

<sup>1</sup> С. В. Ершов, д-р техн. наук

<sup>1</sup> А. И. Деревянко,

<sup>2</sup> В. А. Яковлев, канд. техн. наук

<sup>3</sup> М. Н. Гризун, канд. техн. наук

<sup>1</sup> г. Харьков,

e-mail: sergiy.v.yershov@gmail.com;

anton.derevyanko@gmail.com

<sup>2</sup> Институт проблем машиностроения

им. А. Н. Подгорного НАН Украины,  
г. Харьков,

e-mail: yava@ipmach.kharkov.ua

<sup>3</sup> Национальный технический университет

«Харьковский политехнический

институт», г. Харьков, e-mail:

masha.grizun@gmail.com

**Ключові слова:** чисельне моделювання, тривимір-  
на турбулентна течія, решітка турбіни, ламінар-  
но-турбулентний перехід.

УДК 533.6

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ТУРБИНОЙ РЕШЕТКЕ С УЧЕТОМ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА

*Розглядається тривимірна турбулентна течія в'язкого стислого газу в турбінних решітках з урахуванням ламінарно-турбулентного переходу. Математичне моделювання такої течії здійснюється на основі рівнянь Нав'є-Стокса, осереднених за Рейнольдсом, і двопараметричної диференціальної моделі турбулентності  $k-\omega$  SST. Моделювання переходу виконано за допомогою алгебраїчної моделі PTM (Production Term Modification). Проведено розрахунки дозвукового обтікання турбінних решіток VKI-Genoa. Зіставлення результатів розрахунків для повноти турбулентного потоку і перехідної течії між собою і з відомими експериментальними даними показало, що розглянута математична модель течії задовільно описує фізичні процеси, що мають місце в решітках турбін при ламінарно-турбулентному переході.*

### Введение

Несмотря на то, что лопаточные машины известны уже очень давно и огромное количество научных трудов посвящено их исследованию и совершенствованию, тем не менее, все возможности этого совершенствования еще не исчерпаны. Применение современных методов расчета течений с использованием решателей уравнений Навье–Стокса, осредненных по Рейнольдсу (RANS – Reynolds Averaged Navier–Stokes) [1] позволило проводить численное моделирование течений и осуществлять трехмерное проектирование проточных частей. Однако если при таком проектировании учитываются не все эффекты трехмерного турбулентного течения вязкого сжимаемого газа, то, очевидно, существуют как неправильная оценка эффективности лопаточных машин, так и некоторые резервы их усовершенствования.

Одним недостаточно изученным и поэтому обычно неучтенным явлением в потоке газа через проточную часть турбомашин является ламинарно-турбулентный переход. Влияние перехода на потери кинетической энергии рабочего тела и КПД лопаточной машины неоднозначное. Как известно, ламинарный пограничный слой характеризуется меньшими потерями, чем турбулентный той же толщины, однако он более подвержен отрыву, вследствие которого потери могут вырасти [2]. С другой стороны, при ускорении потока может происходить реламинаризация пограничного слоя, сопровождающаяся его утонением. Более тонкий пограничный слой более устойчивый, и если отрыв даже произойдет, он может иметь меньшую толщину, чем в случае более толстого турбулентного пограничного слоя в решетках со слабо ускоряющимся течением. В этом случае, опять-таки, потери могут быть ниже для ламинарного потока, что часто используется при проектировании высоконагруженных решеток. Влияние трехмерности течения на ламинарно-турбулентный переход и, наоборот, влияние ламинарно-турбулентного перехода на трехмерные вторичные течения практически не изучены. Такая неоднозначность и неопределенность влияния перехода на эффективность лопаточных машин требует специального исследования трехмерных потоков в турбомашин для оценки совершенства их проточных частей.

Существует несколько моделей, описывающих ламинарно-турбулентный переход в рамках модели течения RANS, дополненной моделями турбулентности. Достаточно подробные обзоры таких

© С. В. Ершов, А. И. Деревянко, В. А. Яковлев, М. Н. Гризун, 2015

моделей перехода представлены в работах [3–5]. Эти модели являются полуэмпирическими и не универсальными – для каждой модели существует некоторая область применимости. Поэтому разработка новых моделей перехода и их проверка в сочетании с различными моделями турбулентности для течений разных классов представляет собой важную и актуальную задачу.

В настоящей работе рассматривается численное моделирование трехмерного переходного течения в турбинной решетке. В качестве модели перехода выбрана простая алгебраическая модель, которая по сравнению с подходами, основанными на дополнительных дифференциальных уравнениях [6], требует меньших вычислительных ресурсов. Проведено сопоставление численных решений для течения с ламинарно-турбулентным переходом и полностью турбулентного обтекания между собой и с экспериментальными данными.

### 1. Математическая модель и численный метод

Математическая модель трехмерного турбулентного течения вязкого сжимаемого газа опирается на систему уравнений RANS, дополненную низко-рейнольдсовой версией модели турбулентности  $k-\omega$  SST (Shear Stress Transport) [7, 8]. Физически правдоподобные значения компонент тензора рейнольдсовых напряжений обеспечиваются с помощью ограничений реализуемости [9], что является необходимым условием для расчета переходных течений. Для моделирования ламинарно-турбулентного перехода привлекается алгебраическая модель PTM [10], предложенная Лангтри и кратко описанная в следующем разделе.

Исходные дифференциальные уравнения численно интегрируются с помощью неявной ENO (Essentially Non-Oscillatory) схемы второго порядка аппроксимации [11], в которой потоки на границах ячеек находятся с использованием точного решения задачи распада произвольного разрыва. Для ускорения сходимости применяется локальный шаг по времени и метод Ньютона [12]. При выполнении расчетов с высокими числами Куранта осуществляется коррекция временного шага в чрезмерно вытянутых ячейках.

Рассмотренный подход реализован в CFD решателе F [13, 14].

### 2. Модель ламинарно-турбулентного перехода

Алгебраическая модель ламинарно-турбулентного перехода PTM применяется к низко-рейнольдсовой версии дифференциальных моделей турбулентности и основывается на модификации производства турбулентности в уравнении переноса кинетической энергии турбулентности (КЭТ)

$$P_k = \alpha_{PTM} \bar{\tau}_{ij} S_{ij},$$

где  $P_k$  – производство КЭТ;  $\bar{\tau}_{ij}$  – тензор рейнольдсовых напряжений;  $S_{ij}$  – тензор скоростей деформаций;  $\alpha_{PTM}$  – коэффициент модификации производства турбулентности, который равен 1 для высоко-рейнольдсовой модели и может рассматриваться как некий аналог коэффициента перемежаемости турбулентности.

Коэффициент  $\alpha_{PTM}$  рассчитывается следующим образом. Предполагается, что на ламинарно-турбулентный переход влияют степень турбулентности внешнего потока и градиент давления и таким образом воспроизводится турбулизация пограничного слоя за счет воздействия высокой турбулентности внешнего потока и отрывного или предотрывного состояния потока с положительным градиентом давления.

