УДК 550.834:622.12

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН ЛЯВА В ПЛАСТАХ СЛОЖНОГО СТРОЕНИЯ

Анциферов В. А.
(УкрНИМИ, НАНУ, г. Донецк, Украина)

У цій роботі пропонується аналітичне розв'язання задачі про поширення хвиль Лява в пластах складної будови, що дозволяє оцінити, яким чином вугільний пласт, що залягає поруч, впливає на структуру і характеристики хвильового поля, формованого в шахтних акустичних експериментах

We propose analytical solution of the problem of Love wave propagation within the seams of complex geology that allows to estimate how the nearby-lying coal seam influences the structure and characteristics of wave field generated in mine acoustic experiments.

Большинство работ, посвященных исследованию процессов распространения сейсмических волн в угленосной толще, рассматривает пласты простого строения, существенно упрощая тем самым анализ волновых полей. Вопрос о механизмах формирования сейсмических колебаний на пластах сложного строения и на сближенных пластах в должной мере практически не рассматривался. В настоящей работе предлагается аналитическое решение задачи о распространении волн Лява в пластах сложного строения, позволяющее оценить, каким образом залегающий рядом угольный пласт влияет на структуру и характеристики волнового поля, формируемого в шахтных акустических экспериментах.

Для уточнения природы волнового поля, образуемого на сближенных пластах, выведем описывающие его аналитические соотношения. Для упрощения ограничимся рассмотрением волн

SH поляризации.

Двухмерная модель среды, которая используется при выводе соотношений, изображена на рис. 1.

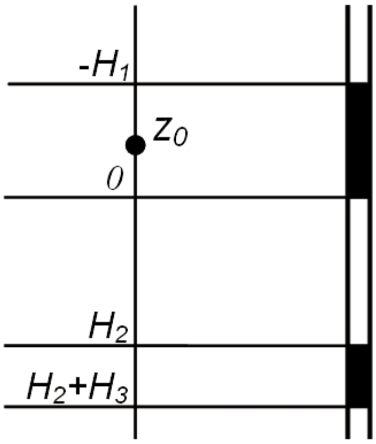

Рис. 1. К выводу аналитического выражения для волнового поля, образуемого на отрабатываемых пластах сложного строения и на сближенных пластах

Как известно для волн Лява, сумму волн всех кратностей, образованную источником внутри отрабатываемого угольного пласта можно (при $Z>Z_0$), представить в виде выражения:

$$\varphi_1 = e^{i(k_{1X}X+k_{1Y}Y)}\begin{pmatrix} e^{ik_{1Z}(Z-Z_0)} + V_{10}e^{ik_{1Z}(Z_0+2H_1+Z)} + \\ + V_{12}e^{ik_{1Z}(-Z_0-Z)} + V_{12}V_{10}e^{ik_{1Z}(Z_0+2H_1-Z)} \end{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty}(V_{10}V_{12})^m e^{2ik_{1Z}mH_1} \qquad (1)$$

где k_{1i} – компоненты волнового числа в угле, V_{12} и V_{10} – коэффициенты отражения на нижней и верхней границе пласта. Тогда, используя (1), поле φ_1^+, распространяющееся в сторону прослоя можно представить в виде:

$$\varphi_1^+ = e^{i(k_{1X}X+k_{1Y}Y)}\left(e^{ik_{1Z}(Z-Z_0)} + V_{10}e^{ik_{1Z}(Z_0+2H_1+Z)}\right)\sum_{m=0}^{\infty}(V_{10}V_{12})^m e^{2ik_{1Z}mH_1} =$$
$$= \frac{e^{i(k_{1X}X+k_{1Y}Y)}\left(e^{ik_{1Z}(Z-Z_0)} + V_{10}e^{ik_{1Z}(Z_0+2H_1+Z)}\right)}{\left(1-V_{10}V_{12}e^{2ik_{1Z}H_1}\right)}$$

Волны преломляются в прослой, образуя в нем совокупность волн, которые можно описать соотношением

$$\varphi_1^+\Big|_0 W_{12}e^{i(k_{2X}X+k_{2Y}Y+k_{2Z}Z)}, \qquad (2)$$

где k_2 – волновое число в прослое, k_{2i} – его компоненты, W_{12} – коэффициент прозрачности границы между верхним пластом и прослоем. При этом волновые числа связаны законом Снеллиуса: $k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2$, где θ_1 – угол её падения на границу пласта, θ_2 – угол её преломления в породу, $\varphi_1^+\Big|_0 = \dfrac{\left(e^{-ik_{1Z}Z_0} + V_{10}e^{ik_{1Z}(Z_0+2H_1)}\right)}{1 - V_{10}V_{12}e^{2ik_{1Z}H_1}}$. В результате многократных отражений от границ с угольными пачками образуется поле волн, которое можно описать соотношением:

