

УДК 550.8

**Т.Л. Михеева, Н.В. Панченко**

*Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины,  
г. Киев, Украина*

## **ПРЯМЫЕ ЗАДАЧИ МАГНИТОМЕТРИИ В КЛАССЕ НЕОДНОРОДНО НАМАГНИЧЕННЫХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ, ВНЕШНИЙ КОНТУР КОТОРЫХ АППРОКСИМИРОВАН ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ОТРЕЗКАМИ**

Приведено решение прямой задачи магнитометрии, когда намагниченные массы сосредоточены внутри тела. Выделен класс двумерных тел – односвязных, ограниченных замкнутым контуром. Контур аппроксимирован кусочно-прямолинейными отрезками. Массы намагничены так, что вертикальная составляющая вектора интенсивности намагничения является линейной функцией аппликаты. Показано, как неоднородность намагничения влияет на внешнее магнитное поле.

**Ключевые слова:** магнитометрия, прямая задача магнитометрии, намагниченное тело, неоднородность намагничения.

**Введение.** При интерпретации полевых магнитометрических данных часто полагают, что вектор интенсивности намагничения – величина постоянная во всем объеме намагниченного тела и предполагают, что тело намагничено однородно. Такое предположение может относиться только к случаям небольшой вертикальной мощности геологических тел. Проведен вычислительный эксперимент, позволяющий определить влияние неоднородности намагничения на напряженность внешнего магнитного поля.

Отметим два подхода к решению интерпретационных задач методом подбора. Первый подход реализует метод простого моделирования. Интерпретатор работает с программными средствами, которые позволяют решать прямые задачи. Сопоставляя исходное поле и теоретическое, интерпретатор вносит изменения в численные значения параметров модели, и вычислительный цикл начинается заново. Этот подход хорошо зарекомендовал себя [1, 6].

Второй подход – метод математического моделирования. Для сопоставления полей составляются специально построенные функционалы. Они зависят от численных значений параметров модели. Функционалы

минимизируются методами математического анализа. Получается новая математическая модель, которая порождает аномальное поле, близкое к исходному. Такой подход теоретически обоснован и использовался в работах [2, 3, 5, 7, 9] и др.

Каждая практическая задача имеет свое решение в определенном модельном классе геологических объектов. Выделим класс двумерных тел – односвязных, ограниченных замкнутым контуром. Пусть этот контур таков, что может быть аппроксимирован кусочно-прямолинейными отрезками. В обзорной работе [8] подробно изложены вопросы решения прямых задач гравиметрии для  $n$ -угольных пластин и порождаемых ими призм. Отмечается, что еще в 1836 г. Ф.А. Слудский изложил решение прямой задачи гравиметрии для однородных многогранников. Он же сформулировал принцип моделирования при решении интерпретационных задач гравиметрии.

Если для гравиметрии решения прямых задач в этом классе достаточно хорошо разработаны, то для магнитометрии таких задач мало, особенно, если горные породы намагничены неоднородно.

В работе рассмотрены методы решения прямых задач магнитометрии в достаточно широком классе двумерных горизонтально расположенных цилиндрических тел. Модель представляет собой совокупность таких тел. Интенсивность намагничения масс может зависеть от глубины их погружения. Ранее в работе [4] аналогичный подход был рассмотрен для таких моделей данного класса геологических тел, но внешний контур тела аппроксимировался непрерывной гладкой функцией с необходимым выбором локальной системы координат и определением центра звездности, что не всегда осуществимо при решении практических задач.

**Постановка задачи.** Рассмотрим такие геологические тела, которые можно представить совокупностью цилиндрических тел. Оси цилиндров горизонтальны и параллельны между собой. Обычно подобные модели описывают их вертикальными сечениями. Некоторые тела такого класса могут быть ограничены по простиранию. В этом случае они трехмерные, но не меняют конфигурации в вертикальных сечениях, которые проводятся вкрест осей цилиндров или простирания геологических объектов. Иногда указанные тела называют 2,5-мерными. Модель может состоять из некоторой совокупности тел. Однако описание данного класса тел можно начать с изолированного объекта, а затем обобщить на всю модель.