Влияние степени турбулентности учитывается с помощью поправки, вычисляемой как

$$P_{m1} = 1 - c_{PTM} \begin{cases} \left[ 3,328 \cdot 10^{-4} \cdot R_v - 3,94 \cdot 10^{-7} \cdot R_v^2 + 1,43 \cdot 10^{-10} \cdot R_v^3 \right], & R_v < 1000 \\ \left[ 0,12 + 1,0 \cdot 10^{-5} \cdot R_v \right], & R_v \geq 1000 \end{cases},$$

где  $R_v = \frac{y^2 S}{\nu}$  – число Рейнольдса, рассчитываемое по расстоянию от стенки и тензору скоростей деформации потока;  $c_{PTM} = 1,0$  – константа.

Влияние градиента давления оценивается следующим образом:

$$P_{m2} = \begin{cases} -|K|^{0.4} \frac{R_v}{80}, & K < 0; \\ 0, & K \geq 0 \end{cases}; \quad K = -\frac{\mu}{\rho^2 U^3} (1 - M^2) \frac{dp}{ds},$$

где  $U$  – скорость потока;  $M$  – число Маха;  $s$  – координата вдоль линии тока.

Совместное влияние обоих факторов учитывается зависимостью

$$P_m = 1 - 0,94(P_{m1} + P_{m2})F_3 \operatorname{th}[(y^+/17)^2],$$

где  $F_3 = \exp[-(R_t/a_{PTM})^{b_{PTM}}][1 - P(R_t)] - 1/2P(R_t)$  – функция, включающая производство турбулентности при достижении критического числа Рейнольдса;  $y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu}$  – безразмерное расстояние от стенки;

$u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho_w}$  – скорость трения;  $P(R_t) = \frac{2,5}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(R_t - 3)^2}{2}\right]$  – функция турбулентного числа Рейнольдса  $R_t = k/(\nu\omega)$ ;  $a_{PTM}$  – константа,  $a_{PTM} = 3,45$ ;  $b_{PTM}$  – константа,  $b_{PTM} = 2,0$ .

Так как по физике переходного течения величина коэффициента модификации производства турбулентности  $\alpha_{PTM}$ , так же как и коэффициента перемежаемости, должна быть ограничена снизу нулем и сверху единицей, то в настоящей работе накладывается следующее ограничение:

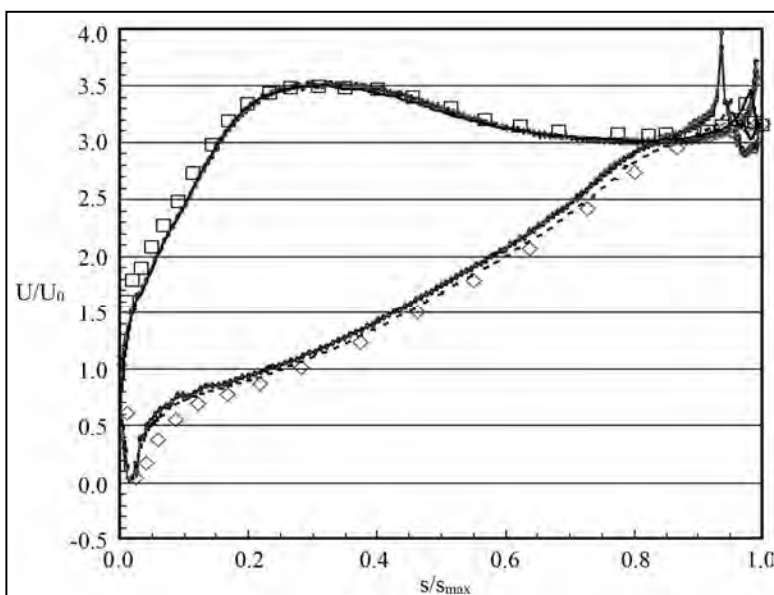
$$\alpha_{PTM} = \min(1, P_m).$$

### 3. Технология проведения расчетов

В процессе выполнения настоящего исследования обнаружено, что обеспечение точности и надежности результатов зависит от ряда факторов. Во-первых, для адекватного моделирования ламинарно-турбулентного перехода необходимо использовать физически обоснованные модели турбулентности. В частности, важным моментом является применение ограничений реализуемости для компонент тензора рейнольдсовых напряжений.

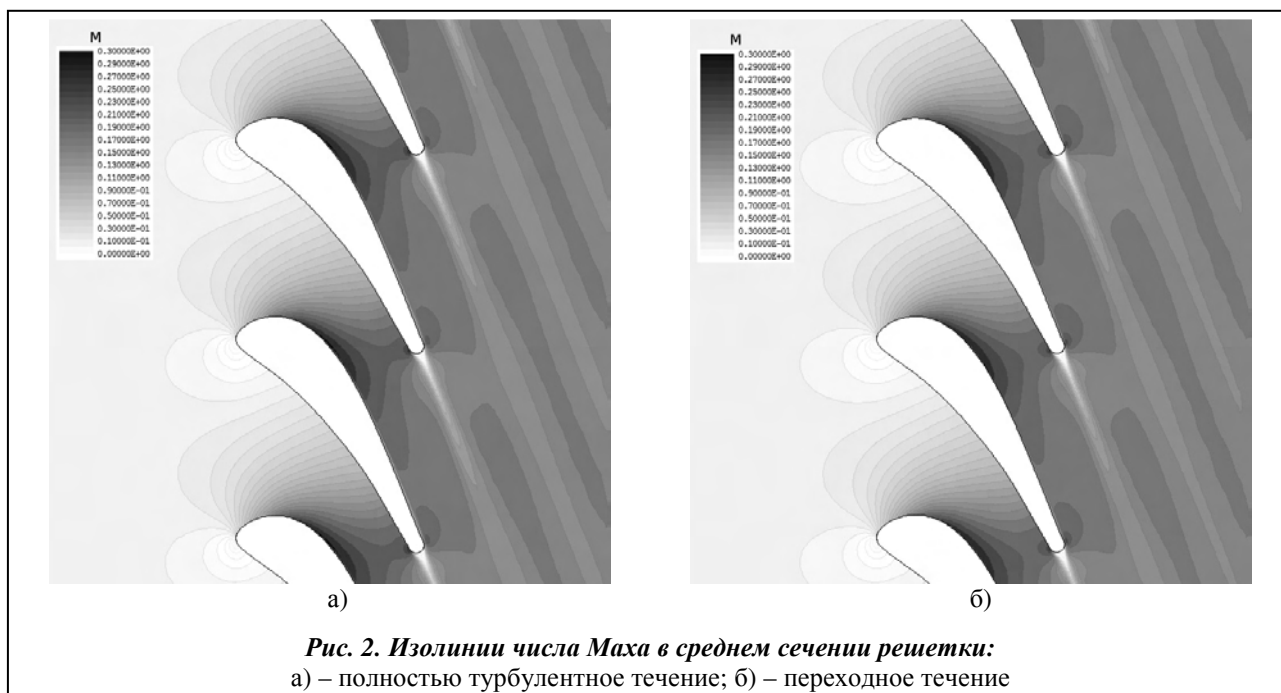
Во-вторых, моделирование перехода предъявляет повышенные требования к построению сетки и ее размерностям. В области перехода необходимо обеспечить высокое разрешение в продольном и поперечном направлениях, так как характеристики пограничного слоя подвергаются быстрым изменениям: на относительно коротком участке течения меняется толщина пограничного слоя и его профиль. Опыт авторов показывает, что для хорошего описания перехода в трехмерном межлопаточном канале решетки требуется от нескольких миллионов до нескольких десятков миллионов ячеек, величина  $y^+$  для первой ячейки порядка 1 или даже меньше, 30 и более ячеек поперек пограничного слоя (в зоне перехода), не менее 150 ячеек вдоль поверхности лопаток (на каждой стороне) в направлении потока и, что особенно важно, плавные изменения шагов ячеек.

