (выше мы условились считать, что это происходит при $A_{xx} \rightarrow 0$), является переходной областью, где становится неприменимым МСФ по крайней мере для интегрирования по переменной x'_1 . Такую ситуацию мы рассматривать не будем. Будет рассматриваться случай применимости МСФ по всем трем переменным или случай вырожденного рассеяния ($A_{xx} = 0$), когда по переменной x'_1 применимо приближение дифракции Фраунгофера.

Достаточным условием пренебрежения членами третьего порядка является малость соответствующих поправок в фазе по сравнению с единицей. Имея соотношения (28) и (30), это нетрудно сделать, заменив (31) на $O_{2,0,0}|x'_1|/R \ll 1$ и $O_{0,0,2}|z'_1|/R \ll 1$. Однако для вычисления амплитуды главного члена асимптотики эти более строгие требования необязательны. Их учет лишь обеспечивает сдвигку значения фазы в стационарной точке, которая выпадает из расчетов при сложении с фазой комплексно сопряженного выражения в формуле (1).

5. Невырожденное рассеяние

Возвращаясь к формулам (1)–(6), заметим, что переход от \vec{R}_1 к \vec{R}'_1 , а затем к \vec{R} не меняет элемента объема ($d^3\vec{R}_1 = d^3\vec{R}'_1 = d^3\vec{R}$), но все векторы должны быть записаны в повернутой системе координат \vec{R}'_1 , т. е. следует заменить $\vec{R}_1 \rightarrow \vec{R}'_1$, $\vec{R}_2 \rightarrow \vec{R}'_2$, $\langle \vec{S}(\vec{R}_2) \rangle \rightarrow \langle \vec{S}'(\vec{R}'_2) \rangle$, $\vec{f}_1(\vec{R}_1) \rightarrow \vec{f}'(\vec{R}'_1)$ и т. д. Как было оговорено выше, выберем рассеивающий объем V' в виде параллелепипеда:

$$|x'_1| \leq \Delta x/2, \quad |y'_1| \leq \Delta y/2, \quad |z'_1| \leq \Delta z/2. \quad (34)$$

Тогда формулы (2) и (3) можно записать в единой форме

$$f(\vec{\chi}'_1) = \int_{x_1}^{x_u} dx \int_{y_1}^{y_u} dy \int_{z_1}^{z_u} dz f(\vec{R}'_{1s} + \vec{R}) e^{i\Phi(\vec{R})}, \quad (35)$$

где $dx dy dz = d^3\vec{R}$, фаза $\Phi(\vec{R})$ задана формулой (23), а $f(\vec{\chi}'_1)$ и $f(\vec{R}'_{1s} + \vec{R})$ – это либо $\vec{f}'_1(\vec{\chi}'_1)$ и $\vec{f}'_1(\vec{R}'_{1s} + \vec{R})$ в случае формулы (2), либо $f_2(\vec{\chi}'_1)$ и $f_2(\vec{R}'_{1s} + \vec{R})$ в случае формулы (3).

Главный член асимптотики интеграла (35) согласно Приложению выглядит следующим образом:

$$f(\vec{\chi}'_1) \approx e^{i\Phi_s} f(\vec{R}'_{1s}) h_{xs} \Delta Q_x h_{ys} \Delta Q_y h_{zs} \Delta Q_z. \quad (36)$$

“Большие” площадки $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

В этом случае $A_{xx}(\Delta x)^2 \gg 1$, $A_{yy}(\Delta y)^2 \gg 1$, $A_{zz}(\Delta z)^2 \gg 1$. Для стационарных точек внутри рассеивающего объема V' , достаточно удаленных от границ, $\Delta Q_x, \Delta Q_y, \Delta Q_z \approx \pi^{3/2}$ и формула (36) приобретает вид

$$f(\vec{\chi}'_1) \approx e^{i\Phi_s} f(\vec{R}'_{1s}) e^{i3\pi/4} (2\pi)^{3/2} H^{-1/2}, \quad (37)$$

где $H = 2^3 A_{xx} A_{yy} A_{zz}$ – определитель матрицы Гесса (гессиан) для фазы (23).

“Малые” площадки $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

В этом случае $A_{xx}(\Delta x)^2 \ll 1$, $A_{yy}(\Delta y)^2 \ll 1$, $A_{zz}(\Delta z)^2 \ll 1$ и для ΔQ_x (а аналогично и для $\Delta Q_y, \Delta Q_z$) можно взять приближение (П12), в результате чего получим

$$f(\vec{\chi}'_1) \approx e^{i\Phi_c} f(\vec{R}'_{1s}) V' (C_x^{-1} \sin C_x) \times \\ \times (C_y^{-1} \sin C_y) (C_z^{-1} \sin C_z), \quad (38)$$

где $V' = \Delta x \Delta y \Delta z$ и учтено соотношение (П16).

