Радиофизика и радиоастрономия, 2010, т. 15, №2, с. 199-206

УДК 519.6:537.86

О добротности собственных колебаний магнитного типа TE_{0nq} открытого резонатора со сферическими зеркалами

Ю. В. Свищёв

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины,
ул. Ак. Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина
E-mail: svishchov@ire.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 17 августа 2009 г.

Представлены результаты численного эксперимента по исследованию свойств аксиально-симметричных собственных колебаний магнитного типа открытого резонатора со сферическими зеркалами. Обнаружен и исследован эффект резонансного падения (повышения) на один-два порядка дифракционной добротности основных типов колебаний при изменении геометрических параметров резонатора. Доказано существование точек вырождения собственных колебаний в комплексной плоскости.

Резкое падение добротности собственных колебаний в открытых резонаторах (ОР) со сферическими зеркалами наблюдалось экспериментально, в том числе для конфокальных ОР [1-3], и объяснялось в [2] на основе выводов работ [4, 5] как результат взаимодействия колебаний, описываемых асимптотической теорией [6]. Причиной такого взаимодействия, согласно [2], являются несовершенство процесса изготовления ОР, различные малые неоднородности, обязательно присутствующие в экспериментальной установке.

Однако развитая в [4, 5] теория закрытого цилиндрического резонатора непригодна для ОР, поскольку в ней используется свойство полноты собственных колебаний закрытого идеального резонатора, которое не выполняется для открытого резонатора. Кроме того, асимптотическая теория [6] ОР описывает только часть спектра собственных колебаний, коротковолновые колебания типа “прыгающего мячика”.

В работах [7-9] для ОР с цилиндрическими зеркалами и в работах [10,11] для ОР со сферическими зеркалами на основе математически строгой спектральной теории доказано, что эффект резкого увеличения дифракционных потерь собственных колебаний конфокального резонатора (для которого асимптотическая теория предсказывает максимальную добротность) присущ симметричным ОР и не связан с точностью их изготовления. Показано, что существуют значения геометрических параметров ОР, малые отклонения от которых вызывают резонансную перестройку спектральных характеристик резонатора, резко изменяется структура резонансных полей и их добротность. В окрестности таких значений параметров характеристический определитель резонатора как функция этих величин и частоты совпадает с неоднородной невырожденной квадратичной формой, что является следствием наличия изолированной морсовской критической точки в комплексной области значений частоты и параметров.

В настоящей работе проведен расчет собственных частот ОР с целью определения геометрических параметров резонатора, которые являются оптимальными (в смысле получения максимального значения добротности). В частности, в работе показано, что падение добротности собственных колебаний никак не связано с “конфокальной геометрией” резонатора, а наблюдается и при других значениях геометрических параметров; эффект междутиповой связи колебаний может приводить не только к падению добротности колебаний, но и, что более важно, к ее росту в окрестности некоторых значений геометрических параметров ОР.

В работе изучаются аксиально-симметричные собственные колебания магнитного типа, $E_r = 0$, $H_r \neq 0$, (см. [12]), когда резонансная длина волны соизмерима с размерами ОР.

1. Постановка задачи и метод решения

На рис. 1 изображен ОР, образованный двумя одинаковыми соосными идеально проводящими сферическими зеркалами. Он характеризуется радиусами кривизны зеркал a, угловыми размерами зеркал φ и расстоянием L между зеркалами.

Аксиально-симметричные поля магнитного типа описываются магнитным потенциалом Дебая v, электрический потенциал Дебая u при этом равен нулю (электромагнитное поле имеет отличные от нуля три компоненты E_φ, H_r, H_θ). С учетом этого математическая формулировка задачи о спектре собственных электромагнитных колебаний ОР состоит в следующем. Требуется определить значения спектрального параметра $k = 2\pi/\lambda$ (λ – длина волны), при которых существуют нетривиальные решения уравнения Гельмгольца $\Delta v + k^2 v = 0$, обеспечивающие выполнение граничных условий на зеркалах (равенство нулю тангенциальных составляющих электрического поля), условия конечности энергии электромагнитного поля в любой ограниченной области пространства, а также удовлетворяющие условию излучения на бесконечности (аналог условия Рейхардта в двумерном случае).

