

УДК 539.3:4.013

# ЗАДАЧА УСТАЛЕНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТРИВИМІРНОГО КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ТІЛА З КОМПЛАНАРНИМИ ТРІЩИНАМИ

І. Я. ЖБАДИНСЬКИЙ\*, В. В. МИХАСЬКІВ\*, О. І. СТЕПАНЮК\*\*

\*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

\*\*Львівська державна академія ветеринарної медицини

Одержано 17.11.2003

Методом граничних інтегральних рівнянь розв'язано симетричну задачу взаємодії плоских тріщин, які навантажені гармонічними за часом зусиллями та розташовані по один бік від поверхні розмежування ідеально з'єднаних пружних півпросторів. Чисельні результати наведені для випадку тривимірного хвильового поля, що зумовлене взаємодією міжматеріальної поверхні та двох кругових тріщин, які знаходяться під впливом внутрішнього гармонічного тиску з постійною амплітудою. Для різних співвідношень між механічними константами складових частин тіла, які забезпечують відсутність приповерхневих хвиль (нулі функції Стоунлі), дано розподіл коефіцієнтів інтенсивності напружень вздовж контурів дефектів в області низькочастотних і резонансних хвильових чисел.

Методом граничних інтегральних рівнянь решена симетрична задача о взаимодействии плоских трещин, которые нагружены гармоническими во времени нагрузками и расположены по одну сторону от поверхности раздела идеально соединенных упругих полупространств. Численные результаты приведены для случая трехмерного волнового поля, обусловленного взаимодействием межматериальной поверхности и двух круговых трещин, находящихся под воздействием внутреннего гармонического давления с постоянной амплитудой. Для разных соотношений между механическими константами составных частей тела, обеспечивающих отсутствие приповерхностных волн (нули функции Стоунли), приведено распределение коэффициентов интенсивности напряжений вдоль контуров дефектов в области низкочастотных и резонансных волновых чисел.

A symmetrical problem of interaction of the plane cracks loaded by time harmonic stresses and disposed laterally on one side of the interface of the perfectly connected elastic semispaces is solved by the method of boundary integral equations. Numerical results for the case of a three-dimensional wave field conditioned by interaction of the intermaterial surface and two circular cracks undergoing action of the inner harmonic pressure having a constant amplitude are presented. At various ratios between the mechanical constants of the body components ensuring the absence of the near-surface waves (the Stoneley function's zeros), the distributions of the intensity stress coefficients along the defect outlines are presented for regions of the low-frequency and resonant wave numbers.

## ВСТУП

Актуальність теоретичного дослідження поведінки тріщин у кусково-однорідних тілах за умови поширення пружних хвиль обґрунтовується можливістю з'ясування механізму динамічного руйнування структурованих матеріалів (волоконно підкріплених композитів, шаруватих гірських порід тощо). Досі у літературі розглядалися випадки динамічно навантаженого біматеріального тіла з ізольованою тріщиною у двовимірній [1] і тривимірній [2] постановках задач. Здійснене у цих роботах урахування динамічної взаємодії тріщин як з міжматеріальною поверхнею, так і між собою, дозволило більш адекватно змодельовати реальну ситуацію наявності в матеріалі конгломерату мікродефектів такого типу, а також передбачити характерне їх накопичення на передруйнівній стадії. Слід відзначити, що інерційні взаємні впливи тріщин у тривимірному однорідному тілі достатньо повно розглянуті у роботах [3, 4].