Заметим, что в силу уравнений (22) можно записать

$$\begin{cases} C_x = K'_{1x} \Delta x / 2 = (\Delta x / 2) [k(\alpha'_{0x} - \beta'_{0x}) + \chi'_{1x}], \\ C_y = K'_{1y} \Delta y / 2 = (\Delta y / 2) [k(\alpha'_{0y} - \beta'_{0y}) + \chi'_{1y}], \\ C_z = K'_{1z} \Delta z / 2 = (\Delta z / 2) [k(\alpha'_{0z} - \beta'_{0z}) + \chi'_{1z}]. \end{cases} \quad (39)$$

6. Вырожденное рассеяние ($A_{xx} = 0$)

В этом случае $z'_0 = z'_2 = y'_0 = y'_2 = 0$ и $A_{xz} = 0$. Формулу (15) для фазы перепишем в виде

$$\Phi(\vec{R}'_1) = \Phi(x'_1) + \Delta\Phi, \quad (40)$$

где

$$\Phi(x'_1) = K'_{1x} x'_1, \quad (41)$$

$$\Delta\Phi = \Phi_c + A_{yy} y_1'^2 + A_{zz} z_1'^2. \quad (42)$$

В этом случае сдвиг $\vec{R}'_1 = (0, y'_1, z'_1)$, а угол поворота $\varphi = 0$. Из уравнений (22) остаются только второе и третье (для определения y'_1 и z'_1), и, соответственно, вместо (24) имеем

$$\Phi_s = \Phi_c - A_{yy} y_1'^2 - A_{zz} z_1'^2. \quad (43)$$

Для интеграла по переменной x'_1 вместо (П3) имеем асимптотическую оценку интеграла Фурье:

$$I_x \approx \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dx'_1 f(x'_1, y'_1, z'_1) e^{i\Phi(\vec{R}'_1)} \approx \\ \approx e^{i\Delta\Phi} \Delta x f(x'_{1c}, y'_1, z'_1) (C_x^{-1} \sin C_x), \quad (44)$$

где C_x определено соотношением (39). Асимптотическое интегрирование МСФ по переменным y'_1, z'_1 приводит к выражению главного члена асимптотики в виде

$$f(\vec{\chi}'_1) \approx \Delta x e^{i\Phi_s} (x'_{1c}, y'_1, z'_1) h_{ys} \Delta Q_y h_{zs} \Delta Q_z (C_x^{-1} \sin C_x). \quad (45)$$

“Большие” площадки $\Delta y, \Delta z$

Для внутренних стационарных точек y'_{1s}, z'_{1s} , значительно удаленных от границ $y'_1 = \pm \Delta y / 2$, $z'_1 = \pm \Delta z / 2$, формула (45) принимает вид

$$f(\vec{\chi}'_1) \approx \Delta x e^{i(\Phi_s + \pi)} f(x'_{1c}, y'_{1s}, z'_{1s}) \pi (A_{yy} A_{zz})^{-1/2} \times \\ \times (C_x^{-1} \sin C_x). \quad (46)$$

“Малые” площадки $\Delta y, \Delta z$

В этом случае

$$f(\vec{\chi}'_1) \approx e^{i\Phi_c} f(x'_{1c}, y'_{1s}, z'_{1s}) V' \times \\ \times (C_x^{-1} \sin C_x) (C_y^{-1} \sin C_y) (C_z^{-1} \sin C_z). \quad (47)$$

7. Приближение дифракции Фраунгофера

Квадратичные члены в разложении фазы малы,

$$\Phi(\vec{R}'_1) \approx \Phi_c + \vec{K}'_1 \vec{R}'_1 + \dots \quad (48)$$

Интеграл (П1) в переменных (x'_1, y'_1, z'_1)

$$f(\vec{\chi}'_1) \approx \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dx'_1 \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy'_1 \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} dz'_1 f(\vec{R}'_1) e^{i(\Phi_c + \vec{K}'_1 \vec{R}'_1)} \quad (49)$$

имеет вид типичного трехкратного интеграла Фурье. При условии $f(\vec{R}'_1) \approx f(\vec{R}'_{1c}) + \dots$ главный член его асимптотики

$$f(\vec{\chi}'_1) \approx e^{i\Phi_c} f(\vec{R}'_{1c}) V'(C_x^{-1} \sin C_x) \times \\ \times (C_y^{-1} \sin C_y) (C_z^{-1} \sin C_z). \quad (50)$$

Отличие (50) от (38) и (47) заключается в разных значениях аргументов предэкспоненциально-го множителя: $f(x'_{1s}, y'_{1s}, z'_{1s})$ в (38), $f(x'_{1c}, y'_{1s}, z'_{1s})$ в (47) и $f(x'_{1c}, y'_{1c}, z'_{1c})$ в (50). В силу условия (32) этой разницей можно пренебречь, считая $\vec{R}'_{1s} \approx \vec{R}'_{1c}$.

8. Вычисления средней интенсивности рассеяния

8.1. Невырожденное рассеяние

“Большие” площадки $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

Вклад в интенсивность рассеяния от “теневого” (за пределами V') стационарных точек быстро убывает при удалении от границ V' . Им можно пренебречь, как и отличием от (37) вклада стационарных точек из узкой приграничной “освещенной” зоны (см. [10–12]), если спектральная плотность $\Phi_\varepsilon(\vec{\chi}'_1)$ при соответствующих $\vec{\chi}'_1$ не возрастает аномально быстро. При этом предположении $\langle \bar{S}'(\vec{R}'_2) \rangle$ можно записать в следующем виде:

$$\langle \bar{S}'(\vec{R}'_2) \rangle \approx c \left(\frac{k}{2} \right)^4 \int_{V_\chi} d^3 \vec{\chi}'_1 H^{-1} \vec{n}'(\vec{R}'_{1s}) \left| \vec{A}'_0(\vec{R}'_{1s}) \right|^2 \times \\ \times \left| \vec{R}'_2 - \vec{R}'_{1s} \right|^{-2} \sin^2 \chi(\vec{R}'_{1s}) \cdot \Phi_\varepsilon(\vec{\chi}'_1). \quad (51)$$