$$\varphi_2 = \varphi_1^+\Big|_0 W_{12} \times e^{i(k_{2X}X + k_{2Y}Y)}\left(e^{ik_{2Z}Z} + V_{23}e^{ik_{2Z}(2H_2 - Z)}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\left(V_{21}V_{23}\right)^m e^{2ik_{2Z}mH_2} =$$
$$= \varphi_1^+\Big|_0 W_{12} \times e^{i(k_{2X}X + k_{2Y}Y)}\frac{\left(e^{ik_{2Z}Z} + V_{23}e^{ik_{2Z}(2H_2 - Z)}\right)}{\left(1 - V_{21}V_{23}e^{2ik_{2Z}H_2}\right)} \tag{3}$$

По направлению к нижнему пласту распространяется совокупность волн,

$$\varphi_2^+ = \frac{\varphi_1^+\Big|_0 W_{12} \times e^{i(k_{2X}X + k_{2Y}Y + k_{2Z}Z)}}{1 - V_{21}V_{23}e^{2ik_{1Z}H_2}},$$

которые преломляются в нижний угольный пласт и создают в нем поле

$$\varphi_3 = \varphi_1^+\Big|_0 W_{12} \times \varphi_2^+\Big|_{H_2} W_{23}e^{i(k_{3X}X + k_{3Y}Y)} \times$$
$$\times\left(e^{ik_{3Z}(Z - H_2)} + V_{34}e^{ik_{3Z}(2H_3 - H_2 - Z)}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\left(V_{32}V_{34}\right)^m e^{2ik_{3Z}mH_3} = \tag{4}$$
$$= \varphi_1^+\Big|_0 W_{12} \times \varphi_2^+\Big|_{H_2} W_{34}e^{i(k_{3X}X + k_{3Y}Y)}\frac{\left(e^{ik_{3Z}(H_2 + Z)} + V_{34}e^{ik_{3Z}(2H_3 - H_2 - Z)}\right)}{\left(1 - V_{32}V_{34}e^{2ik_{3Z}H_3}\right)}$$

где $\varphi_2^+\Big|_{H_2} = \dfrac{e^{i(k_{2Z}H_2)}}{1 - V_{21}V_{23}e^{2ik_{1Z}H_2}}$.

Структура φ_3 отличается от структуры φ_1 отсутствием слагаемых в выражении в скобках (второе и четвертое слагаемое в (1)) и присутствием общего множителя $\varphi_\kappa^+\Big|_0 W_{12} \times \varphi_2^+\Big|_{H_2} W_{23}$, который, по сути, учитывает вклады верхнего пласта ($\varphi_1^+\Big|_0$)и прослоя

($\varphi_2^+\big|_{H_2}$), а также влияние границ раздела (W_{12} , W_{23}).

В направлении верхней границы нижнего пласта распространяется совокупность волн

$$\varphi_3^- = \varphi_1^+\big|_0 W_{12} \times \varphi_2^+\big|_{H_2} W_{23} e^{i(k_{3X}X + k_{3Y}Y)} V_{34} e^{ik_{3Z}(2H_3 - H_2 - Z)} \sum_{m=0}^{\infty} \left(V_{32}V_{34}\right)^m e^{2ik_{3Z}mH_3} =$$

$$= \varphi_1^+\big|_0 W_{12} \times \varphi_2^+\big|_{H_2} W_{23} e^{i(k_{3X}X + k_{3Y}Y)} V_{34} \frac{e^{ik_{3Z}(2H_3 - H_2 - Z)}}{\left(1 - V_{32}V_{34}e^{2ik_{3Z}H_3}\right)},$$

которая преломляется в прослой, создавая в нем поле

$$\varphi_2^1 = \varphi_1^+\big|_0 W_{12} \times \varphi_2^+\big|_{H_2} W_{23} \times \varphi_3^-\big|_{H_2} W_{32} e^{i(k_{2X}X + k_{2Y}Y)} \times$$

$$\times \left(e^{ik_{2Z}(H_2 - Z)} + V_{21}e^{ik_{2Z}(H_2 + Z)}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left(V_{21}V_{23}\right)^m e^{2ik_{2Z}mH_2} =$$

$$= \varphi_1^+\big|_0 W_{12} \times \varphi_2^+\big|_{H_2} W_{23} \times \varphi_3^-\big|_{H_2} W_{32} e^{i(k_{2X}X + k_{2Y}Y)} \frac{\left(e^{ik_{2Z}(H_2 - Z)} + V_{21}e^{ik_{2Z}(H_2 + Z)}\right)}{\left(1 - V_{21}V_{23}e^{2ik_{2Z}H_2}\right)} e^{i(k_{2Z}(H_2 - Z))},$$

где $\varphi_3^-\big|_{H_2} = \dfrac{V_{34}e^{ik_{3Z}(2H_3 - 2H_2)}}{1 - V_{32}V_{34}e^{2ik_{3Z}H3}}$.