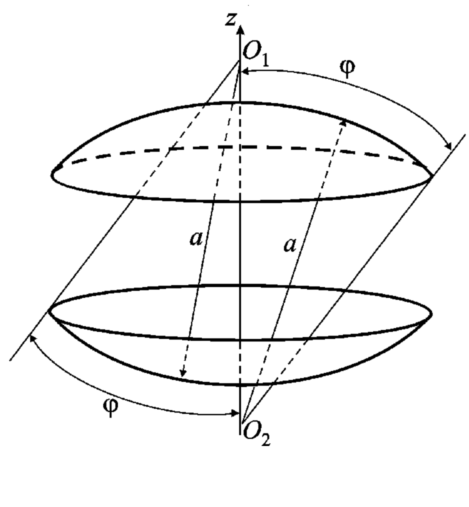


Рис. 1. *Открытый резонатор*

В работе [11] показано, что данная спектральная задача эквивалентна задаче на характеристические числа матричной оператор-функции вида $H(k) = I - A(k)$, доказана дискретность и конечная кратность спектра собственных частот, построен математически обоснованный алгоритм вычисления спектра. Следует отметить, что выбранная электродинамическая модель и алгоритм решения допускают изменение в широких пределах как геометрических параметров ОР, так и длины волны электромагнитного поля.

2. Анализ численных результатов

Для классификации собственных колебаний изучались распределения линий равных значений $|E_\varphi|$ (единственной отличной от нуля компоненты электрического поля) внутри ОР. Типу колебаний приписывается (см. [11, 12]) символ TE_{0nq}, который означает, что электрическое поле E_φ имеет q пучностей по оси ОР и n нулей в перпендикулярном направлении (по радиусу в цилиндрической системе координат). Такая классификация аналогична классификации, используемой в асимптотических моделях ОР. Однако эти модели позволяют описать только часть спектра ОР, соответствующую колебаниям типа “прыгающего мячика”. В принятых обозначениях это колебания типа TE_{0nq}, у которых $q \gg n$. Ранее (см. [11]) было установлено, что существуют, например, колебания TE_{021} и TE_{031}, которые не могут быть описаны в рамках асимптотических моделей. Эти колебания в определенных ситуациях могут эффективно “взаимодействовать” с колебаниями типа TE_{003} и TE_{013}, что приводит к резкому возрастанию дифракционных потерь последних.

Проведенные расчеты показали, что собственные частоты ОР можно условно разбить на группы. Будем считать, что группу образуют колебания с индексами, удовлетворяющими соотношению $n+q=\text{const}$. Например, одну группу составляют колебания TE_{003}, TE_{021}, TE_{012}. Собственные частоты колебаний, входящих в группу, близки друг к другу (если не учитывать значения геометрических параметров ОР, при которых не имеет смысла говорить о колебаниях TE_{0nq}, $n \geq q$, ввиду их низкой добротности). Собственные частоты колебаний разных групп разнесены по частоте на большее расстояние, чем собственные частоты колебаний, входящие в одну группу. Характерное поведение собственных частот и добротностей отдельных типов колебаний, как правило, объясняется в рамках одной группы.

В качестве области изменения геометрических параметров ОР была взята область, которая описывается соотношениями $0<\varphi<\arccos(1-0.5L/a)$, $0.5<L/a<2$. При $\varphi=\arccos(1-0.5L/a)$ ОР становится закрытым. Значение $L/a=1$ соответствует конфокальному ОР; значение $L/a=2$ – концентрическому. При $L/a=2$ и $\varphi\to 90°$ ОР переходит в сферический объемный резонатор. Приведенные далее результаты стали возможными благодаря, в частности, тому, что спектральные характеристики ОР рассматривались как функции не одной переменной (L или φ), а как функции совокупности двух переменных L и φ.

На рис. 2 и рис. 3 показаны зависимости действительных частей собственных частот $\text{Re}(ka)$ и логарифмов добротностей Q $\left(Q=-0.5\,\text{Re}(ka)/\text{Im}(ka)\right)$ собственных колебаний TE_{004} и TE_{005} от относительного расстояния между зеркалами L/a и углового размера зеркал φ. Можно указать интервалы изменения L/a такие, что если L/a принадлежит этим интервалам, то с увеличением размера зеркал φ добротность собственных колебаний монотонно возрастает и становится равной ∞, когда ОР переходит в закрытый резонатор. То, что добротность ОР стремится к ∞ при переходе к закрытому резонатору, объясняется неучетом омических потерь в зеркалах резонатора. Вне этих интервалов можно указать размеры резонатора $\left(L, \varphi_{\max}(L)\right)$, при которых достигается локальный максимум добротности. То есть можно говорить об эффекте резонансного повышения добротности ОР при изменении углового размера зеркал резонатора. Рост добротности с увеличением размера зеркал происходит до некоторого значения $Q_{\max}(L)=\max\limits_{\varphi} Q(L,\varphi)$; дальнейшее уве-