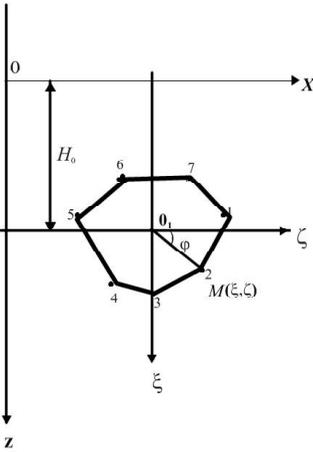


Рис. 1. Контур геологического тела

Пусть имеется некоторая область, заполненная намагниченными массами. Проведем вертикальную плоскость, проходящую вкост простираия возмущающих масс. Построим ее таким образом, чтобы она одновременно была с достаточной степенью точности и плоскостью симметрии этой области. Выбранная плоскость будет пересекать аномальные массы. В ней зафиксирована область  $S$ , которая ограничивается замкнутым контуром  $L$ . Выберем систему координат. Начало ее выберем на земной поверхности. Ось  $OZ$  (или  $Oζ$ ) направим вертикально вниз, тогда ось абсцис  $OX$  (или  $Oξ$ ) будет горизонтальной. Она совпадает с земной поверхностью, если последняя является горизонтальной плоскостью. Ось  $OY$  будет совпадать с простираием тела. Аномалиеобразующее тело – это замкнутый контур  $L$ , определенный положением характерных точек. Они фиксируются своими координатами:

$$m; M(d_i, H_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Здесь контур определен положением точек, записаны их координаты. Таким образом, сам контур аппроксимирован кусочно-прямолинейными отрезками (рис. 1). Массы, которые находятся в области  $S$ , намагничены. Интенсивность намагничения определяется вектором

$$\mathbf{I} = I_x \mathbf{i} + I_z \mathbf{k}.$$

Данный вектор находится в плоскости сечения тела и указывает на то, что в общем случае тело косо намагничено. Задача может быть обобщена на тот случай, когда намагничение тела неоднородное. Пусть при этом

$$I_x = \text{const}, \quad I_z = I_z^0 [1 + \alpha(\zeta - \zeta_0)]. \quad (1)$$

Коэффициент  $\alpha$  может быть легко определен.

По глубине заложения тела выбирается некоторый горизонт  $z = \xi_0$ , например глубина заложения самой верхней точки тела. В общем слу-

чае это может быть любой глубинный уровень, на котором располагается тело и вертикальная составляющая вектора интенсивности намагничения равна  $I_z^0$ . Можно записать  $I_z(\zeta_0) = I_z^0$ , что соответствует формуле (1). Для того чтобы определить коэффициент  $\alpha$ , зафиксируем другой глубинный уровень  $z = \xi_1$ , на котором  $I_z(\zeta_1) = I_z^0(1 + \alpha(\zeta_1 - \zeta_0))$ . Отсюда находим значение коэффициента  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{I_z(\zeta_1) - I_z^0}{I_z^0(\zeta_1 - \zeta_0)}.$$

Модель, состоящая из совокупности тел, описывается следующими параметрами:

$$P_1 = \{jk; [m, (d_i, H_i), i = 1, 2, \dots, m]_t; [I_x, I_z]_t \text{ или} \\ (I_x; \zeta_0; I_z^0; \zeta_1; I_z(\zeta_1))_t; t = 1, 2, \dots, jk\}. \quad (2)$$