По направлению к верхнему пласту распространяется как часть поля φ_2^1, описываемая соотношением

$$\varphi_1^+\big|_0 W_{12} \times \varphi_2^+\big|_{H_2} W_{23} \times \varphi_3^-\big|_{H_2} W_{32} e^{i(k_{2X}X + k_{2Y}Y)} e^{ik_{2Z}(H_2 - Z)} \Big/ \left(1 - V_{21}V_{23}e^{2ik_{2Z}H_2}\right)^{e^{i(k_{2Z}(H_2 - Z))}},$$

так и часть поля φ_2, имеющая вид:

$$\varphi_1^+\big|_0 W_{12} \times e^{i(k_{2X}X + k_{2Y}Y)} V_{23} e^{ik_{2Z}(2H_2 - Z)} \Big/ \left(1 - V_{21}V_{23}e^{2ik_{2Z}H_2}\right),$$

что в сумме составляет

$$\varphi_{23}^{1-} = \varphi_1^+\big|_0 W_{12} \times e^{i(k_{2X}X + k_{2Y}Y)} \frac{\left(\varphi_2^+\big|_{H_2} W_{23} \times \varphi_3^-\big|_{H_2} W_{32} e^{ik_{2Z}(H_2 - Z)} + V_{23}e^{ik_{2Z}(2H_2 - Z)}\right)}{\left(1 - V_{21}V_{23}e^{2ik_{2Z}H_2}\right)}$$

Индекс *23* в обозначении φ_{23}^{1-} указывает на тот факт, что в этом поле учтен вклад как волн в прослое, так и волн, пришедших из нижнего пласта. Преломляясь в верхний пласт, данная система волн образует в нем в результате многократных отражений поле

$$\varphi_1^1 = \varphi\,_{23}^{1-}\Big|_0 e^{i(k_{1X}X+k_{1Y}Y)}\left(e^{-ik_{1Z}Z}+V_{10}e^{ik_{1Z}(2H_1+Z)}\right)\Big/\left(1-V_{10}V_{12}e^{2ik_{1Z}H_1}\right), \qquad (5)$$

где $\varphi\,_{23}^{1-}\Big|_0 = \varphi\,_1^{+}\Big|_0 W_{12}\times e^{i(k_{2X}X+k_{2Y}Y)}\dfrac{\left(\varphi\,_2^{+}\Big|_{H_2}W_{23}\times\varphi\,_3^{-}\Big|_{H_2}W_{32}e^{ik_{2Z}H_2}+V_{23}e^{ik_{2Z}H_2}\right)}{\left(1-V_{21}V_{23}e^{2ik_{2Z}H_2}\right)}$

Таким образом, поле, описываемое выражением (5), является результатом взаимодействия поля (1) с прослоем и нижним пластом. Оно в свою очередь порождает дополнительную систему колебаний в прослое и нижнем пласте, и соответствующий вклад от их возврата в верхний пласт и так далее.

Таким образом, суммарное поле в верхнем пласте можно записать в виде

$$\varphi = \varphi_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi\,_1^n, \qquad (6)$$

где второе слагаемое — вклад прослоя и нижнего пласта в регистрируемое волновое поле,

$$\varphi_1^n = \varphi\,_{23}^{1-}\Big|_0\left(\varphi\,_{23}^{*-}\Big|_0\right)^{n-1}e^{i(k_{1X}X+k_{1Y}Y)}\frac{\left(e^{-ik_{1Z}Z}+V_{10}e^{ik_{1Z}(2H_1+Z)}\right)}{\left(1-V_{10}V_{12}e^{2ik_{1Z}H_1}\right)}, \qquad (7)$$

$$\varphi\,_{23}^{*-}\Big|_0 = \varphi\,_1^{*+}\Big|_0 W_{12}\times e^{i(k_{2X}X+k_{2Y}Y)}\frac{\left(\varphi\,_2^{+}\Big|_{H_2}W_{23}\times\varphi\,_3^{-}\Big|_{H_2}W_{32}e^{ik_{2Z}H_2}+V_{23}e^{ik_{2Z}H_2}\right)}{\left(1-V_{21}V_{23}e^{2ik_{2Z}H_2}\right)},$$

$$\varphi\,_1^{*+}\Big|_0 = \frac{V_{10}e^{ik_{1Z}2H_1}}{1-V_{10}V_{12}e^{2ik_{1Z}H_1}}.$$