В-третьих, сходимость решений для течений с переходом достаточно медленная, причем рекомендуется такие расчеты проводить, используя в качестве начального приближе-



**Рис. 1. Распределение безразмерной адиабатической скорости по поверхности лопатки в среднем сечении:**

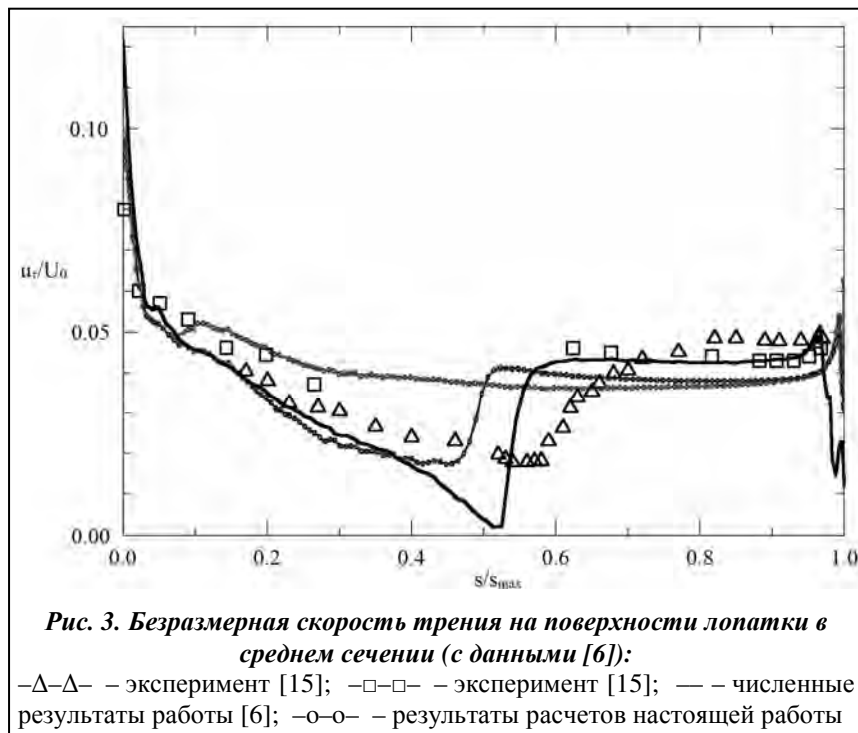
—◇—◇— эксперимент (сторона давления) [15]; —□—□— эксперимент (сторона разрежения) [15]; - - - результат работы [6] (сторона давления); — результат работы [6] (сторона разрежения); —○—○— результаты расчетов настоящей работы



ния решение без учета перехода. Поэтому такие расчеты требуют больших вычислительных затрат и весьма желательно использовать численные методы, позволяющие проводить расчеты на очень мелких сетках с числами Куранта, значительно большими 1.

#### 4. Моделирование течения в решетке VKI-Genoa

Рассматривалось трехмерное течение в решетке VKI-Genoa, экспериментальное и расчетное исследования которой выполнено в работах [15] и [6, 17] соответственно. Использовалась сетка с размерностью 4,2 млн ячеек ( $128 \times 128 \times 256$ ). Величина  $y^+$  приблизительно равнялась 1, и в пограничном слое располагалось около 30 ячеек. Некоторые результаты расчета данной решетки были приведены ранее в работе [16].



Рассматриваемая решетка является дозвуковой с числом Маха на выходе  $M_{2is} = 0,24$  и числом Рейнольдса  $Re = 1,6 \cdot 10^6$ . Степень турбулентности на входе составляет 1%. В эксперименте не была определена толщина пограничного слоя на торцевых обводах перед решеткой. Так как задание этой величины является обязательным для трехмерного расчета, то в настоящей работе произвольно предполагалось, что пограничный слой начинает зарождаться на входной границе расчетной области.

На рис. 1 приведено распределение безразмерной адиабатической скорости  $U$  по поверхности лопатки в среднем сечении. Обезразмеривание вы-

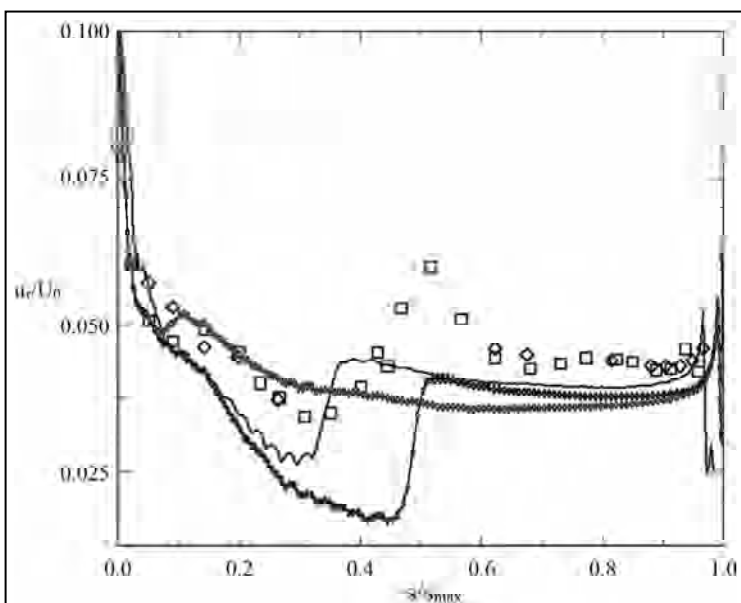
полнено на скорость потока на входе  $U_0$ . Координата  $S$  измеряется по обводу лопатки от входной кромки до выходной. Значение  $S_{\max}$  соответствует длине контура одной стороны профиля. Наблюдается хорошее согласование результатов расчетов полностью турбулентного потока и переходного течения, полученные в настоящей работе с экспериментом [15] и результатами работы [6] по большей части поверхности лопатки, за исключением района выходной кромки.