Модель состоит из  $jk$  аномалиеобразующих тел. Каждое  $t$ -е тело определяется положением  $m$  точек – записаны их координаты. Так устанавливается геометрическая структура модели. Далее выясняем намагниченность каждого  $t$ -го тела модели. Одни тела могут быть намагничены однородно. Тогда записываем две компоненты вектора интенсивности намагничения. Другие тела могут быть намагничены неоднородно. Полагаем, что эта намагниченность связана только с вертикальной составляющей, а именно  $I_x = \text{const}$ ,  $I_z = I_z(\zeta)$  – функция глубины заложения намагниченных масс. В исходных данных есть число  $I_x$ , число  $\zeta_0$  – глубинный горизонт, на котором вертикальная составляющая равна  $I_z^0$ , число  $\zeta_1$  – глубинный горизонт, на котором вертикальная составляющая равна  $I_z(\zeta_1)$ . Индекс  $t$  изменяется от единицы до числа  $jk$  – количества аномалиеобразующих тел.

**Решение прямой задачи.** Пусть в некоторой односвязной области  $D$  сосредоточены аномальные массы. Примем такое правило. Если точка  $M$  находится вне масс, то будем записывать ее координаты  $M(x, y, z)$ . Если же точка  $M$  находится внутри аномальных масс, то  $M(\xi, \eta, \zeta)$ . Аномальные массы намагничены, и это намагничение характеризуется вектором интенсивности намагничения

$$\mathbf{I} = I_x \mathbf{i} + I_y \mathbf{j} + I_z \mathbf{k}.$$

Если намагничение однородное, то составляющие вектора – постоянные числа. В этой задаче только составляющая по вертикальной оси может быть функцией координат точек:

$$I_x = \text{const}; \quad I_y = \text{const}; \quad I_z = I_z^0(1 + \alpha(\zeta - \zeta_0)).$$

Вне масс создается магнитное поле, потенциал которого выражается так:

$$U(x, y, z) = \iiint_D (\bar{I}, \text{grad}V) d\tau = \iiint (I_x V_x + I_y V_y + I_z V_z) d\tau$$

$$V = \frac{1}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \zeta - z]^{\frac{1}{2}}}.$$

Под знаком интеграла находится скалярное произведение двух вектор-функций. Полный вектор напряженности магнитного поля имеет свои составляющие:

$$T_z = Z = \frac{\partial U}{\partial z} = U_z; \quad T_x = X = \frac{\partial U}{\partial x} = U_x; \quad T_y = Y = \frac{\partial U}{\partial y} = U_y;$$

Если поле двумерное и  $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$ , то область  $D$  можно заменить площадью поперечного сечения  $S$ . В этом случае под знаком интеграла будет функция – логарифмический потенциал

$$V = 2 \ln \frac{1}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{1}{2}}} = -\ln[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2].$$

Для двумерного поля имеем:

$$T_z = Z = \iint_S ((I_x V_{xz} + I_z V_{zz}) d\tau,$$

$$T_x = H = \iint_S ((I_x V_{xx} + I_z V_{xz}) d\tau.$$

Теперь под знаком интеграла находятся вторые производные одной из подынтегральных функций:

$$V_{xx}(x, z) = -V_{zz}(x, z) = 2 \frac{(\xi - x)^2 - (\zeta - z)^2}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^2},$$

$$V_{xz}(x, z) = 4 \frac{(\xi - x)(\zeta - z)}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^2}.$$

Обратимся к рис. 1. Геологическая модель представлена одним телом. Область  $S$ , в которой сосредоточены намагниченные массы, ограничена замкнутым контуром. Этот контур определен положением точек

$$M_i(d_i, H_i), i = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

В нашем примере (рис. 1)  $m = 7$ . Для решения выделим элементарную ячейку области  $S$ . Это будет наклонный (или косой) уступ. Он определяется координатами угловых точек  $(d_1, H_1)$  и  $(d_2, H_2)$ . Вдоль оси абсцисс уступ имеет бесконечное горизонтальное простирание. В таком случае магнитный эффект одних уступов имеет свой знак, который определен функциональным соотношением. Для уступов другой группы знак должен изменяться на обратный. Например, для масс, сосредоточенных в области  $S$  (рис. 1), суммарный эффект определен только теми массами, которые ограничены замкнутым контуром.