Анализируя вид соотношения (7) можно убедиться, что (6) представляет собой бесконечную геометрическую прогрессию и суммарное поле в верхнем пласте можно записать в виде:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_1^n = \varphi_1 + e^{i(k_{1X}X+k_{1Y}Y)}\left(e^{-ik_{1Z}Z}+V_{10}e^{ik_{1Z}(2H_1+Z)}\right)\left(\varphi\,_{23}^{1-}\Big|_0\Big/\left[\left(1-V_{10}V_{12}e^{2ik_{1Z}H_1}\right)\left(1-\varphi\,_{23}^{*-}\Big|_0\right)\right]\right)$$

или

$$\varphi = \begin{pmatrix} e^{ik_{1Z}(Z-Z_0)}+V_{10}e^{ik_{1Z}(Z_0+2H_1+Z)}+ \\ +V_{12}e^{ik_{1Z}(-Z_0-Z)}+V_{12}V_{10}e^{ik_{1Z}(Z_0+2H_1-Z)}+ \\ \left(e^{-ik_{1Z}Z}+V_{10}e^{ik_{1Z}(2H_1+Z)}\right)\left(\varphi\,_{23}^{1-}\Big|_0\Big/\left(1-\varphi\,_{23}^{*-}\Big|_0\right)\right) \end{pmatrix}\frac{e^{i(k_{1X}X+k_{1Y}Y)}}{\left(1-V_{10}V_{12}e^{2ik_{1Z}H_1}\right)} \qquad (8)$$

Искомое поле $\varphi_{сл}$ можно получить из (8) путем интегрирования по всем направляющим косинусам угла падения волны границу между верхним пластом и прослоем θ:

$$\varphi_{сл} = \int_{\Gamma_1} \frac{\begin{pmatrix} e^{ik_{1Z}(Z-Z_0)} + V_{10}e^{ik_{1Z}(Z_0+2H_1+Z)} + \\ +V_{12}e^{ik_{1Z}(-Z_0-Z)} + V_{12}V_{10}e^{ik_{1Z}(Z_0+2H_1-Z)} \\ +\left(e^{-ik_{1Z}Z} + V_{10}e^{ik_{1Z}(2H_1+Z)}\right)\left(\varphi_{23}^{1-}\Big|_0 \Big/ \left(1-\varphi_{23}^{*-}\Big|_0\right)\right) \end{pmatrix}}{\left(1-V_{10}V_{12}e^{2ik_{1Z}H_1}\right)} H_o^{(1)}(k_1 r \sin\theta) \sin\theta \, d\theta,$$

где $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода, метод приведения интеграла к данному виду и особенности пути Γ_1 описаны в [1] достаточно подробно и не требует дополнительного анализа.

Рассмотрим физический смысл соотношения (8). Очевидно, что оно с точностью до коэффициента $\varphi_{23}^{1-}\Big|_0 \left(\varphi_{23}^{*-}\Big|_0\right)^{n-1}$ соответствует соотношению, описывающему поле, образованное в пласте источником, находящимся за его пределами [1]. Исходя из этого можно показать, что поле, образованное в слое внешним источником (расположенном на уровне $Z_{0\,ВН} < 0$) можно записать в виде:

$$\varphi_{1\,ВН} = W_{21}e^{-ik_2 Z_{0\,ВН}} e^{i(k_{1X}X + k_{1Y}Y)} \frac{\left(e^{-ik_{1Z}Z} + V_{10}e^{ik_{1Z}(2H_1+Z)}\right)}{\left(1-V_{10}V_{12}e^{2ik_{1Z}H_1}\right)},$$

где W_{21} – коэффициент прозрачности нижней границы пласта. Таким образом, можно говорить о том, что близкорасположенный угольный пласт можно рассматривать как дополнительный источник сейсмических колебаний, амплитуда и фаза которого определяются соотношением $\varphi_{23}^{1-}\Big|_0 \left(\varphi_{23}^{*-}\Big|_0\right)^{n-1}$.

Изложенные выше зависимости и закономерности изменения структуры волнового поля и характеристик отдельных волновых пакетов следует учитывать при разработке прогнозных критериев и интерпретации материалов шахтной сейсморазведки геологических нарушений угольных пластов. Их использование уменьшит неоднозначность интерпретации данных прогноза и повысит эффективность проведения натурных сейсмических исследований.

СПИСОК ССЫЛОК

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – 2-е изд. – М.: Наука, 1973. – 343 с.