У даній роботі для дослідження коливань у кусково-однорідному тілі з тріщинами застосова-

но метод граничних інтегральних рівнянь, основи якого стосовно динамічної механіки руйнування висвітлено в [3, 5]. Метод передбачає зведення хвильової задачі до визначення функцій розкриттів тріщин уздовж двовимірних поверхонь локалізації дефектів у частотній області. Ефективність запропонованого підходу забезпечується регулярністю в граничних інтегральних рівняннях складових, які описують пряму взаємодію тріщин та взаємодію тріщин внаслідок відбиття хвиль від міжматеріальної поверхні. Це дозволяє залучити до аналізу хвильової картини чисельні процедури.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ У ГРАНИЧНО-ІНТЕГРАЛЬНІЙ ФОРМІ

Розглянемо пружні півпростори  $A$  і  $B$  з густинами  $\rho^A$  і  $\rho^B$ , модулями зсуву  $G^A$  і  $G^B$  та коефіцієнтами Пуассона  $\nu^A$  і  $\nu^B$  відповідно, які перебувають в умовах ідеального контакту. Нехай у півпросторі  $A$  перпендикулярно до міжматеріальної поверхні розташовано  $M$  плоских тріщин по областях  $S^{(n)}$  ( $n = \overline{1, M}$ ), на протилежні поверхні яких діють са-

мозрівноважені нормальні гармонічні навантаження з відомими амплітудами  $N^{(n)}$  ( $n = \overline{1, M}$ ) і циклічною частотою  $\omega$ . Задання навантажень на поверхнях тріщин відповідає також сингулярній частині розв'язку задачі дифракції пружної хвилі на тріщинах, що викликає в місцях локалізації дефектів у біматеріалі зусилля протилежного знаку.

Внаслідок усталеного характеру деформування тіла з тріщинами часову координату вилучаємо з аналізу шляхом введення у розв'язок відповідного експоненціального множника. В результаті переходимо до відшукування амплітудних значень шуканих величин. Пов'яжемо з  $n$ -ою тріщиною систему координат  $O^{(n)}x_1^{(n)}x_2^{(n)}x_3^{(n)}$ , початок  $O^{(n)}$  якої збігається з геометричним центром області  $S^{(n)}$ , а вісь  $O^{(n)}x_3^{(n)}$  спрямована перпендикулярно до площини розташування тріщини/тріщин. Тоді за умов принципу суперпозиції напруження у цій площині в матеріалі  $A$  матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_{j3}(\vec{x}^{(n)}) &= 0, \quad j = 1, 2, \\ \sigma_{33}(\vec{x}^{(n)}) &= \sum_{k=1}^M \sigma_{33k}(\vec{x}^{(kn)}), \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\vec{x}^{(n)}(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$  – радіус-вектор точки визначення напружень у  $n$ -ій системі координат;  $\vec{x}^{(kn)}(x_1^{(kn)}, x_2^{(kn)})$  – радіус-вектор цієї ж точки у  $k$ -ій системі координат, причому

$$\vec{x}^{(kn)} = \overrightarrow{O^{(k)}O^{(n)}} + \vec{x}^{(n)};$$

$\sigma_{33k}$  – складова напружень від розкриття поверхонь  $k$ -ої тріщини. Остання з урахуванням умов контакту на міжматеріальній поверхні (рівності компонент переміщень та зусиль при підході до неї зі сторони кожного з матеріалів) подається інтегрально [2]:

$$\sigma_{33k}(\vec{x}^{(k)}) = -\frac{4G^A}{\omega_{2A}^2} \iint_{S^{(k)}} \Delta u^{(k)}(\xi^{(k)}) \times \quad (2)$$

$$\times [R_{ho}(|\vec{x}^{(k)} - \vec{\xi}^{(k)}|, \omega) R_{bi}(\vec{x}^{(k)}, \vec{\xi}^{(k)}, \omega)] dS_{\xi}.$$

У рівнянні (2)  $\vec{\xi}^{(k)}(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)})$  – радіус-вектор точки інтегрування у  $k$ -ій системі координат;  $|\vec{x}^{(k)} - \vec{\xi}^{(k)}|$  – відстань між точками  $\vec{x}^{(k)}$  і  $\vec{\xi}^{(k)}$ ;  $\Delta u^{(k)} = [u_3^{(k)-} - u_3^{(k)+}]/(4\pi)$  – стрибок нормальних переміщень протилежних поверхонь  $k$ -ої тріщини;