На рис. 2 приведены изолинии числа Маха в среднем сечении решетки для расчетов полностью турбулентного и переходного обтекания. В ядре потока течения достаточно близки между собой, и рисунки выглядят похожими.

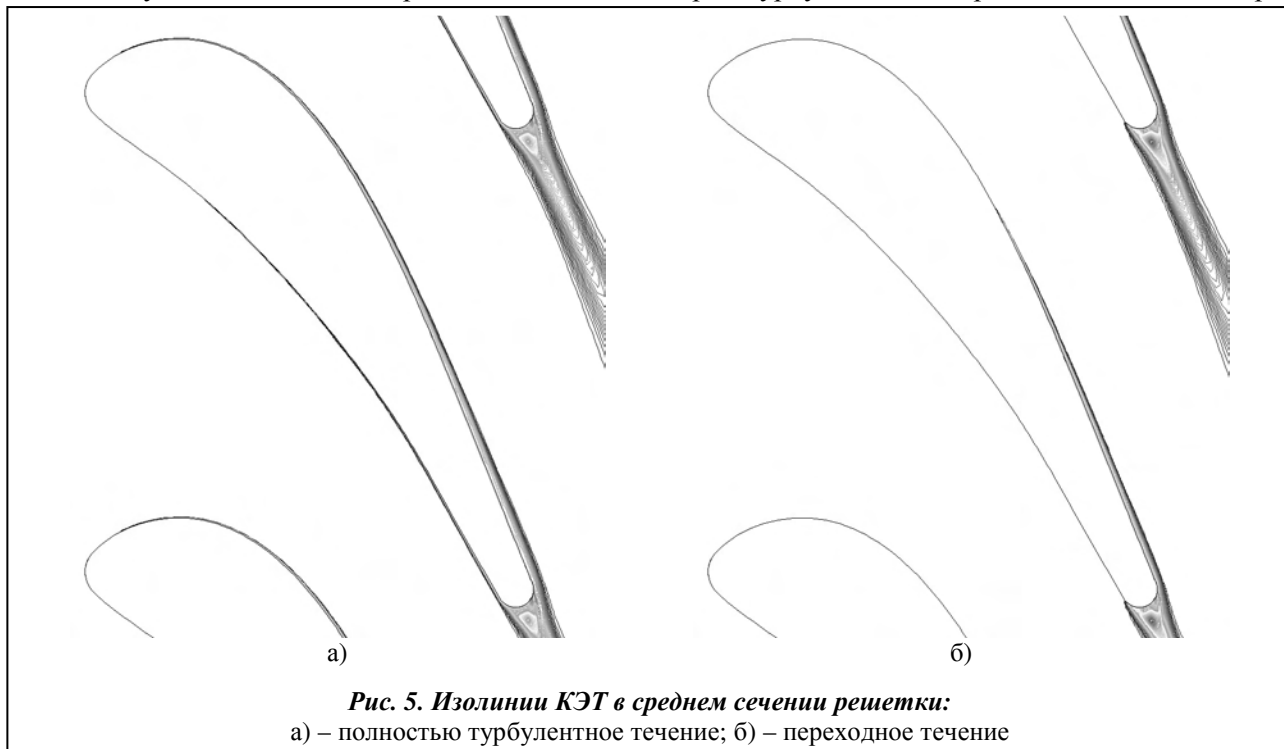
На рис. 3 приведено распределение безразмерной скорости трения  $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$  по контуру лопатки в среднем сечении. Здесь  $\tau_w$  – напряжение трения на стенке,  $\rho$  – локальная плотность газа. Обезразмеривание выполнено на локальную адиабатическую скорость. Результаты других авторов, приведенные на данном графике, взяты из работы [6]. На рис. 4 представлен аналогичный график, данные других авторов которого взяты из работы [17].

Как видно из рисунков, интерпретация результатов эксперимента в работах [6] и [17] несколько различается. Тем не менее, можно сделать следующие выводы:

- переход происходит в безотрывном пограничном слое;
- используемая в настоящей работе модель ламинарно-турбулентного перехода качественно пра-



**Рис. 4. Безразмерная скорость трения на поверхности лопатки в среднем сечении (с данными [17]):**  
 -Δ-Δ- эксперимент [15]; -□-□- эксперимент [15]; — численные результаты работы [17]; -o-o- результаты расчетов настоящей работы