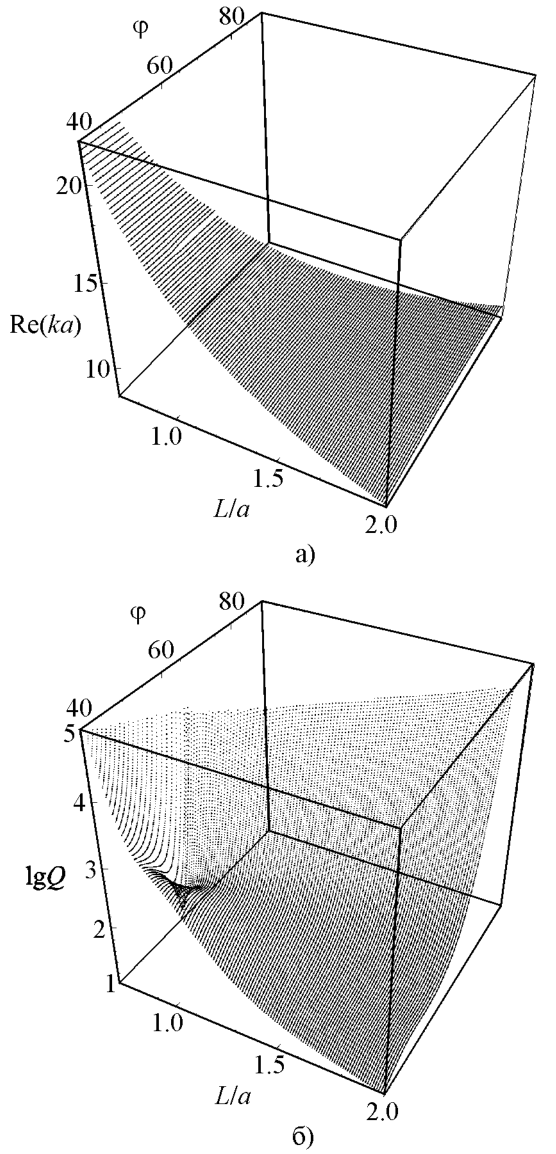
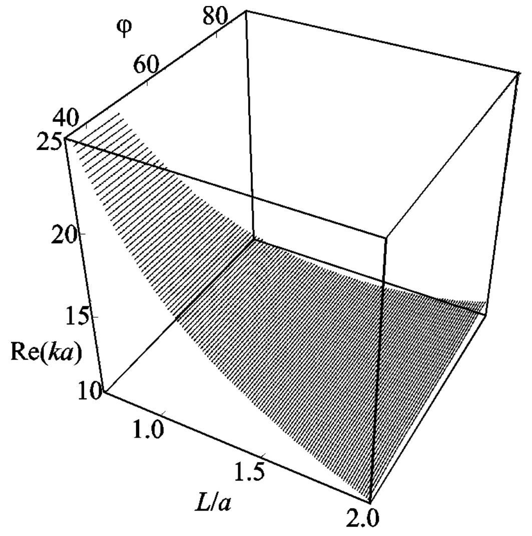
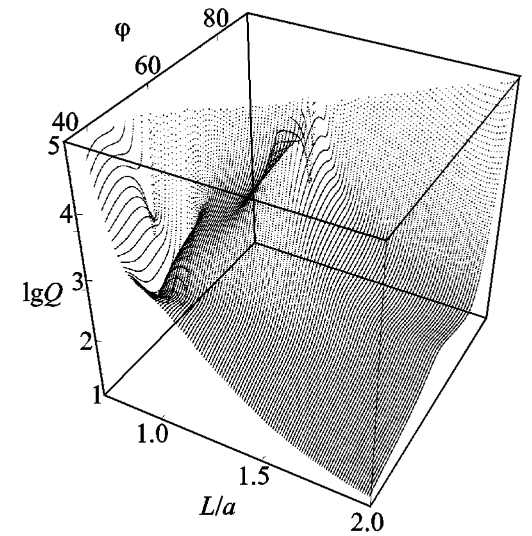