Здесь V_χ – объем в пространстве волновых векторов $\vec{\chi}'_1$, границы которого однозначно определяются линейной связью (22) между компонентами \vec{R}'_{1s} и волновым вектором $\vec{\chi}'_1 = \vec{K}'_1 - k(\vec{\alpha}'_0 - \vec{\beta}'_0)$ соответствующей пространственной “синусоидальной решетки” в спектре неоднородностей ε . Вид этой формулы говорит о том, что статистически независимыми “рассеивателями” являются не элементы объема, а “синусоидальные решетки”, что свидетельствует о “коллективном” характере процесса рассеяния всем объемом в целом с учетом фактора “деструктивной интерференции” ([13], с. 421).

Упомянутая связь (22) позволяет в формуле (51) перейти от интегрирования по $\vec{\chi}'_1$ к интегрированию по координатам соответствующих стационарных точек внутри V' . При этом $|\partial(\chi'_{1x}, \chi'_{1y}, \chi'_{1z})/\partial(x'_{1s}, y'_{1s}, z'_{1s})| = 2^3 A_{xx} A_{yy} A_{zz}$ и формула (51) переходит в

$$\langle \bar{S}'(\vec{R}'_2) \rangle \approx c \left(\frac{k}{2} \right)^4 \int_{V'} d^3 \vec{R}'_{1s} \vec{n}'(\vec{R}'_{1s}) \left| \vec{A}'_0(\vec{R}'_{1s}) \right|^2 \times \\ \times \left| \vec{R}'_2 - \vec{R}'_{1s} \right|^{-2} \sin^2 \chi(\vec{R}'_{1s}) \cdot \Phi_\varepsilon(\vec{\chi}'_{1s}), \quad (52)$$

где

$$\vec{\chi}'_{1s} = k(\vec{\beta}'_0 - \vec{\alpha}'_0) + \Delta \vec{\chi}'_{1s}, \quad (53)$$

$$\Delta \vec{\chi}'_{1s} = (-2A_{xx} x'_{1s}, -2A_{yy} y'_{1s}, -2A_{zz} z'_{1s}) \quad (54)$$

в силу равенств (20), (22).

Если $R'_{01} = |\vec{R}'_1 - \vec{R}'_0|$ и $R'_{12} = |\vec{R}'_2 - \vec{R}'_1|$ представить квадратичными разложениями по \vec{R}'_1 , то $\vec{\chi}'_{1s}$ можно представить как

$$\vec{\chi}'_{1s} = k(\vec{\beta}'_s - \vec{\alpha}'_s), \quad (55)$$

причем

$$\vec{\beta}'_s = - \left(\frac{\partial R'_{12}}{\partial \vec{R}'_1} \right)_s, \quad \vec{\alpha}'_s = - \left(\frac{\partial R'_{01}}{\partial \vec{R}'_1} \right)_s.$$

“Малые” площадки $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

Как отмечалось в комментариях к формуле (50), при выполнении условия (32) можно положить $\vec{R}'_{1s} \approx \vec{R}'_{1c}$, взяв за основу формулу (50), полученную в приближении дифракции Фраунгофера. Кроме того, в силу быстрого убывания “диаграммных множителей” область изменения $\vec{\chi}'_1$ можно принять бесконечной. При этих предположениях

$$\langle \bar{S}'(\vec{R}'_2) \rangle \approx \frac{c}{(2\pi)^3} \left(\frac{k}{2} \right)^4 \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \vec{\chi}'_{1s} \vec{n}'(\vec{R}'_{1c}) \left| \vec{A}'_0(\vec{R}'_{1c}) \right|^2 \times \\ \times \left| \vec{R}'_2 - \vec{R}'_{1c} \right|^{-2} \sin^2 \chi(\vec{R}'_{1c}) \cdot V' \Phi_\varepsilon(\vec{\chi}'_1) (C_x^{-1} \sin C_x)^2 \times \\ \times (C_y^{-1} \sin C_y)^2 (C_z^{-1} \sin C_z)^2. \quad (56)$$

Переход к интегрированию по \vec{R}'_{1s} в (56) невозможен по причине того, что внутренние точки

\bar{R}'_{1s} из V' формируют только малые окрестности максимумов “диаграммных множителей”, остальные их части формируются за счет вклада \bar{R}'_{1s} , лежащих в зоне “тени” (за пределами V').