ядра  $R_{ho}, R_{bi}$  мають вигляд

$$\begin{aligned} R_{ho}(r, \omega) &= \left[ 9 - 9i\omega_{1A}r + (\omega_{2A}^2 - 5\omega_{1A}^2)r^2 + \right. \\ &+ i\omega_{1A}(2\omega_{1A}^2 - \omega_{2A}^2)r^3 + \\ &+ \left. \frac{1}{4}(2\omega_{1A}^2 - \omega_{2A}^2)^2r^4 \right] \frac{\exp(i\omega_{1A}r)}{r^5} - \\ &- [9 - 9i\omega_{2A}r - 4\omega_{2A}^2r^2 + i\omega_{2A}^3r^3] \times \\ &\times \frac{\exp(i\omega_{2A}r)}{r^5}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{bi}(\vec{x}^{(k)}, \vec{\xi}^{(k)}, \omega) &= R_{ho}(|\vec{x}^{(k)} - \vec{\xi}^{(k)}|, \omega) + \\ &+ 2 \int_0^{\infty} \frac{\tau}{F_{St}(\tau)} \left[ \Omega_1(|x_1^{(k)} - \xi_1^{(k)}|, \omega, \tau) \times \right. \\ &\times \exp[-(2d^{(k)} - x_2^{(k)} - \xi_2^{(k)})V_1^A(\tau)] + \\ &+ \Omega_2(|x_1^{(k)} - \xi_1^{(k)}|, \omega, \tau) \times \\ &\times \exp[-(2d^{(k)} - x_2^{(k)} - \xi_2^{(k)})V_2^A(\tau)] - \\ &- \Omega_3(|x_1^{(k)} - \xi_1^{(k)}|, \omega, \tau) \times \\ &\times \left\{ \exp[-(d^{(k)} - x_2^{(k)})V_2^A(\tau) - \right. \\ &- (d^{(k)} - \xi_2^{(k)})V_1^A(\tau)] + \\ &+ \exp[-(d^{(k)} - x_2^{(k)})V_1^A(\tau) - \\ &\left. - (d - \xi_2^{(k)})V_2^A(\tau)] \right\} d\tau; \end{aligned} \quad (3)$$

$\omega_{1A} = \omega/c_1^A$  і  $\omega_{2A} = \omega/c_2^A$  – хвильові числа;  $c_1^A, c_2^A$  – швидкості поширення поздовжніх та поперечних хвиль у матеріалі  $A$ ;

$$\vec{x}^{(k)} = \vec{x}^{(k)}(x_1^{(k)}, 2d^{(k)} - x_2^{(k)});$$

$d^{(k)}$  – відстань від точки  $O^{(k)}$  до міжматеріальної

поверхні (глибина залягання  $k$ -ої тріщини);

$$V_l^A(\tau) = \sqrt{\tau^2 - \omega_{lA}^2} = \begin{cases} \sqrt{\tau^2 - \omega_{lA}^2}, & \text{якщо } \tau \geq \omega_{lA}, \\ -i \sqrt{\omega_{lA}^2 - \tau^2}, & \text{якщо } \tau < \omega_{lA}; \end{cases} \\ l = 1, 2;$$

$F_{St}(\tau)$  – відома функція Стоунлі [6];  $\Omega_j$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) – відомі функції [2]. Підставивши співвідношення (2) у вирази (1) з подальшим задоволенням умов дії навантажень на поверхнях кожної з тріщин, приходимо до системи  $M$  граничних інтегральних рівнянь відносно функцій розкриття тріщин  $\Delta u^{(n)}$  ( $n = \overline{1, M}$ ), яка має вигляд

$$\sum_{k=1}^M \iint_{S^{(k)}} \Delta u^{(k)}(\xi^{(k)}) \left[ R_{ho}(|\vec{x}^{(kn)} - \vec{\xi}^{(kn)}|, \omega) - R_{bi}(\vec{x}^{(kn)}, \vec{\xi}^{(kn)}, \omega) \right] dS_{\xi} = \\ = \frac{\omega_{2A}^2}{4G^A} N^{(n)}(\vec{x}^{(n)}), \quad (4)$$