**Рис. 5. Изолинии КЭТ в среднем сечении решетки:**  
 а) – полностью турбулентное течение; б) – переходное течение

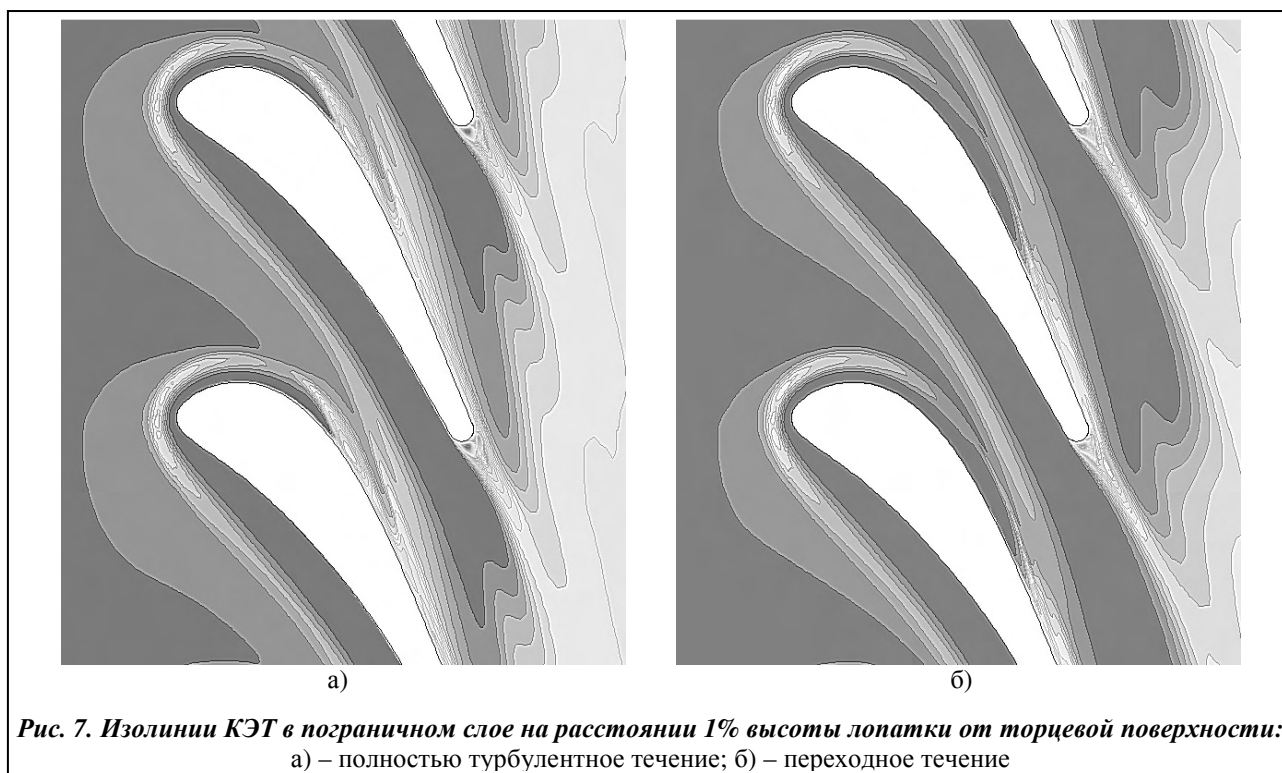


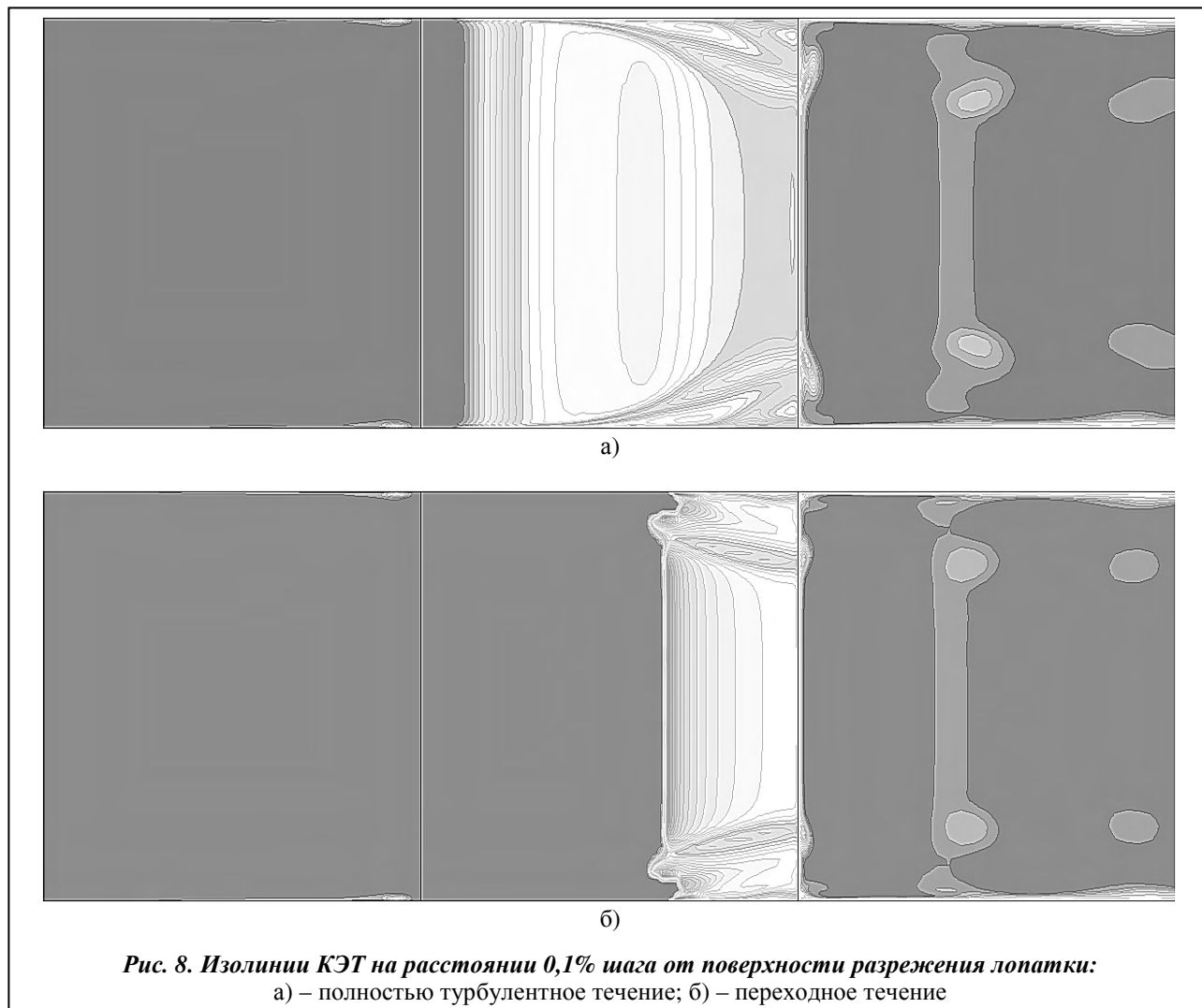
булентным течением. Положение второй ветви подковообразного вихря примерно одинаковое для обоих рассмотренных случаев.

Можно предположить, что пограничный слой в областях течения перед подковообразным вихрем ламинарный, профиль такого пограничного слоя менее заполненный, чем для турбулентного пограничного слоя, и поэтому существует большая подверженность отрыву. Поток за подковообразным вихрем должен начинать турбулизоваться, профиль пограничного слоя в этой области становится более заполненным, и различия в интенсивности поперечного перетекания между стороной давления лопатки и идущей вдоль нее ветви подковообразного вихря для полностью турбулентного и переходного течений менее выражены.

Некоторое подтверждение такому предположению можно обнаружить на рис. 7, где показаны изолинии КЭТ в пограничном слое на расстоянии 1% высоты лопатки от торцевой поверхности. Так как пограничный слой на торцевых поверхностях начинает формироваться от границы входа расчетной области, то, попадая в межлопаточный канал, он остается достаточно тонким и квазиламинарным даже при моделировании полностью турбулентного течения. Видно, что турбулизация потока (повышение КЭТ) начинается в подковообразном вихре перед входной кромкой. Величина КЭТ в этой области относительно небольшая и примерно одинаковая для полностью турбулентного и переходного течений. В дальнейшем для обоих случаев существенное повышение КЭТ наблюдается в районе перетекания пограничного слоя с торцевой поверхности на лопатку. Этот процесс для переходного течения начинается выше по потоку, чем для полностью турбулентного, и располагается примерно в той же области, что и турбулизация пограничного слоя на поверхности лопатки.

На рис. 8 показаны изолинии КЭТ на расстоянии 0,1% шага от поверхности разрежения лопатки. Как уже отмечалось ранее, рост КЭТ для полностью турбулентного обтекания начинается сразу за входной кромкой, а для переходного течения – существенно ниже по потоку, в районе горла решетки. В обоих случаях турбулизация потока в пограничном слое на стороне разрежения происходит почти одновременно по высоте лопатки. Наблюдаемые области запаздывания и опережения по турбулизации в зоне вторичных течений для переходного течения хорошо коррелируют с положением затекания пограничного слоя с торцевой поверхности на сторону разрежения и связанными с этим зонами повышенной и пониженной локальной скорости потока.