Рис. 2. *Зависимость реальной части собственной частоты (а) и логарифма добротности (б) собственного колебания TE_{004} от углового размера зеркал φ и относительного расстояния между зеркалами L/a*



а)



б)

Рис. 3. *Зависимость реальной части собственной частоты (а) и логарифма добротности (б) собственного колебания TE_{005} от углового размера зеркал φ и относительного расстояния между зеркалами L/a*

личение размера зеркал, казалось бы, уже не должно приводить к падению добротности (размер зеркал превосходит размер пятна поля). Однако, как видно на рис. 2 и рис. 3, дальнейшее увеличение размера зеркал приводит к локальному падению добротности, т. е. можно говорить об эффекте резонансного падения добротности ОР.

Аналогичный вывод справедлив, когда изучается зависимость добротности собственных колебаний от расстояния между зеркалами при фиксированном размере зеркал.

Если рассматривать добротность собственных колебаний как функцию двух переменных, то можно утверждать, что существуют локальные минимумы добротности по двум параметрам $Q_{\min} = \min\limits_{L} Q_{\min}(L) = \min\limits_{L,\varphi} Q(L,\varphi)$. Они достигаются в точках, которые обозначим $A_i = (L_i, \varphi_i)$. Локальные максимумы по двум параметрам для рассмотренных колебаний не наблюдались. Однако, например, для колебания TE_{005} имеется максимум, который является функцией двух переменных L и φ, и его значение монотонно изменяется вдоль некоторой кривой $L(\varphi)$ (т. е. максимум не является локальным по двум переменным).

Таким образом, добротность колебаний как функция двух переменных имеет “провал” в точках A_i. Для колебания TE_{004} минимум один и достигается в ОР с размерами $L_1 = 0.955a$, $\varphi_1 = 46.6°$. Для колебания TE_{005} имеются три минимума добротности и они достигаются в ОР с размерами: 1) $L_2 = 0.836a$, $\varphi_2 = 51.1°$; 2) $L_3 = 0.932a$, $\varphi_3 = 49.4°$; 3) $L_4 = 1.335a$, $\varphi_4 = 67.6°$.

3. Природа эффекта падения добротности

В работе [11] исследованы зависимости $\mathrm{Re}(ka)$ и Q для двух частных случаев, а именно:

– зависимость собственных частот и добротностей колебаний от φ конфокального резонатора $(L/a = 1)$;

– зависимость собственных частот и добротностей колебаний от L/a резонатора с угловым размером апертуры $\varphi = 50°$.

Было обнаружено проявление сильной междутиповой связи колебаний, сопровождающееся резким уменьшением добротности высокодобротных и увеличением добротности низкодобротных колебаний; одновременно действительные части собственных частот подвергались резким изменениям. Наблюдался обмен типами колебаний (см. [11]). Были также отмечены многочисленные совпадения

$\mathrm{Re}(ka)$ различных типов колебаний. Однако добротности этих типов колебаний, соответствующих точкам пересечения реальных частей, значительно отличались. Поэтому был сделан вывод о том, что спектр собственных колебаний вырожден лишь частично.

Проведенный в настоящей работе целенаправленный расчет собственных частот позволяет сделать более глубокие выводы.

Результат, который заслуживает особого внимания, состоит в том, что в ОР обнаружены точки вырождения собственных колебаний в комплексной плоскости. Для резонатора с размерами $L = L_1$, $\varphi = \varphi_1$ собственная частота $ka_1 = 16.314 - 0.052i$ соответствует двум колебаниям TE_{004} и TE_{022}. Для резонатора с размерами $L = L_2$, $\varphi = \varphi_2$ собственная частота $ka_2 = 22.190 - 0.008i$ соответствует колебаниям TE_{005} и TE_{041}. Для резонатора с размерами $L = L_3$, $\varphi = \varphi_3$ собственная частота $ka_3 = 20.122 - 0.037i$ соответствует колебаниям TE_{005} и TE_{023}. Для резонатора с размерами $L = L_4$, $\varphi = \varphi_4$ собственная частота $ka_4 = 14.662 - 0.002i$ соответствует колебаниям TE_{005} и TE_{031}. Как видно, приведенные размеры ОР отвечают определенным выше размерам резонатора $A_i(L_i, \varphi_i)$, при которых достигаются минимумы добротности колебаний TE_{004} и TE_{005}. Действительные части собственных частот и добротности соответствующих колебаний в окрестности точек A_1 и A_2, A_3 приведены на рис. 4 и рис. 5.