$$\vec{x}^{(n)} \in S^{(n)}, \quad n = \overline{1, M}.$$

Ядро  $R_{ho}$  описує пряму (рафіновану) взаємодію тріщин і збігається з ядром інтегральних рівнянь для системи компланарних тріщин в однорідному тілі з такими самими механічними константами, як в матеріалі  $A$ . Ядро  $R_{bi}$ , регулярне у випадку  $F_{St} \neq 0$ , описує взаємодію тріщин внаслідок відбиття хвилі від міжматеріальної поверхні.

## 2. ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Рівняння (4) є гіперсингулярними, що впливає з асимптотичного розвою ядра  $R_{ho}$  в околі полюса  $\vec{\xi}^{(n)}$  при  $k = n$ :

$$R_{ho}(|\vec{x}^{(n)} - \vec{\xi}^{(n)}|, \omega) = \frac{\omega_{2A}^2}{4(1 - \nu^A)} \times \\ \times \left[ \frac{1}{|\vec{x}^{(n)} - \vec{\xi}^{(n)}|^3} + \frac{A \omega_{2A}^2}{|\vec{x}^{(n)} - \vec{\xi}^{(n)}|} \right] + O(1), \quad (5)$$

де

$$A = \frac{7 - 12\nu^A + 8(\nu^A)^2}{8(1 - \nu^A)}.$$

Скориставшись формулою (5), проведемо тотожне перетворення системи граничних інтегральних рівнянь (4) і виділимо інтеграли, які містять особливість:

$$\iint_{S^{(n)}} \frac{\Delta u^{(n)}(\xi^{(n)})}{|\vec{x}^{(n)} - \vec{\xi}^{(n)}|^3} dS_{\xi} + \\ + A \omega_{2A}^2 \iint_{S^{(n)}} \frac{\Delta u^{(n)}(\xi^{(n)})}{|\vec{x}^{(n)} - \vec{\xi}^{(n)}|} dS_{\xi} + \\ + \iint_{S^{(n)}} \Delta u^{(n)}(\xi^{(n)}) \times \\ \times \left[ \frac{4(1 - \nu^A)}{\omega_{2A}^2} R_{ho}(|\vec{x}^{(n)} - \vec{\xi}^{(n)}|, \omega) - \frac{1}{|\vec{x}^{(n)} - \vec{\xi}^{(n)}|^3} - \frac{A \omega_{2A}^2}{|\vec{x}^{(n)} - \vec{\xi}^{(n)}|} \right] dS_{\xi} + \\ + \frac{4(1 - \nu^A)}{\omega_{2A}^2} \sum_{k=1}^M \iint_{S^{(k)}} \Delta u^{(k)}(\xi^{(k)}) \times \\ \times \left[ (1 - \delta_{kn}) R_{ho}(|\vec{x}^{(kn)} - \vec{\xi}^{(k)}|, \omega) - R_{bi}(\vec{x}^{(kn)}, \vec{\xi}^{(k)}, \omega) \right] dS_{\xi} = \\ = \frac{1 - \nu^A}{G^A} N^{(n)}(\vec{x}^{(n)}),$$

$$\vec{x}^{(n)} \in S^{(n)}, \quad n = \overline{1, M}.$$

Перші два інтеграли у співвідношеннях (6) мають особливість ньютонівського (статичного) потенціалу. Тому до них застосовано відому методику регуляризації [7], яка для кругових тріщин передбачає представлення:

$$\Delta u^{(n)}(\vec{\xi}^{(n)}) = \\ = \sqrt{(a^{(n)})^2 - (\xi_1^{(n)})^2 - (\xi_2^{(n)})^2} \alpha^{(n)}(\vec{\xi}^{(n)}), \quad (7) \\ n = \overline{1, M},$$

де  $a^{(n)}$  – радіус  $n$ -го дефекту;  $\alpha^{(n)}$  – невідомі функції. Співвідношення (7) узгоджується з фізичним змістом функцій  $\Delta u^{(n)}$ , які є стрибками переміщення протилежних поверхонь тріщин.