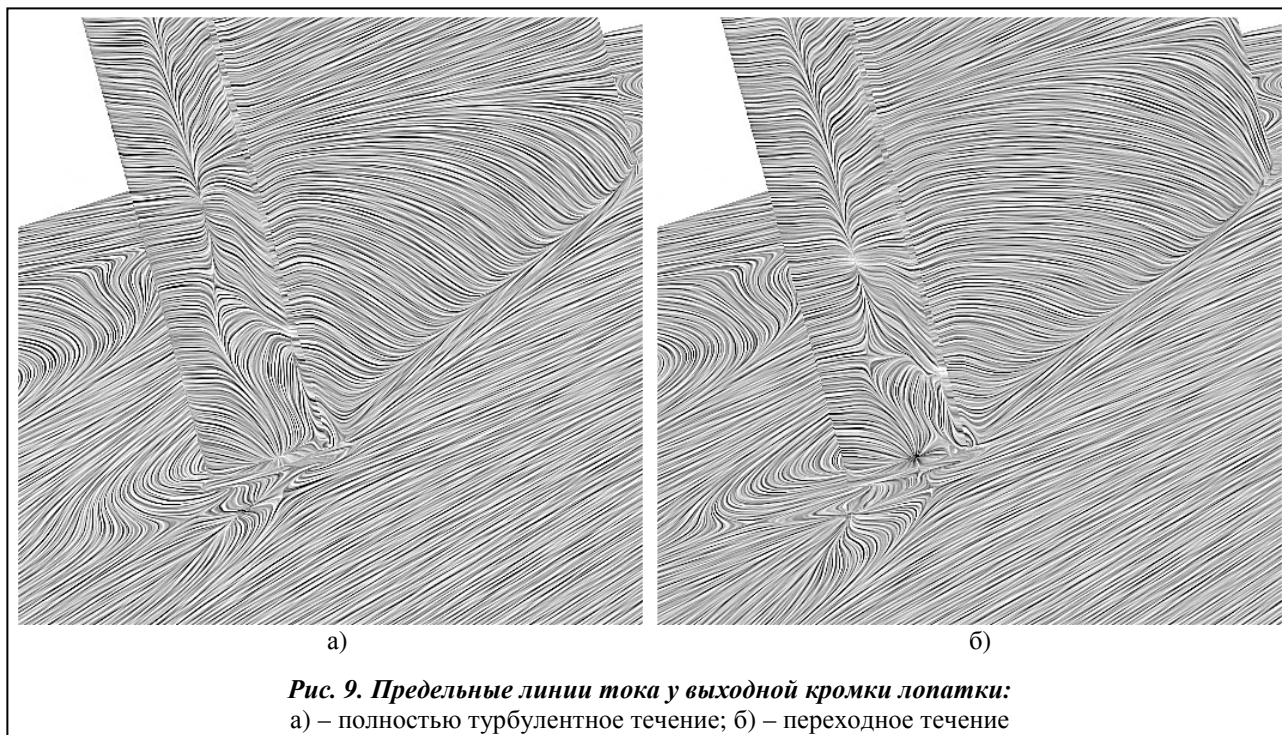


**Рис. 8. Изолинии КЭТ на расстоянии 0,1% шага от поверхности разрежения лопатки:**  
 а) – полностью турбулентное течение; б) – переходное течение

На рис. 9 показаны предельные линии тока на выходной кромке и торцевой поверхности за лопатками для полностью турбулентного и переходного течения. Вихревая картина течения оказывается чрезвычайно сложной: в этой области можно насчитать 2 фокуса, которые соответствуют двум противоположно вращающимся двумерным вихрям в отрыве за выходной кромки, и около 7 седловых точек и 7 точек растекания, которые определяют положение вихревых зон трехмерного отрыва. Не ставя цели подробного описания такого течения, отметим наиболее важные, с точки зрения авторов, его особенности. Во-первых, несмотря на то, что при переходном течении пограничный слой с торцевой поверхности на сторону разрежения начинает затекать раньше, проникает он примерно на ту же высоту на поверхности разрежения лопатки. Возможно, это объясняется тем, что в переходном течении на стороне разрежения пограничный слой тоньше, чем для полностью турбулентного обтекания, и в то же время за горлом его профиль становится турбулентным и более заполненным, и это препятствует дальнейшему распространению перетекания.

Во-вторых, на выходной кромке вдоль пера лопатки наблюдаются перетекания чередующихся направлений, разделенные особыми точками (двумя точками растекания и седловой точкой). Такая разделенность течения приводит к дискретности вихревого следа за решеткой. Перетекание вдоль выходной кромки в ядре потока, направленное к середине канала, формирует обширный дискретный вихрь в следе, который будем называть основным вихрем в следе. Интенсивность этого перетекания, а следовательно, и основного вихря больше для полностью турбулентного течения. Ближе к торцевой поверхности образуется приторцевой вихрь противоположного направления вращения. Как видно из расположения особых точек на выходной кромке и торцевой поверхности, приторцевой вихрь для





полностью турбулентного течения по сравнению с переходным течением имеет несколько больший размер в направлении, нормальном к торцевой поверхности, но меньший размер в окружном направлении. В угловой зоне, образованной выходной кромкой и торцевой поверхностью, индуцируется меньший по размеру вихрь, который будем называть угловым вихрем в следе.

И, в-третьих, характерные размеры углового вихря в канале, расположенного в угловой зоне между стороной разрезания и торцевой поверхностью, больше для полностью турбулентного течения, что, по-видимому, также связано с большей толщиной пограничного слоя.