Упрощения в (56) возможны, если спектральная плотность $\Phi_\varepsilon(\bar{\chi}'_1)$ мало меняется в пределах первых нескольких лепестков “диаграммных множителей”. Ограничившись первым членом разложения $\Phi_\varepsilon(\bar{\chi}'_1) \approx \Phi_\varepsilon(\bar{\chi}'_{1c}) + \dots$ и взяв в качестве новых переменных интегрирования аргументы C_x, C_y, C_z “диаграммных множителей”, получим

$$\langle \bar{S}'(\bar{R}'_2) \rangle \approx c \left(\frac{k}{2} \right)^4 \bar{n}'(\bar{R}'_{1c}) |\bar{A}'_0(\bar{R}'_{1c})|^2 \times \\ \times |\bar{R}'_2 - \bar{R}'_{1c}| \sin^2 \chi(\bar{R}'_{1c}) \cdot \Phi_\varepsilon(\bar{\chi}'_{1c}) V', \quad (57)$$

где $\bar{\chi}'_{1c} = k(\bar{\beta}'_0 - \bar{\alpha}'_0)$, $V' = \Delta x \Delta y \Delta z$ и использовано значение табличного интеграла ([13], с. 431)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \pi.$$

8.2. Вырожденное рассеяние

“Большие” площадки $\Delta y, \Delta z$

Воспользовавшись выражением (46) для внутренних стационарных точек y'_{1s}, z'_{1s} объема V' , получим

$$\langle \bar{S}'(\bar{R}'_2) \rangle \approx \frac{c}{(2\pi)^3} \left(\frac{k}{2} \right)^4 \int_{-\infty}^{\infty} d\chi'_{1x} \iint_{V'_{2x}} d\chi'_{1y} d\chi'_{1z} \bar{n}'(\bar{R}'_{1cs}) \times \\ \times |\bar{A}'_0(\bar{R}'_{1cs})|^2 |\bar{R}'_2 - \bar{R}'_{1cs}|^2 \sin^2 \chi(\bar{R}'_{1cs}) \cdot (\Delta x)^2 \times \\ \times (C_x^{-1} \sin C_x)^2 \frac{\pi^2}{A_{yy} A_{zz}} \Phi_\varepsilon(\bar{\chi}'_1), \quad (58)$$

где V'_{2x} – область значений χ'_{1y}, χ'_{1z} , отвечающая внутренним стационарным точкам y'_{1s}, z'_{1s} согласно (20), (22):

$$\chi'_{1y} = k(\beta'_{0y} - \alpha'_{0y}) - 2A_{yy} y'_{1s}, \quad (59)$$

$$\chi'_{1z} = k(\beta'_{0z} - \alpha'_{0z}) - 2A_{zz} z'_{1s}. \quad (60)$$

Напомним, что для этого случая $|\alpha'_{0x}| = |\beta'_{0x}| = 1$, а $\alpha'_{0y} = \beta'_{0y} = \alpha'_{0z} = \beta'_{0z} = 0$.

При произвольной величине $\Phi_\varepsilon(\bar{\chi}'_1)$ переход в (58) к интегрированию по $d^3 \bar{R}'_{1s}$ невозможен из-за отсутствия связи χ'_{1x} с x'_1 внутренних точек V' . Если же $\Phi_\varepsilon(\bar{\chi}'_1)$ слабо меняется в пределах нескольких первых осцилляций “диаграммного множителя”, ее можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $\chi'_{1x} = \chi'_{1cx} = k(\beta'_{0x} - \alpha'_{0x})$, ограничившись первым членом разложения. Выполнив затем интегрирование по χ'_{1x} аналогично проведенному в (56) и перейдя от интегрирования по χ'_{1y}, χ'_{1z} к интегрированию по y'_{1s}, z'_{1s} , получим

$$\langle \bar{S}'(\bar{R}'_2) \rangle \approx c \left(\frac{k}{2} \right)^4 \int_{V'} d^3 \bar{R}'_{1s} \bar{n}'(\bar{R}'_{1cs}) |\bar{A}'_0(\bar{R}'_{1cs})|^2 \times \\ \times |\bar{R}'_2 - \bar{R}'_{1cs}|^2 \sin^2 \chi(\bar{R}'_{1cs}) \cdot \Phi_\varepsilon(\bar{\chi}'_{1cs}). \quad (61)$$

При этом использовано $\Delta x = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dx_{1s}$ и введено обозначение

$$\bar{\chi}'_{1cs} = (\chi'_{1cx}, \chi'_{1sy}, \chi'_{1sz}), \quad (62)$$

а χ'_{1sy}, χ'_{1sz} определены равенствами (59) и (60) соответственно. Заметим, что в силу условия (32) можно положить $\bar{R}'_{1cs} \approx \bar{R}'_{1c}$.

“Малые” площадки $\Delta y, \Delta z$

Воспользовавшись приближением (50), получим

$$\langle \bar{S}'(\bar{R}'_2) \rangle \approx \frac{c}{(2\pi)^3} \left(\frac{k}{2} \right)^4 \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \bar{\chi}'_1 \bar{n}'(\bar{R}'_{1c}) |\bar{A}'_0(\bar{R}'_{1c})|^2 \times \\ \times |\bar{R}'_2 - \bar{R}'_{1c}|^2 \sin^2 \chi(\bar{R}'_{1c}) \cdot (C_x^{-1} \sin C_x)^2 (C_y^{-1} \sin C_y)^2 \times \\ \times (C_z^{-1} \sin C_z)^2 \Phi_\varepsilon(\bar{\chi}'_1). \quad (63)$$