В монографии [9] (см. §11) приведен довольно простой и интересный пример поведения спектральных характеристик резонаторов в окрестности особой точки соответствующего характеристического определителя. Рассмотрен закрытый круглый цилиндрический резонатор, возбуждаемый извне через круглое отверстие в стенке. Показано, что собственные частоты как функции управляющего параметра являются ветвями двузначной аналитической функции в окрестности морсовской критической точки характеристического определителя.

После аналогичных рассуждений было установлено, что рассматриваемый в настоящей работе более сложный электродинамический объект, каким является трехмерный ОР со сферическими зеркалами, обладает такими же свойствами. Точка (ka_i, L_i, φ_i) является не только корнем характеристического определителя $H(ka, L, \varphi) = \det[I - A(ka, L, \varphi)]$, но и удовлетворяет определению морсовской критической точки $(\chi = ka)$:

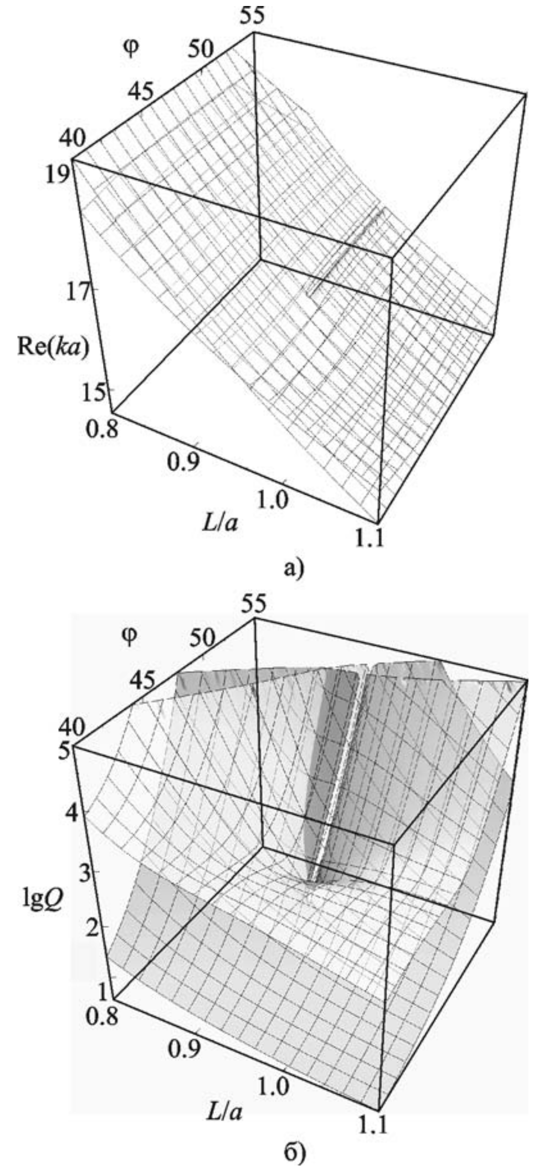
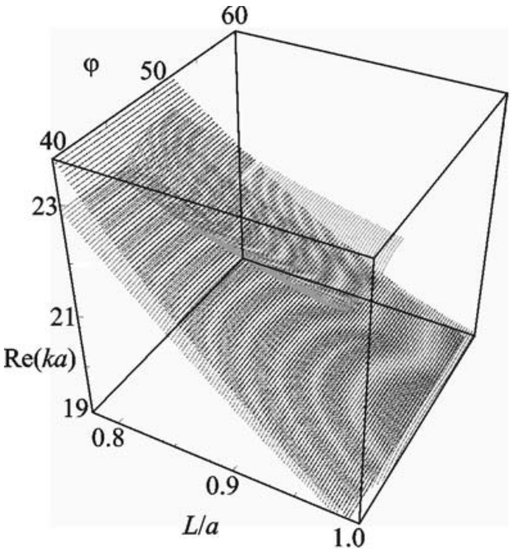
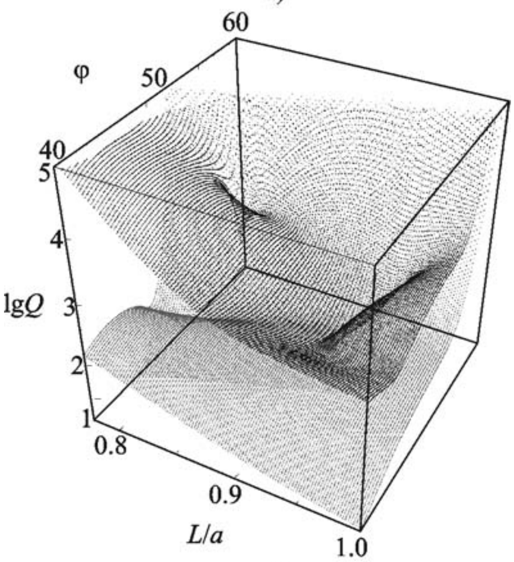