Теперь для решения прямой задачи приведем такие функции:

$$Z(x, z) = \sum_{t=1}^{jk} \left[ \sum_{j=1}^{m=m(t)} Z_j(x, z, P_j) \right]_t, \quad H(x, z) = \sum_{t=1}^{jk} \left[ \sum_{j=1}^{m=m(t)} H_j(x, z, P_j) \right]_t. \quad (4)$$

Здесь записано, что составляющие напряженности аномального поля есть аддитивная сумма  $jk$  намагниченных объектов. Далее, каждое слагаемое есть магнитное поле, обусловленное массами  $m$  уступов  $t$ -го тела. Число  $m = m(t)$  есть функция  $t$ . На рис. 1 изображено тело, которое окружено семью отрезками,  $m = 7$ . Отметим еще одно обстоятельство. Функциональные особенности магнитных полей такие, что если  $H_1 < H_2$ , то знак функции сохраняется. Если же  $H_1 > H_2$ , то функции меняют знаки.

Обратимся к формулам (4). Символом  $P_j$  записаны параметры  $j$ -го уступа:

$$P_j = \{d_{1j}; H_{1j}; d_{2j}; H_{2j}; I_{x_j}; I_{z_j}^0; \zeta_0; \alpha_j\}.$$

Геометрические параметры алгоритмически переписываются из записи (3). Боковая грань уступа есть функция глубины заложения. Запишем

$$d = d(\zeta) = d_1 + \frac{d_2 - d_1}{H_2 - H_1} (\zeta - H_1)$$

Теперь каждое слагаемое в формуле (4) примет вид

$$\begin{aligned} Z_j &= 2I_x \int_{H_1}^{H_2} (\zeta - z) \int_{d(\zeta)}^{\infty} \frac{2(\xi - x)d\xi}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^2} d\zeta + \\ &+ 2I_z^0 \int_{H_1}^{H_2} (1 + \alpha(\zeta - \zeta_o)) \left[ \int_{d(\zeta)}^{\infty} \frac{(\zeta - z)^2 - (\xi - x)^2}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^2} d\xi \right] d\zeta = \\ &= 2I_x \int_{H_1}^{H_2} \frac{\zeta - z}{(d(\zeta) - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\zeta + \\ &+ 2I_z^0 \int_{H_1}^{H_2} (1 + \alpha(\zeta - \zeta_o)) \left[ \frac{(\xi - x)}{2[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]} + \frac{1}{2(\zeta - z)} \operatorname{arctg} \frac{\xi - x}{\zeta - z} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\xi - x)}{2[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]} - \frac{1}{2(\zeta - z)} \operatorname{arctg} \frac{\xi - x}{\zeta - z} \right]_{d(\zeta)}^{\infty} d\zeta = \\ &= 2I_x \int_{H_1}^{H_2} \frac{\zeta - z}{(d(\zeta) - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\zeta + \\ &+ 2I_z^0 \int_{H_1}^{H_2} (1 + \alpha(\zeta - \zeta_o)) \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} \Bigg]_{d(\zeta)}^{\infty} d\zeta = \\ &= 2I_x \int_{H_1}^{H_2} \frac{\zeta - z}{(d(\zeta) - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\zeta - \\ &- 2I_z^0 \int_{H_1}^{H_2} (1 + \alpha(\zeta - \zeta_o)) \frac{d_1 - x + \frac{d_2 - d_1}{H_2 - H_1} (\zeta - H_1)}{(d_1 - x + \frac{d_2 - d_1}{H_2 - H_1} (\zeta - H_1))^2 + (\zeta - z)^2} d\zeta. \end{aligned}$$