Дискретизація рівнянь (6) базується на розбитті областей  $S^{(n)}$  ( $n = \overline{1, M}$ ) на граничні елементи, в межах яких припускається постійність шуканих

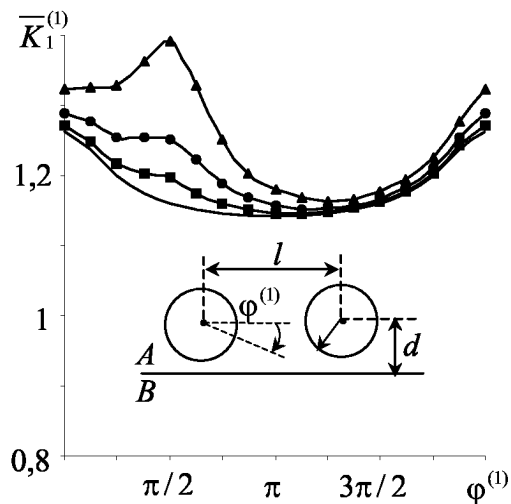


Рис. 1. Відносна амплітуда КІН відриву для першої тріщини біматеріалі з  $G < 1$  при низькочастотних коливаннях

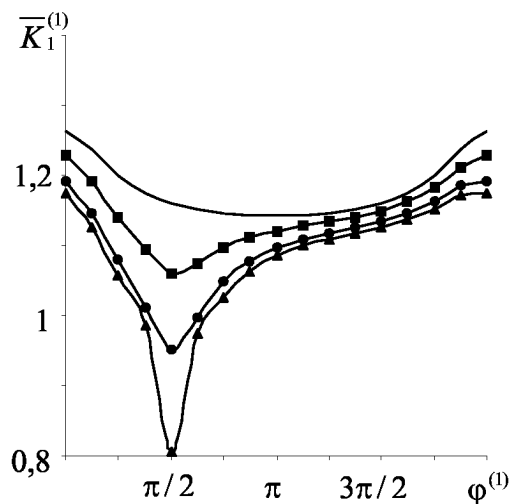


Рис. 2. Відносна амплітуда КІН відриву для першої тріщини біматеріалі з  $G > 1$  при низькочастотних коливаннях

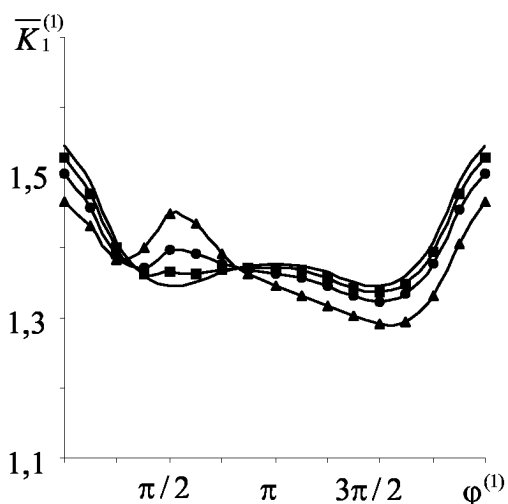


Рис. 3. Відносна амплітуда КІН відриву для першої тріщини біматеріалі з  $G < 1$  при резонансних коливаннях

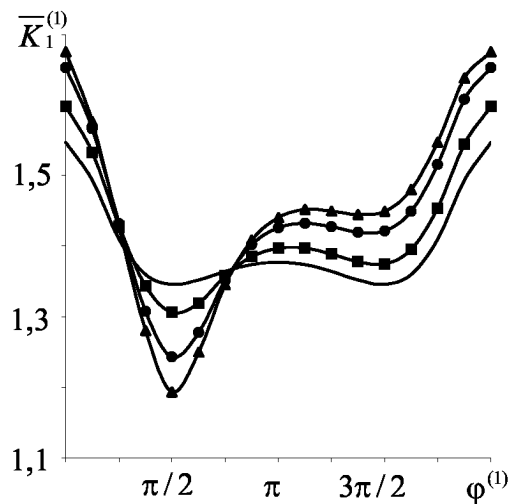


Рис. 4. Відносна амплітуда КІН відриву для першої тріщини біматеріалі з  $G > 1$  при резонансних коливаннях