Рис. 4. *Зависимость реальных частей собственных частот (а) и логарифмов добротностей (б) собственных колебаний TE_{004} и TE_{022} от углового размера зеркал φ и относительного расстояния между зеркалами L/a в окрестности их точки вырождения*



а)



б)

Рис. 5. *Зависимость реальных частей собственных частот (а) и логарифмов добротностей (б) собственных колебаний* TE_{005}, TE_{041} *и* TE_{023} *от углового размера зеркал* φ *и относительного расстояния между зеркалами* L/a *в окрестности их точки вырождения*

$$\frac{\partial H}{\partial \chi}=0, \quad \frac{\partial H}{\partial L}=0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \chi^2}\frac{\partial^2 H}{\partial L^2}-\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \chi \partial L}\right)^2 \neq 0.$$

В окрестности морсовской критической точки (χ_i, L_i, φ_i) дисперсионное уравнение (с точностью до членов третьего порядка) может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \chi^2}(\chi-\chi_i)^2+2\frac{\partial^2 H}{\partial \chi \partial L}(\chi-\chi_i)(L-L_i)+$$
$$+\frac{\partial^2 H}{\partial L^2}(L-L_i)^2=0, \qquad (1)$$

где частные производные вычисляются в точке (χ_i, L_i, φ_i). Из квадратного уравнения (1) находятся зависимости двух собственных частот от неспектрального параметра L/a. На рис. 4 и рис. 5 приведены зависимости двух собственных частот, полученные на основе точного дисперсионного уравнения (приближением которого в окрестности точки (ka_i, L_i, φ_i) является уравнение (1)). Если ввести в рассмотрение соответствующую риманову поверхность параметров L/a и φ, то собственная частота является обычной двузначной аналитической функцией. С этой точки зрения собственные частоты при изменении L/a и φ непрерывно переходят друг в друга и представляют тем самым один и тот же объект.

С практической точки зрения важно знать ответ на следующий вопрос. Каким колебаниям отвечают собственные частоты в окрестности точки (ka_i, L_i, φ_i)? С целью дать ответ на этот вопрос введем окрестность точки (L_i, φ_i) следующим образом. Проведем криволинейный отрезок через точку (L_i, φ_i). При $L<L_i$ этот отрезок кривой совпадает с отрезком, где равны $\mathrm{Im}(ka)$ двух собственных частот. При $L>L_i$ этот отрезок кривой совпадает с отрезком, где равны $\mathrm{Re}(ka)$ двух собственных частот. Вводимая окрестность – это окрестность, содержащая криволинейный отрезок, в которой добротность колебаний не превосходит некоторого условного значения. В указанной окрестности точки (L_i, φ_i) наблюдаются гибридные типы колебаний, пространственное распределение поля которых имеет черты входящих во взаимодействие колебаний (см. [11]). Добротность основных типов колебаний TE_{004} и TE_{005} (точнее, соответствующих гибридных колебаний) в точке (L_i, φ_i) гораздо ниже (на один–два порядка), чем вне указанной окрестности. Поэтому эту окрестность следует, видимо, назвать областью запрещенных параметров ОР для данного колебания. Если говорить о колебаниях TE_{005}, TE_{041}, TE_{023}, то область запрещенных параметров расширяется за счет того, что две точки вырождения расположены недалеко друг от друга. Соответственно, пространственное распределение гибридных типов колебаний в области пересечения двух независимых областей будет носить черты четырех колебаний.

Вне указанной окрестности можно однозначно идентифицировать типы колебаний. При этом для $L < L_i$ при переходе через эту окрестность наблюдается обмен типами колебаний, зависимости действительных частей двух собственных частот не пересекаются и имеют вид графика Вина. При $L > L_i$ обмен типами колебаний не наблюдается (происходит только гибридизация колебаний), зависимости действительных частей двух собственных частот пересекаются.