Перейдем к интегральной сумме. Отрезок вертикальной оси от точки  $z = H_1$  до точки  $z = H_2$  разделим на  $mz$  частей. Получим

$$Z_j(x, z) = 2I_x \frac{H_2 - H_1}{mz} \sum_{i=1}^{mz} \frac{\zeta_i - z}{\left[ d_1 - x + \frac{d_2 - d_1}{H_2 - H_1} (\zeta_i - z) \right]^2 + (\zeta_i - z)^2} -$$

$$- 2I_z^0 \frac{H_2 - H_1}{mz} \sum_{i=1}^{mz} \frac{(1 + \alpha(\zeta_i - \zeta_0)) \left[ d_1 - x + \frac{d_2 - d_1}{H_2 - H_1} (\zeta_i - H_1) \right]}{\left[ d_1 - x + \frac{d_2 - d_1}{H_2 - H_1} (\zeta_i - H_1) \right]^2 + (\zeta_i - z)^2}. \quad (5)$$

Определенный интеграл заменим суммой прямоугольных элементов. Внутри каждого элемента закрепим центральную точку. В этом случае имеем:

$$\Delta\zeta = \frac{H_2 - H_1}{mz}; \quad \zeta_i = H_1 + \frac{\Delta\zeta}{2} + \Delta\zeta(i-1), \quad i = 1, 2, \dots, mz.$$

Обратимся ко второй формуле (4):

$$H_i(x, z) = 2I_x \int_x^{H_2} \int_{H_1}^{\infty} \frac{(\xi - x)^2 - (\zeta - z)^2}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^2} d\xi d\zeta +$$

$$+ 2I_z^0 \int_x^{H_2} (1 + \alpha(\zeta - \zeta_0)) \int_{H_1}^{\infty} \frac{2(\xi - x)(\zeta - z)}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2]^2} d\xi d\zeta.$$

Подробные выкладки сделаны выше. Это позволяет переписать результат.

Имеем

$$H_i(x, z) = 2I_x \frac{H_2 - H_1}{mz} \times \sum_{i=1}^{mz} \frac{d_1 - x + \frac{d_2 - d_1}{H_2 - h_1} (\zeta_i - H_1)}{\left[ d_1 - x + \frac{d_2 - d_1}{H_2 - H_1} (\zeta_i - z) \right]^2 + (\zeta_i - z)^2} -$$

$$-2I_z^0 \frac{H_2 - H_1}{mz} \sum_{i=1}^{mz} \frac{(1 + \alpha(\zeta_i - \zeta_0))(\zeta_i - z)}{\left[ d_1 - x + \frac{d_2 - d_1}{H_2 - H_1} (\zeta_i - H_1) \right]^2 + (\zeta_i - z)^2}$$

При вычислениях следует обратиться к формулам (5).

**Программное решение прямой задачи магнитометрии для данного аппроксимационного построения модели.** Исходные данные состоят из двух частей. Первая часть – сведения о геологической модели. Параметры, которые определяют местоположение и размеры намагниченных тел, были записаны ранее вектором  $P_1$  – запись (2). Повторим это:

$$P_1 = \{jk; [m, (d_i, H_i), i = 1, 2, \dots, m]; [I_x, I_z]_t \text{ или } (I_x; \zeta_0; I_z^0; \zeta_1; I_z(\zeta_1))\}_t; \quad t = 1, 2, \dots, jk\}.$$

Модель состоит из  $jk$  тел. На внешнем контуре каждого тела закреплено положение  $m$  точек. Далее записаны составляющие вектора интенсивности намагничивания каждого тела отдельно. Намагниченность тела может быть однородной или неоднородной, тогда вертикальная составляющая этого вектора может изменяться с глубиной заложения намагниченных масс. Во втором случае фиксируются на разных глубинах две точки, в которых определены значения  $I_z^0$  и  $I_z^1$ . Вторая часть – необходимо указать координаты внешних точек, в которых следует вычислить аномальное поле:

- 1) поле вычисляется в произвольных точках вне намагниченных масс; необходимо подготовить обобщенный массив:  $n; (x_i, z_i), i = 1, 2, \dots, n$ ; здесь указано количество точек и их координаты;
- 2) поле вычисляется в точках горизонтального профиля по равномерной сетке; профиль может совпадать с осью абсцисс, а может быть параллелен ей и определяться уравнением  $Z = H_0$ ; в этом случае готовят массив  $xn; \Delta x; xk; H_0$ ; здесь указано начальное значение абсцисс, далее – шаг по профилю, конечное значение этой координаты и положение профиля относительно оси аппликат.