функцій, а також на задоволенні рівнянь у колокаційних точках посередині введених елементів. У результаті отримуємо систему  $Q \times M$  лінійних алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами відносно значень функцій  $\alpha^{(n)}$  у вузлах дискретизації ( $Q$  – кількість граничних елементів). Через ці функції визначаються коефіцієнти інтенсив-

ності напружень (КІН) поблизу тріщин. Зокрема, КІН розриву  $K_1^{(n)}$  для  $n$ -ої тріщини задається співвідношенням:

$$K_1^{(n)}(\varphi^{(n)}) = -\frac{2G^A \pi \sqrt{\pi a^{(n)}}}{1 - \nu^A} \alpha^{(n)}(\vec{x}^{(n)}), \quad (8)$$

де

$$x_1^{(n)} = a^{(n)} \cos \varphi^{(n)};$$

$$x_2^{(n)} = a^{(n)} \sin \varphi^{(n)};$$

$\varphi^{(n)}$  – кутова координата точки контуру  $n$ -ої тріщини. Внаслідок симетричності задачі щодо розташування тріщин КІН зсуву дорівнюють нулю.

Як приклад розглянемо взаємодію двох тріщин однакового радіуса  $a^{(1)} = a^{(2)} = a$  під гармонічними зусиллями у біматеріалі, які мають постійну амплітуду  $N^{(1)} = N^{(2)} = N_0 = \text{const}$ . Під час обчислень були зафіксовані такі параметри задачі: відстань між центрами тріщин –  $l = 2.4a$ ; відстань між центрами тріщин і міжматеріальною поверхнею –  $d^{(1)} = d^{(2)} = d = 1.1a$ . Густина й коефіцієнти Пуассона складових композиту вважались рівними між собою:  $\rho^A = \rho^B$ ,  $\nu^A = \nu^B = 0.3$ , а неоднорідність тіла забезпечувалась вибором різних модулів зсуву матеріалів з показником  $G = G^B/G^A$ . Нормування КІН відриву здійснювали за допомогою статичного аналога  $K_1^* = 2N_0\sqrt{a\pi}$  для поодинокі кругової тріщини під нормальним зусиллям  $N_0$  у безмежному однорідному тілі.

На рис. 1–4 зображено залежності відносної амплітуди КІН відриву  $\bar{K}_1^{(1)} = |K_1^{(1)}|/K_1^*$  для першої тріщини від кутової координати  $\varphi^{(1)}$  точки на її контурі. Випадку низькочастотних коливань (хвильове число  $\omega_{2A}a = 0.7$ ) відповідають рис. 1 і 2, резонансних (пікових) коливань (хвильове число  $\omega_{2A}a = 1.5$ ) – рис. 3 і 4. Зауважимо, що КІН для другої тріщини визначаються з очевидних умов симетрії. Відлік кута  $\varphi^{(1)}$  проводиться від найближчої до сусідньої тріщини точки контуру у напрямку до міжматеріальної поверхні.

Рис. 1 і 3 відповідають випадку, коли півпростір  $B$  має менший модуль зсуву, ніж півпростір  $A$ :  $G = 0.8$  (крива з квадратами);  $G = 0.5$  (крива з кружечками);  $G = 0.1$  (крива з трикутниками). Рис. 2 і 4 відповідають протилежному характеру відношення між модулями зсуву:  $G = 2.0$  (крива з квадратами);  $G = 5.0$  (крива з кружечками);  $G = 10.0$  (крива з трикутниками).

З метою порівняння на всіх рисунках кривою без маркерів зображено КІН для аналогічних тріщин в однорідному тілі ( $G = 1.0$ ). Зауважимо, що отримані дані для цього випадку узгоджуються з результатами роботи [3].