Интересно отметить, что асимптотическая теория предсказывает максимальную добротность колебаний для конфокального резонатора. Но, как показывают расчеты, максимум добротности колебания может достигаться для различных значений геометрических параметров резонатора. Например, колебание TE_{005} имеет максимальную добротность для значения $L/a \approx 1.4$ (вблизи точки вырождения A_4).

4. Выводы

Обнаружен и детально исследован эффект резонансного падения (повышения) добротности (как функции геометрических параметров резонатора) собственных колебаний в ОР.

Доказано существование точек вырождения собственных колебаний в ОР.

Установлено, что в основе физической природы резонансного падения (повышения) добротности собственных колебаний ОР лежит эффект междутиповой связи колебаний.

Показано, что идентификация типов собственных колебаний в ОР имеет смысл лишь относительно конкретных значений (или диапазонов изменения) частоты и геометрических параметров резонатора.

Приведенные результаты могут служить ориентиром для определения размеров резонатора, поддерживающего высокодобротные колебания.

Литература

1. Валитов Р. А., Дюбко С. Ф., Камышан В. В. и др. Техника субмиллиметровых волн. – М.: Сов. Радио, 1969. – 480 с.
2. Богомолов Г. Д., Маненков А. Б. Взаимодействие колебаний в открытом резонаторе со сферическими зеркалами // Изв. вузов. Радиофизика. – 1971. – Т. 14, №5. – С. 748-753.
3. Дюбко С. Ф., Камышан В. В., Шейко В. П. К вопросу о неустойчивости конфокальных систем // ЖТФ. – 1965. – Т. 35, №10. – С. 1806-1816.
4. Штейншлейгер В. Б. Явления в электромагнитных резонаторах вблизи точек совпадения собственных частот // Докл. АН СССР. – 1949. – Т. 65, №5. – С. 699-703.
5. Штейншлейгер В. Б. Явления взаимодействия волн в электромагнитных резонаторах. – М.: Оборонизд, 1955. – 114 с.
6. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. – М.: Сов. радио, 1966. – 476 с.
7. Мележик П. Н., Поединчук А. Е., Тучкин Ю. А., Шестопалов В. П. Особенности спектральных характеристик двухзеркального открытого резонатора // Докл. АН УССР. – 1987. – №8. – С. 53-56.
8. Мележик П. Н., Поединчук А. Е., Тучкин Ю. А., Шестопалов В. П. Об аналитической природе явления междутиповой связи собственных колебаний // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 300, №6. – С. 1356-1359.
9. Шестопалов В. П. Морсовские критические точки дисперсионных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 240 с.
10. Свищёв Ю. В., Тучкин Ю. А., Шестопалов В. П. О резонансной перестройке колебаний в открытом резонаторе со сферическими зеркалами // Докл. АН СССР. – 1990. – Т. 312, №5. – С. 1111-1114.
11. Ю. В. Свищёв. Аксиально-симметричные собственные колебания магнитного типа в открытом резонаторе со сферическими зеркалами // Изв. вузов. Радиофизика. – 2006. – Т. 49, №9. – С. 787-798.
12. Ю. В. Свищёв. О классификации собственных колебаний открытого резонатора со сферическими зеркалами // Изв вузов. Радиофизика. – 2008. – Т. 51, №12. – С. 1051-1061.

Щодо добротності власних коливань магнітного типу TE_{0nq} відкритого резонатора зі сферичними дзеркалами

Ю. В. Свіщов

Репрезентовано результати чисельного експерименту стосовно дослідження властивостей аксіально-симетричних власних коливань магнітного типу відкритого резонатора зі сферичними дзеркалами. Знайдено та досліджено ефект спаду (підвищення) на один-два порядка дифракційної добротності основних типів коливань внаслідок зміни геометричних параметрів резонатора. Доведено існування точок виродження власних коливань у комплексній площині.

On Quality of Magnetic TE_{0nq} Eigenmodes of an Open Resonator with Spherical Mirrors

Y. V. Svishchov

The behavior of axially-symmetric magnetic eigenmodes of an open resonator with spherical mirrors has been numerically investigated. The effect of diffraction quality increase (decrease) from one to two orders in magnitude by varying geometrical parameters of the resonator has been found and investigated. Degeneration points of resonator eigenmodes have been revealed in the complex plane.