**Заключение.** При решении небольшого цикла прямых задач (пять вариантов) для модели заданной параметрами (4), геометрические параметры не изменялись; вертикальная составляющая интенсивности намагничивания – функция глубины залегания намагниченных масс. Фик-

сируется градиент изменения интенсивности намагничения вдоль оси

аппликат:  $\beta = \frac{I_z^{(1)} - I_z^0}{\zeta_i - \zeta_0}$ . На рис. 2 и 3 приведены значения вертикальной и

горизонтальной составляющих вектора напряженности магнитного поля. Как видно, графики функций расходятся в своих экстремальных частях  $Z_{a \max}$ ,  $H_{a \max}$ . Максимальное отклонение зависит от градиента изменения интенсивности намагничения. Таким способом в итерационном процессе необходимо учитывать неоднородность намагничения, если тело намагничено неоднородно и существует возможность определения контура кусочно-прямолинейными отрезками.

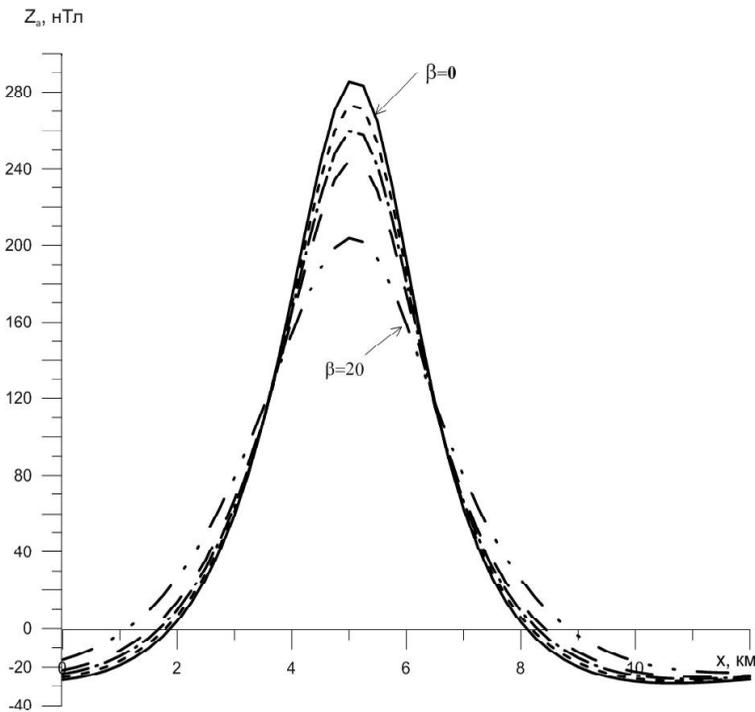


Рис. 2. Поля вертикальных составляющих вектора напряженности намагниченных тел

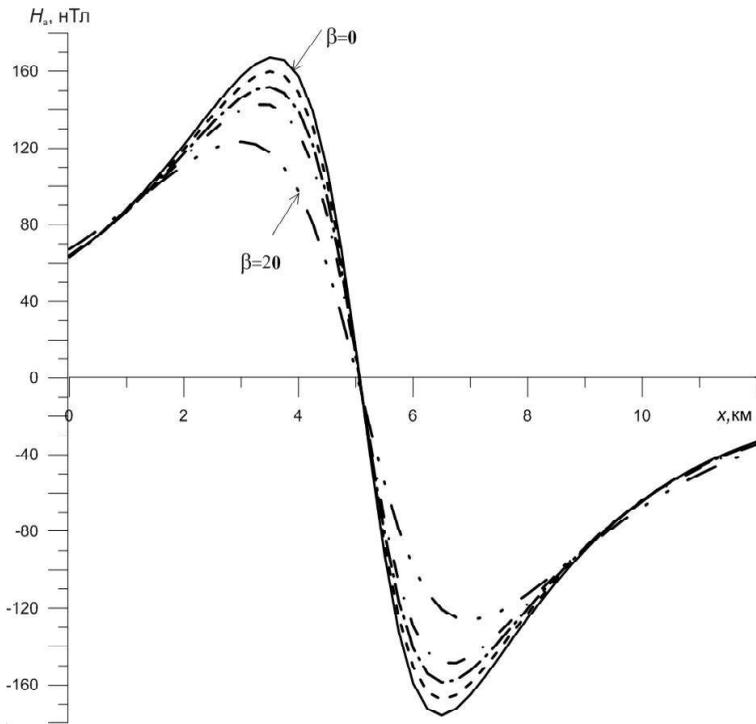


Рис. 3. Поля горизонтальных составляющих вектора напряженности намагнитченных тел

1. Андреев В.И. Моделирование геологических образований методами пространственной гравиметрии / В.И. Андреев. – М.: Недра, 1992. – 224 с.
2. Булах Е.Г. Автоматизированная система интерпретации гравитационных аномалий (метод минимизации) / Е.Г. Булах. – Киев: Наук. думка, 1973. – 111 с.
3. Булах Е.Г. Применение метода минимизации для решения задач структурной геологии по данным гравиразведки / Е.Г. Булах, В.А. Ржаницын, М.Н. Маркова. – Киев: Наук. думка, 1976.–219 с.
4. Булах Е.Г. Магнитные поля, обусловленные неоднородно намагнитченными телами / Е.Г. Булах, Т.Л. Михеева // Геоинформатика – 2007. – № 4. – С.19–22.
5. Кобрунов А.И. Теоретические основы решения обратных задач геофизики / А.И. Кобрунов. – Ухта: Ухтин. индустр. ин-та, 1995. – 228 с.