Как и в предыдущем случае, упрощение (63) возможно, если в пределах нескольких первых лепестков “диаграммных множителей” можно положить $\Phi_\varepsilon(\bar{\chi}'_1) \approx \Phi_\varepsilon(\bar{\chi}'_{1c}) + \dots$, где $\bar{\chi}'_{1c} = k(\bar{\beta}'_0 - \bar{\alpha}'_0)$. Взяв интегралы от “диаграммных множителей”, получим

$$\langle \bar{S}'(\bar{R}'_2) \rangle \approx c \left(\frac{k}{2} \right)^4 \bar{n}'(\bar{R}'_{1c}) |\bar{A}'_0(\bar{R}'_{1c})|^2 \times \\ \times |\bar{R}'_2 - \bar{R}'_{1c}|^2 \sin^2 \chi(\bar{R}'_{1c}) \cdot \Phi_\varepsilon(\bar{\chi}'_{1c}) V'. \quad (64)$$

Сопоставляя (64) с (57) и (61) с (52), видим, что при плавной зависимости $\Phi_\varepsilon(\vec{\chi}'_1)$ формулы для вырожденного рассеяния являются аналитическим продолжением соответствующих им формул для невырожденного рассеяния.

9. Обсуждение результатов

Выполненные с помощью МСФ расчеты являются новым шагом в решении рассматриваемой проблемы, позволяющим отказаться от физически неоправданных предположений, содержащихся в известных к настоящему времени работах. Этот метод является общепризнанным, математически обоснованным асимптотическим методом, который применяется исследователями в самых различных областях физики. Новыми являются как рабочие формулы (20)–(25), (36), (37), (51), (56), (58), полученные в приближении дифракции Френеля, так и их предельный переход к приближению дифракции Фраунгофера (38), (50) при рассеянии “малым” объемом, что является подтверждением достоверности полученных отношений.

Применимость результатов ограничена рядом требований. Первое из них – малость отбрасываемых членов в разложении фазы по сравнению с оставленными квадратичными. Это ограничивает область рассматриваемых в вычислениях значений x'_1, y'_1, z'_1 неравенством (32). Второе требование – малость последующих членов асимптотического ряда по сравнению с главным (36). Как и в работе [12], его можно получить в явном виде, если разложить предэкспоненциальный множитель $f(\vec{R}'_1 + \vec{R})$ в формуле (35) по степеням \vec{R} в окрестности точки $\vec{R}'_1 = \vec{R}'_{1s}$ и выполнить затем почленное интегрирование. Получаемые при этом условия аналогичны установленным в [12] и равноценны неравенству (32).

Относительная погрешность выражения (52), связанная с заменой множителя $\Delta Q_x \Delta Q_y \Delta Q_z$ в формуле (36) на асимптотическое значение $(\pi)^{3/2}$, порядка

$$1.5\sqrt{\pi/2} \left[A_{xx}^{-1/2} (\Delta x)^{-1} + A_{yy}^{-1/2} (\Delta y)^{-1} + A_{zz}^{-1/2} (\Delta z)^{-1} \right] \ll 1.$$

Такую оценку можно получить, если интеграл вероятности $\text{erf } \hat{\mu}$ в формуле (П8) выразить через интегралы Френеля:

$$\text{erf } \hat{\mu} = 2e^{-i\pi/4} \left[C(\sqrt{2/\pi}\mu) + iS(\sqrt{2/\pi}\mu) \right],$$

$$(\hat{\mu} = e^{-i\pi/4}\mu),$$

данные о которых подробно представлены на с. 124, 142, 143 справочника [14].

Кроме того, различные варианты формул для $\langle \vec{S}'(\vec{R}'_2) \rangle$, полученные при определенных значениях физических параметров, предполагают некоторые ограничения на поведение спектральной плотности $\Phi_\varepsilon(\vec{\chi}'_1)$, что оговаривалось при получении этих формул.

Анализ последовательности проведенных вычислений позволяет объяснить физический механизм формирования рассеянного поля. Он определяется двумя факторами: случайными изменениями флуктуаций ε и “деструктивной интерференцией” ([13], с. 421) волн, рассеянных различными частями объема V' , из-за разницы хода проходимого ими оптического пути.

Результатом действия первого фактора является то, что средние значения линейных по ε величин обращаются в нуль, а квадратичные величины, такие как $\langle \vec{S}'(\vec{R}'_2) \rangle$, являются суммой независимых вкладов в рассеяние от отдельных фурье-компонент ε с волновыми векторами $\vec{\chi}'_1$, что является следствием теоремы Винера–Хинчина для однородного случайного поля ε .

Влияние второго фактора проявляется в том, что вклад отдельной случайной пространственной “решетки” является результатом коллективного рассеяния всеми частями объема V' с учетом частичного взаимопогашения в результате интерференции. Из-за этого вклад оказывается пропорциональным лишь некоторой доле окрестности стационарной точки, где изменения фазы минимальны.

Такое объяснение указывает на ошибочность концепций рассеяния, положенных в основу рассмотрения [1, 2], где предполагается статистическая независимость рассеяния отдельными частями V' , в пределах которых разность фаз между двумя точками рассеяния аппроксимируется линейной функцией координат. Хотя в частном случае рассеяния “большим” объемом в [1] получается результат, согласующийся с формулой (52) с точностью до неопределенного “свободного” параметра $\bar{\Phi}_\varepsilon(\vec{\chi}'_{1s})/\Phi_\varepsilon(\vec{\chi}'_{1s})$, где $\bar{\Phi}_\varepsilon(\vec{\chi}'_{1s})$ – некая “усредненная” спектральная

плотность, введенная, по сути, произвольно а priori В. И. Татарским в формуле (23) на с. 150 монографии [1]. Напомним, что $\vec{\chi}'_{1s} = k(\vec{\beta}'_s - \vec{\alpha}'_s)$ соответствует $-\vec{K}$ в обозначениях В. И. Татарского.