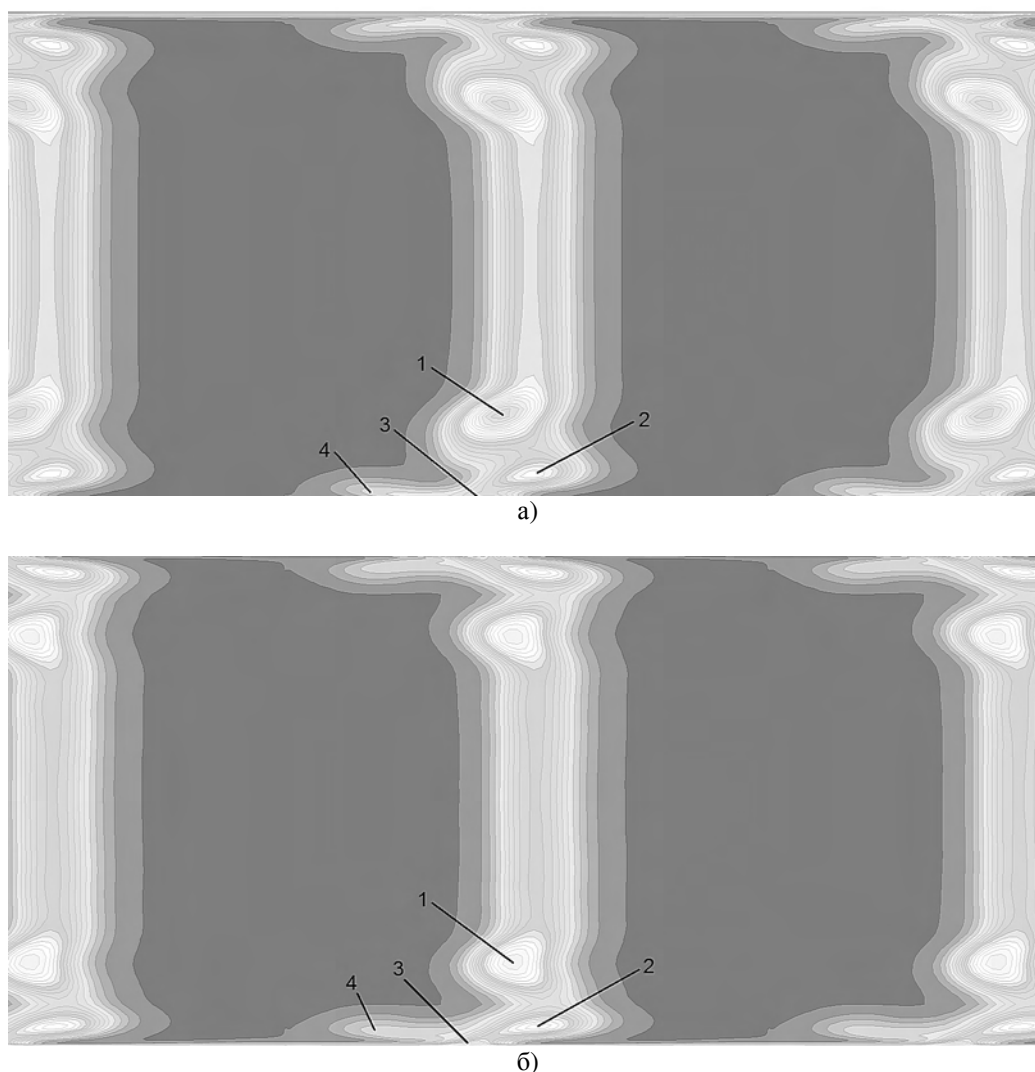
На рис. 10 приведены изолинии энтропийной функции в поперечном сечении за выходными кромками для полностью турбулентного обтекания и переходного течения. Видна достаточно хорошая симметричность течения относительно середины канала. Цифрами обозначены области повышенной энтропии, физический смысл которых будет объяснен ниже.

На рис. 11 показана структура вторичных течений в межлопаточном канале. На торцевой поверхности представлены предельные линии тока, как на рис. 6, а на перпендикулярной поперечной поверхности – изолинии энтропийной функции, аналогичные рис. 10. Также построены линии тока в приторцевой области, которые проходят через подковообразный, канальный и приторцевой вихри.

Анализ данных графиков, а также распределений энтропии в нескольких сечениях непосредственно в окрестности выходных кромок и за ними позволяет отметить следующее.

Основной вклад в рост энтропии, а следовательно, и в потери для рассматриваемой решетки вносит кромочный след, и локальные максимумы энтропии соответствуют дискретным вихрям в следе, описанным выше. Влияние вторичных течений и размеры областей, занимаемых ими, существенно меньше. Это объясняется как большой толщиной выходной кромки, так и малой нагруженностью решетки.

Линии тока канального вихря, показанные светлыми тонами, приходят главным образом в зону 1 повышенной энтропии на рис. 9, которая соответствует основному вихрю в следе. Оба эти вихря имеют одинаковое направление вращения и, скорее всего, объединяются и смешиваются вскоре за выходными кромками. Необходимо отметить, что для переходного течения, для которого интенсивность поперечного перетекания в торцевом пограничном слое и на поверхности разрезания лопатки выше, наблюдается большее рассеяние линий тока канального вихря. В результате для полностью турбулентного течения в зоне 1, где сосредоточено несколько вихрей, значения энтропии и потери



**Рис. 10. Изолинии энтропийной функции в поперечном сечении на расстоянии 20% за выходными кромками:**

а) – полностью турбулентное течение; б) – переходное течение

выше, чем для переходного течения, несмотря на то, что в последнем перетекание в пограничном слое и, следовательно, каналный вихрь более интенсивные.

Линии тока, выделенные за выходной кромкой на рис. 11, распространяются из приторцевой области в зону 2 повышенной энтропии. Для этого вихря, наоборот, линии тока сильнее рассеиваются для полностью турбулентного обтекания, а интенсивность этого вихря больше для переходного течения.

Зона 3 повышенной энтропии на рис. 10 соответствует каналному и следовому угловым вихрям, который на рис. 11 не выделены в силу их малых размеров.

Ветвь подковообразного вихря, формирующаяся со стороны давления, приходит к нижней границе зоны 1 повышенной энтропии. При этом для переходного течения она расположена ближе к торцевой поверхности, чем для полностью турбулентного течения. Ветвь подковообразного вихря, формирующаяся со стороны разрежения, приходит в зону 4 повышенной энтропии, причем для полностью турбулентного течения она больше прижата к приторцевой поверхности.

Для полностью турбулентного течения в средних сечениях канала в следе наблюдаются более высокие значения энтропии и больший угол отставания потока. Это объясняется тем, что для полностью турбулентного течения, по сравнению с переходным течением, пограничный слой на обеих поверхностях лопатки толще.



а)



б)

**Рис. 11. Структура вторичных течений:**

а) – полностью турбулентное течение; б) – переходное течение

На рис. 12 приведены распределения потерь кинетической энергии по высоте лопатки. Интенсивность и положение локальных максимумов потерь соответствуют распределению энтропии в следе (см. рис. 10). Значения коэффициентов суммарных потерь и потерь в ядре потока приведены в таблице. Потери определялись на расстоянии 40% осевой хорды за выходными кромками. В скобках также даны суммарные потери на выходе расчетной области, которые соответствуют данным работы

[16]. Видно, что при учете ламинарно-турбулентного перехода можно получить уточнение абсолютной оценки потерь кинетической энергии в решетке более чем на 1% для суммарных потерь и более чем на 0,5% для потерь в ядре потока.

**Потери кинетической энергии**

Вид течения	Потери в ядре потока	Суммарные потери в решетке
Полностью турбулентное течение	0,078	0,108 (0,123)
Переходное течение	0,070	0,093 (0,108)

**Заключение**

Алгебраическая модель перехода РТМ позволяет моделировать течения в решетках турбин с учетом явления ламинарно-турбулентного перехода. Рассчитанное в настоящей работе положение точки перехода удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными и результатами расчетов других авторов. В переходном течении рост кинетической энергии турбулентности как на стороне разрежения, так и на стороне давления наблюдается существенно ниже по потоку, чем при полностью турбулентном обтекании. Кроме того, в переходном течении, за счет большей подверженности потока отрыву, перетекание пограничного слоя с торцевой поверхности на сторону разрежения лопатки начинается раньше, а интенсивность приторцевого вихря в следе оказывается существенно выше, но, в целом, рост энтропии и потери в потоке – значительно меньше. В целом, полученная в результате численного моделирования физическая картина обтекания хорошо согласуется с известными представлениями о течениях такого рода.