6. Красовский С.С. Отражение динамики земной коры континентального типа в гравитационном поле / С.С. Красовский. – Киев.: Наук. думка, 1981. – 264 с.

7. *Старостенко В.И.* Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии / В.И. Старостенко – Киев: Наук. думка, 1978. – 228 с.
8. *Старостенко В.И.* Гравитационное поле однородных  $n$ -угольных пластин и порождаемых ими призм: обзор / В.И. Старостенко // Физика Земли. – 1998. – № 3. – С. 37–53.
9. *В.Н. Страхов.* К теории метода подбора / В.Н. Страхов // Изв. АН СССР. Сер.геофиз. – 1964. – № 4. – С. 494–509.

**Прямі задачі магнітометрії в класі неоднорідно намагнічених горизонтальних циліндричних тіл, зовнішній контур яких апроксимований прямолінійними відрізками** Т.Л. Михеева, Н.В. Панченко

Наведено розв’язок прямої задачі магнітометрії, якщо намагнічувані маси зосереджені всередині тіла. Вибрано клас двовимірних тіл – однов’язних, обмежених, замкненим контуром. Цей контур апроксимован кусково-прямолінійними відрізками. Маса тіла намагнічена так, що вертикальна складова вектора інтенсивності намагнічування є лінійною функцією аплікати. Показано, як неоднорідність намагнічування пов’язана із зовнішнім магнітним полем.

**Ключові слова:** магнітометрія, пряма задача магнітометрії, намагнічене тіло, неоднорідність намагнічення.

**Direct tasks magnetometry in class inhomogeneously magnetized horizontal cylindrical bodies outer contour which approximated rectilinear lines** T.L. Mikheeva, N.V. Panchenko

The decision is a direct task magnetometry when magnetized mass concentrated inside the body. Selected class of two-dimensional bodies is simply connected, limited closed loop. Approximated rectilinear lines. Mass is magnetized so, that the vertical component of a vector of intensity magnetization is linear function of applicate. Shows how the heterogeneity of magnetization affects the external magnetic field.

**Keywords:** magnetometry, directproblem magnetometry, magnetized body, inhomogeneously magnetization.