В случае “большого” объема при определенных условиях возможен переход от интегрирования по волновым векторам $\vec{\chi}'_{1s}$ случайных “решеток” в формуле (52) к соответствующим им стационарным точкам \vec{R}'_{1s} в формуле (53), что в определенной мере и объясняет такое соответствие.

В случае “малого” объема это соответствие обеспечивается при практически неизменной величине $\Phi_\epsilon(\vec{\chi}'_1)$ в пределах нескольких $m \sim 3-4$ лепестков “диаграммных множителей”. Это, по-видимому, эквивалентно замене конечной области интегрирования на бесконечную при вычислениях корреляционной функции в [1, 2]. Действительно, если (57) умножить на $\vec{n}'(\vec{R}'_2) |\vec{R}'_{2c} - \vec{R}'_{1c}|^2$ и поделить на $\frac{c}{8\pi} |\vec{A}'_0(\vec{R}'_{1c})|^2 V'$, то получим дифференциальное сечение рассеяния, отнесенное к единице “малого” объема V' , в виде

$$\sigma_0(\vec{R}'_2) = \frac{\pi}{2} k^4 \Phi_\epsilon(\vec{\chi}'_{1s}) \sin^2 \chi(\vec{R}'_{1c}). \quad (65)$$

Учитывая связь между флуктуациями ϵ и коэффициента преломления ([2], с. 82, формула (16.6)), получаем полное совпадение (65) с соответствующей формулой (16.15) в [2]. Аналогичная формула (27) на с. 151 в [1] содержит “усредненную” спектральную плотность $\Phi_\epsilon(\vec{\chi}'_1)$ вместо $\Phi_\epsilon(\vec{\chi}'_{1s})$.

Таким образом, в обоих предельных случаях для соответствия результатов [1, 2] результатам, полученным на основе МСФ, необходимо отсутствие аномального роста $\Phi_\epsilon(\vec{\chi}'_1)$ при $\vec{\chi}'_1$, отвечающих стационарным точкам из области “тени” (за пределами V'). Возможно, что при этих условиях каким-то образом приближенно проявляется свойство инволютивности преобразования Лежандра ([15], с. 198, 199).

При произвольных размерах V' необходимо использовать выражения типа (П7), а при возможном вкладе стационарных точек из области “тени” – выражения типа (51), (56), (58).

Из-за значительного различия в изначальной постановке задачи сравнение с результатами В. И. Татарского [4] может быть только качественное. Сравнивать необходимо величины $\langle |E_s|^2 \rangle \equiv$

$\langle |\vec{S}'(\vec{R}'_2) \rangle / (c/8\pi)$ и $\langle |E_s|^2 \rangle \equiv \langle \mathbf{E}\mathbf{E}^* \rangle / (\pi a^2)^4$. В первом случае $\langle \vec{S}'(\vec{R}'_2) \rangle$ определяется формулой (58) для частного случая $(\vec{R}'_2 = -\vec{R}'_0)$ вырожденного рассеяния, во втором $\langle \mathbf{E}\mathbf{E}^* \rangle$ – формулой (47) в [4], а πa^2 – эквивалентная площадь антенн с гауссовым амплитудным освещением апертуры. Для малоуглового рассеяния $\Delta x, \Delta y, \Delta z \ll R_0$ можно положить $|\vec{n}'(\vec{R}'_{1c})| \approx 1$, $|\vec{R}'_2 - \vec{R}'_{1cs}| \approx R'_2 = R'_0$, $\sin^2 \chi \approx 1$. Выбрав $|\vec{A}'_0(\vec{R}'_{1cs})| \approx A_0^2/R_0^2$, с учетом того, что $A_{yy} = A_{zz} = k/R_0$, в первом случае получим

$$\langle |\bar{E}_s|^2 \rangle \approx \frac{k^2 A_0^2 (\Delta x)^2}{16 R_0^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} d\chi'_{1x} \iint_{V_{2x}} d\chi'_{1y} d\chi'_{1z} \Phi_\epsilon(\vec{\chi}'_1) (C_x^{-1} \sin C_x)^2,$$

где $C_x = \frac{\Delta x}{2} (\chi'_{1x} - 2k)$, $|\chi'_{1y}| \leq \frac{k\Delta y}{2}$, $|\chi'_{1z}| \leq \frac{k\Delta z}{2}$ согласно формулам (59) и (60) при $\vec{\alpha}'_0 = (-1, 0, 0)$, $\vec{\beta}'_0 = (1, 0, 0)$.