Уточнение оценки суммарных потерь кинетической энергии в решетке при учете ламинарно-турбулентного перехода может быть более 1% в абсолютных величинах, в то время как для потерь в ядре потока – более 0,5%.

Обнаружено, что при учете ламинарно-турбулентного перехода происходит изменение структуры вторичных течений и интенсивности вихрей в кромочном следе. Поэтому важным вопросом дальнейшего исследования является изучение закономерностей влияния перехода на вторичные течения и выявление различных способов снижения потерь в турбинных решетках за счет управления переходом в пограничном слое.

В ходе исследования выяснилось, что моделирование перехода предъявляет повышенные требования к адекватности модели турбулентности, надежности и быстродействию численного метода, разрешению и качеству разностной сетки.

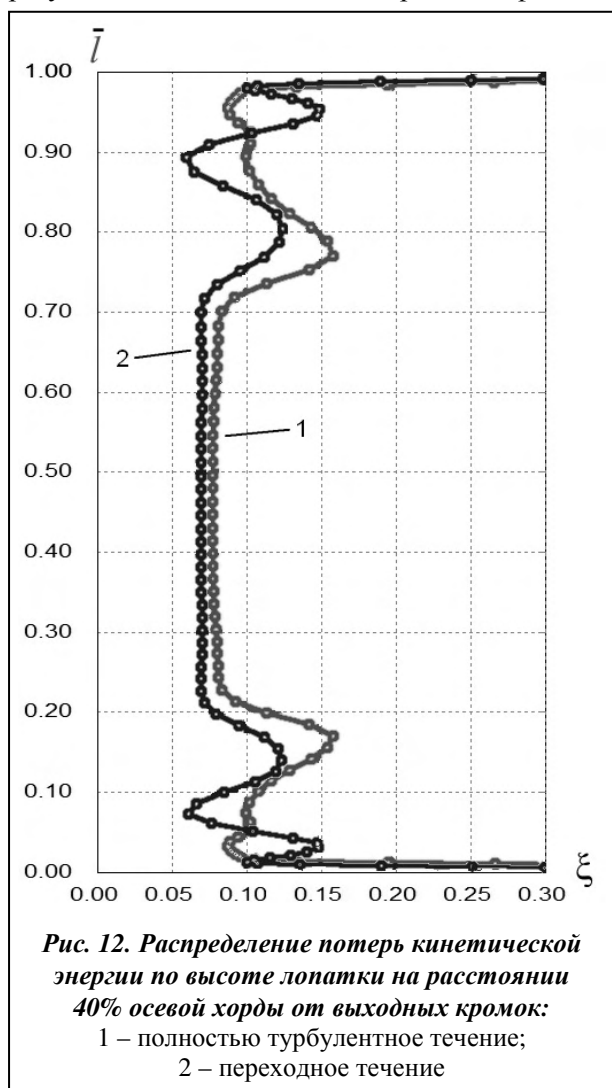
В ходе исследования выяснилось, что моделирование перехода предъявляет повышенные требования к адекватности модели турбулентности, надежности и быстродействию численного метода, разрешению и качеству разностной сетки.

**Благодарность**

Данное исследование выполнялось при частичной поддержке ИПМ ПАН. Авторы выражают признательность проф. П. Лампарту за полезные обсуждения работы.

**Литература**

1. Hirsch, C. Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics, 2nd Edition / C. Hirsch. – Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2007. – 680 p.



2. *Schlichting, H.* Boundary-layer theory / H. Schlichting. – New York: McGraw-Hill, 1979. – 817 p.
3. *Singer, B. A.* Modeling the Transition Region / B. A. Singer // NASA Contractor Report 1993. – 88 p.
4. *Di-Pasquale, D.* A selective review of CFD transition models / D. Di-Pasquale, A. Rona // 39th AIAA Fluid Dynamics Conference, 22–25 June 2009, San Antonio, Texas. – AIAA 2009-3812. – 10 p.
5. *Ершов, С. В.* Сравнение различных способов моделирования ламинарно-турбулентного перехода / С. В. Ершов, А. И. Деревянко // Пробл. машиностроения. – 2009. – Т. 12, № 4. – С. 25–32.
6. *Langtry, R. B.* A correlation-based transition model using local variables for unstructured parallelized CFD codes / R. B. Langtry // Ph.D thesis, University Stuttgart, 2006. – 109 p.
7. *Menter, F. R.* Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications / F. R. Menter // AIAA J. – 1994. – Vol. 32, № 8. – P. 1598–1605.
8. *Wilcox, D. C.* Simulation of Transition with a Two-Equation Turbulence Model / D. C. Wilcox // AIAA J. – 1994. – Vol. 32, № 2. – P. 247–255.
9. *Ершов, С. В.* Ограничение реализуемости для модели турбулентности SST  $k-\omega$  [Текст] / С. В. Ершов // Пробл. машиностроения. – 2008. – Т. 11, № 2. – С. 14–23.
10. *Langtry, R. B.* Prediction of transition for attached and separated shear layers in turbomachinery / R. B. Langtry, S. A. Sjolander // AIAA Paper. – 2002. – No 2002-3641. – 13 p.
11. *Ершов, С. В.* Квазимонотонная схема повышенной точности для интегрирования уравнений Эйлера и Навье–Стокса / С. В. Ершов // Мат. моделирование. – 1994. – Т. 6, № 11. – С. 63–75.
12. *Гризун, М. Н.* Численное моделирование многомерных сжимаемых течений с помощью метода Ньютона / М. Н. Гризун, С. В. Ершов // Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование. Вестник НТУ «ХПИ»: сб. науч. тр. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2013. – № 13. С. 38–46.
13. *Ершов, С. В.* Бесплатная CFD программа [Электронный ресурс] / С. В. Ершов – Режим доступа: <http://sergiyevshov.com>. – 1.06.2015 г.
14. *Ершов, С. В.* Развитие комплекса программ для расчета трехмерных течений вязкого газа / С. В. Ершов // Авиац.-косм. техника и технология. – 2012. – № 5(92). – С. 89–94.
15. *Ubaldi, M.* Detailed Velocity and Turbulence Measurements of the Profile Boundary Layer in a Large Scale Turbine Cascade / M. Ubaldi, P. Zunino, U. Campora, A. Ghiglione // International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition, Birmingham, UK. – ASME 96-GT-42. – 14 p.
16. *Ершов, С. В.* О выборе степени измельчения сетки при расчетах трехмерных течений вязкого газа в турбомашинах / С. В. Ершов, В. А. Яковлев // Вестн. двигателестроения. – 2015. – № 2. – С. 171–177.
17. *Malan, P.* Calibrating the  $\gamma$ -Re $\theta$  Transition Model for Commercial CFD / P. Malan, K. Suluksna, E. Juntasaro // AIAA Paper. – 2009. – No 2009-1142. – 13 p.
18. *ParaView* [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.paraview.org>. – 30.07.2015 г.

Поступила в редакцию 28.08.15