## ВИСНОВКИ

1. Кутова залежність КІН в околі контуру тріщин, яка обумовлена тривимірністю хвильового поля, має різний характер у низькочастотній області та області резонансних хвильових чисел.

У низькочастотній області (рис. 1, 2) спостерігаються закономірності, притаманні статичному ( $\omega \rightarrow 0$ ) аналогові задачі [8,9]. Так, у біматеріалі при  $G < 1$  (матеріал  $B$  м'якший, ніж матеріал  $A$ ) КІН вздовж усього контуру тріщин перевищує значення КІН для тріщин в однорідному тілі з таким же навантаженням. Для біматеріалу з  $G > 1$  (матеріал  $B$  жорсткіший, ніж матеріал  $A$ ) КІН є меншим за відповідну величину в однорідному тілі. В області резонансних хвильових чисел (рис. 3, 4) зазначені вище закономірності мають місце лише у ближній до міжматеріальної поверхні зоні контуру тріщин. В інших точках контуру залежності для КІН носять протилежний характер. Важливим наслідком цього є підвищення (зниження) динамічної міцності матеріалу з тріщинами при його контакті з іншим матеріалом, який має менший (більший) модуль зсуву. Показово, що зміна параметра  $G$  майже не позначається на межах зон збільшення чи зменшення КІН, у порівнянні з відповідником для тріщин в однорідному тілі. Для контрастніших за властивостями матеріалів усі вказані ефекти проявляються більш виразно.

2. Метод граничних інтегральних рівнянь дозволяє чисельно розв'язувати тривимірні задачі усталеного й нестационарного навантаження кусково-однорідних тіл з тріщинами, розташованими у різних матеріалах. Розвиток даного методу стосовно тривимірних задач динамічного навантаження тіл з тріщинами в роботі [10] дає можливість аналізувати хвильові поля, зумовлені наявністю тріщин зі складною геометрією контурів.

## ПОДЯКИ

Робота виконана за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект 01.07.00133).

1. Sih G. C., Chen E. P. Axisymmetric elastodynamic response from normal and radial impact of layered composites with embedded penny-shaped crack // Int. J. Solids Struct.– 1980.– **16**.– P. 1093–1107.
2. Mykhas'kiv V. V., Stepanyuk O. I. Boundary integral analysis of symmetric problem for an infinite bimaterial solid with an embedded crack // Meccanica.– 2001.– **36**, N 4.– P. 479–495.
3. Kit H. S., Khaj M. V., Mykhas'kiv V. V. Analysis of dynamic stress concentration in an infinite body with parallel penny-shaped cracks by BIEM // Engng Fact. Mech.– 1996.– **55**, N 2.– P. 191–207.

4. *Mykhas'kiv V. V.* Opening-function simulation of the three-dimensional nonstationary interaction of cracks in an elastic body // *Int. Appl. Mech.*– 2001.– **37**, N 1.– P. 75–84.
5. *Zhang Ch., Gross D.* On wave propagation in elastic solids with cracks.– Southampton: Computational Mechanics Publications, 1998.– 248 p.
6. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 283 с.
7. *Кит Г. С., Хай М. В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами.– К.: Наук. думка, 1989.– 283 с.
8. *Хай М. В., Степанюк А. И.* О взаимодействии трещин в кусочно-однородном теле // *Прикл. мех.*– 1992.– **28**, N 12.– С. 46–56.
9. *Chen M. C., Noda N. A., Tang R. J.* Application of finite-part integrals to planar interfacial fracture problems in three-dimensional bimaterials // *Trans. ASME. J. Applied Mech.*– 1999.– **66**, N 4.– P. 885–890.
10. *Sladek J., Sladek V., Mykhas'kiv V. V., Stankevych V. Z.* Application of mapping theory to boundary integral formulation of 3-D dynamic crack problems // *Engng Analys. Bound. Elem.*– 2003.– **27**, N 3.– P. 203–213.