Для второго случая в дальней зоне антенны ($R^2 \gg k^2 a^4$)

$$\langle |E_s|^2 \rangle = \frac{k^2 A_0^2 (2h^2/\pi)}{16 R^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int \int d^3 p \Phi_\epsilon(\vec{p}) \times \exp[-h^2(p_z - 2k)^2 - (a^2/2)(p_x^2 + p_y^2)].$$

Для первого случая эффективная область V_{3x} интегрирования заключена в пределах:

$$|\chi'_{1x} - 2k| \leq (\pi/\Delta x), \quad |\chi'_{1y}| \leq (k\Delta y/R_0), \\ |\chi'_{1z}| \leq (k\Delta z/R_0).$$

Аналогичная эффективная область V_{3p} во втором случае ограничена условиями:

$$|p_z - 2k| \leq h^{-1}, \quad |p_x| \sim |p_y| \leq \sqrt{2}/a.$$

Заменяя в этих областях множитель при $\Phi_\epsilon(\vec{\chi}'_1)$ и $\Phi_\epsilon(\vec{p})$ единицей, можно приближенно записать

$$\langle |E_s|^2 \rangle \approx \frac{k^2 A_0^2 (\Delta x)^2}{16 R_0^2} \iiint_{V_{3x}} d^3 \vec{\chi}'_1 \Phi_\epsilon(\vec{\chi}'_1),$$

$$\langle |E_s|^2 \rangle \approx \frac{k^2 A_0^2 (2h/\pi)^2}{16 R^2} \iiint_{V_{3,p}} d^3 p \Phi_\varepsilon(\vec{p}).$$

Выбором $h \approx \Delta x \sqrt{\pi/2} \cong 1.25 \Delta x$ можно сделать коэффициенты перед интегралом одинаковыми. В результате $\langle |E_s|^2 \rangle$ в обоих случаях определяется интегралом от спектральной плотности Φ_ε по некоторой эффективной области волновых чисел, зависящих от размеров рассеивающего объема.

Приложение

Рассмотрим трехкратный интеграл

$$I_3 = \int_{x_l}^{x_u} dx \int_{x_l}^{y_u} dy \int_{x_l}^{z_u} dz f(\vec{R}'_{1s} + \vec{R}) e^{i\Phi(\vec{R})}, \quad (\text{П1})$$

где вектор \vec{R}'_{1s} определен соотношениями (22), а $\Phi(\vec{R})$ – формулой (23). Для получения главного члена асимптотики разложим предэкспоненциальный множитель в ряд Тейлора, ограничившись первым членом разложения $f(\vec{R}'_{1s} + \vec{R}) \approx f(\vec{R}'_{1s})$. Тогда (П1) представляется в виде

$$I_3 = e^{i\Phi_s} f(\vec{R}'_{1s}) I_x I_y I_z, \quad (\text{П2})$$

где

$$I_x = \int_{x_l}^{x_u} dx e^{iA_{xx}x^2}. \quad (\text{П3})$$

Аналогичным образом можно записать I_y и I_z , имея в виду выражение (23) для фазы.

Введем в (П3) новую переменную интегрирования вместо x :

$$t = e^{-i\pi/4} \sqrt{A_{xx}} x. \quad (\text{П4})$$

Тогда (П3) запишется в виде

$$I_x = h_{xs} \Delta Q_x, \quad (\text{П5})$$

где

$$h_{xs} = e^{i\pi/4} (A_{xx})^{-1/2}, \quad (\text{П6})$$

$$\Delta Q_x = Q(\hat{\mu}_{xl}) - Q(\hat{\mu}_{xu}), \quad (\text{П7})$$

$$Q(\hat{\mu}) = \int_{\hat{\mu}}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc} \hat{\mu} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \operatorname{erf} \hat{\mu}], \quad (\text{П8})$$

$$\hat{\mu}_{xl} = e^{-i\pi/4} \mu_{xl} = e^{-i\pi/4} (A_{xx})^{1/2} x_l, \quad (\text{П9})$$

$$\hat{\mu}_{xu} = e^{-i\pi/4} \mu_{xu} = e^{-i\pi/4} (A_{xx})^{1/2} x_u.$$

Таким образом, в силу (П6) главный член асимптотики $\sim (A_{xx})^{-1/2} = \sqrt{2/(\Phi''_{xx})_s}$ и выражается через разность ΔQ_x интегралов вероятности от комплексного аргумента. При желании эту зависимость можно выразить через интегралы Френеля.

Аналогичным образом можно получить

$$I_y = h_{ys} \Delta Q_y, \quad (\text{П10})$$

$$I_z = h_{zs} \Delta Q_z. \quad (\text{П11})$$

Входящие в эти выражения величины h_{ys} , ΔQ_y и h_{zs} , ΔQ_z определяются соответственно через (y_l, y_u, A_{yy}) и (z_l, z_u, A_{zz}) подобно тому, как h_{xs} , ΔQ_x – через (x_l, x_u, A_{xx}) в формулах (П6)–(П9).

Поведение ΔQ_x для “большой” и “малой” площадок описано в [5–7]. Если точки x'_{1s} , принадлежащие $[x'_l, x'_u]$, удалены достаточно от концов интервала “большой” площадки ($\mu_{xl} \gg 1, \mu_{xu} \gg 1$), то $\Delta Q_x \approx \sqrt{\pi}$. Если же x'_{1s} приближаются к одному из концов, тогда $\Delta Q_x \approx \sqrt{\pi}/2$. Далеко в области “тени” (за пределами области интегрирования) $|\Delta Q_x| \approx 2/\mu_{xl}$ либо $2/\mu_{xu}$ соответственно.

В случае “малой” площадки для внутренних точек x'_{1s} из интервала интегрирования $\mu_{xl} \ll 1, \mu_{xu} \ll 1$. При этом [11]

$$\Delta Q_x \approx e^{-i\pi/4} e^{iB_x} A_x (C_x^{-1} \sin C_x), \quad (\text{П12})$$

где

$$A_x = (A_{xx})^{1/2} \Delta x, \quad (\text{П13})$$

$$B_x = A_{xx} x'^2_{1s}, \quad (\text{П14})$$

$$C_x = -A_{xx} x'_{1s} \Delta x \equiv K'_{1x} \Delta x/2. \quad (\text{П15})$$

Для “большой” и “малой” по y'_1 либо z'_1 площадок ΔQ_y и ΔQ_z можно записать аналогичным образом, заменив во всех выражениях x'_{1s}, A_{xx}, \dots на соответствующие величины y'_{1s}, A_{yy}, \dots либо z'_{1s}, A_{zz}, \dots . При этом следует иметь в виду, что

$$B_x + B_y + B_z = A_{xx} x'^2_{1s} + A_{yy} y'^2_{1s} + A_{zz} z'^2_{1s} = \Phi_c - \Phi_s \quad (\text{П16})$$

согласно соотношению (24).

В заключение выражаю благодарность рецензенту за полезные замечания, которые были учтены автором в процессе доработки текста статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. – М.: Наука, 1967. – 548 с.
2. *Исидару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 2. – М.: Мир, 1981. – 317 с.
3. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения. – М.: Физматгиз, 1962. – 127 с.
4. *Tatarskii V. I.* Theory of Single Scattering by Random Distributed Scatterers // *IEEE Trans. Antennas Propag.* – 2003. – Vol. 51, No. 10. – P. 2806–2813.
5. *Кон А. И., Татарский В. И.* О мощности сигнала при радиоакустическом зондировании атмосферы // *Радиотехника и электроника.* – 1986. – Т. 31, № 10. – С. 1903–1908.
6. *Брюховецкий А. С.* Рассеяние электромагнитных волн в искусственно создаваемых средах: дис. ... к. ф.-м. н. ИРЭ АН УССР, г. Харьков, 1970. – 149 с.
7. *Брюховецкий А. С.* Радиолокационное отражение от звукового импульса // *Радиофизика и радиоастрономия.* – 2005. – Т. 10, № 4. – С. 432–441.
8. *Крюковский А. С., Лукин Д. С., Галкин Е. А., Растягаев Д. С.* Волновые катастрофы-фокусировки в дифракции и распространении электромагнитных волн (обзор) // *Радиотехника и электроника.* – 2006. – Т. 51, № 10. – С. 1155–1192.
9. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. Т.1. – М.: Мир, 1978. – 547 с.
10. *Брюховецкий А. С.* Переход от ближней к дальней зоне в решении задачи обратного рассеяния волн статистически неровной поверхностью // *Радиофизика и радиоастрономия.* – 2010. – Т. 15, № 4. – С. 408–424.
11. *Брюховецкий А. С.* Переход от ближней к дальней зоне в решении задачи рассеяния плоской волны статистически неровной поверхностью // *Радиофизика и радиоастрономия.* – 2012. – Т. 17, № 2. – С. 157–170.
12. *Брюховецкий А. С.* Переход от ближней к дальней зоне в двухпозиционном рассеянии волн статистически неровной поверхностью // *Радиофизика и радиоастрономия.* – 2013. – Т. 18, № 3. – С. 244–256.
13. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. – М.: Наука, 1970. – 856 с.
14. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
15. *Федорюк М. В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1987. – 544 с.

А. С. Брюховецкий

Институт радіофізики та електроніки
ім. О. Я. Усикова НАН України,
вул. Ак. Проскури, 12, м. Харків, 61085, Україна

ПРО ВРАХУВАННЯ СФЕРИЧНОСТІ ХВИЛЬОВИХ ФАЗОВИХ ФРОНТІВ У ТЕОРІЇ РОЗСІЯННЯ ХВИЛЬ ТУРБУЛЕНТНОЮ АТМОСФЕРОЮ

Для випадку розсіяння хвиль турбулентною атмосферою знайдено асимптотики трикратних інтегралів, що визначають інтенсивність розсіяного поля. Для невиродженого розсіяння (гесіан фази є відмінним від нуля) використано метод стаціонарної фази за трьома змінними інтегрування. Для виродженого розсіяння (гесіан фази дорівнює нулю) – комбінований метод: наближення дифракції Фраунгофера за однією зі змінних та метод стаціонарної фази за двома іншими. Встановлено зв'язок з відомими в літературі результатами розрахунків.

A. S. Bryukhovetski

O. Ya. Usikov Institute for Radiophysics and Electronics,
National Academy of Sciences of Ukraine,
12, Akad. Proskura St., Kharkiv, 61085, Ukraine

ACCOUNTING FOR SPHERISITY OF PHASE WAVE FRONTS IN THE THEORY OF WAVE SCATTERING BY TURBULENT ATMOSPHERE

For the case of wave scattering by turbulent atmosphere, the asymptotics of three-fold integrals that determine the intensity of the scattered field are found. For nondegenerate scattering (hessian of phase being nonzero) the method of a stationary phase with respect to three integration variables has been used. For the degenerate scattering (hessian of phase being zero) the combined method has been applied, namely, the Fraunhofer approximation in one variable, and the method of stationary phase in two other variables. The correlation has been established with the results known from literature.

Статья поступила в редакцию 25.12.2013