

11. *Kawakami H.* Bifurcation of periodic responses in forced dynamics nonlinear circuits: computation of bifurcation values of the system parameters / H. Kawakami // IEEE Trans. Circuits and Systems. – 1984. – Vol. 31. – P. 83–104.
12. *Tang D. M.* Flutter and limit cycle oscillations of two-dimensional panels in three-dimensional axial flow / D. M. Tang, H. Yamamoto, E. H. Dowell // Fluids and Structures. – 2003. – Vol. 17. – P. 225–242.

Поступила в редакцию
04.09.12

УДК 534.1 : 539.3

И. В. Янчевский, канд. техн. наук

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины
(г. Киев, e-mail: yanchevsky@ukr.net)

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПАКЕТНОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Представлены результаты конечноэлементного моделирования переходных процессов деформирования пакетного «продольно-изгибного» пьезопреобразователя, погруженного в безграничную идеальную сжимаемую жидкую среду. Исследовано влияние акустической среды на деформации преобразователя при различных законах изменения во времени подводимого к его токопроводящим покрытиям электрического сигнала.

Наведені результати скінченноелементного моделювання перехідних процесів деформування пакетного «поздовжньо-згинного» п'єзоперетворювача, зануреного в безмежне ідеальне стисливе рідке середовище. Досліджено вплив акустичного середовища на деформації перетворювача за різних законів зміни у часі електричного сигналу, що підводиться до його струмопровідних покриттів.

Введение

Интерес к исследованиям динамических режимов работы технических устройств, функционирующих на основе пьезоэффекта, обусловлен широкой номенклатурой их практических приложений, в частности, в прикладной гидроакустике для излучения и приема ультразвуковых волн. Расчет эксплуатационных параметров таких устройств зачастую проводится методами «эквивалентных электрических цепей» или «четырёхполюсника» [1]. Впрочем, использование этих методов лишает возможности детального анализа закономерностей деформирования входящих в состав указанных устройств пьезоэлектрических преобразователей, а также оценки механической и диэлектрической их прочности с учетом взаимодействия с акустическими средами. К тому же замещение пьезопреобразователя эквивалентной схемой проводится с привлечением ряда упрощающих предположений, что ведет к неизбежным погрешностям, а полученные на основе этих методов результаты расчета основных характеристик пьезопреобразователя справедливы для достаточно узкого диапазона изменения внешних воздействий. Поэтому в настоящее время повышенное внимание уделяется развитию метода «связанных полей» [1], когда изучение процессов в гидроэлектродупругих системах проводится через совместное решение уравнений колебаний пьезопреобразователя как деформируемого тела [2], уравнений движения акустической среды и теоретических основ электротехники [3] (в случае учета процессов в электрических цепях).

Однако анизотропия пьезоэлектрических материалов и связанность полевых величин различной физической природы определяет значительные математические трудности при построении строгих аналитических решений краевых задач гидроэлектродупругости даже для геометрически простых моделей пьезопреобразователей. Из публикаций последних лет по

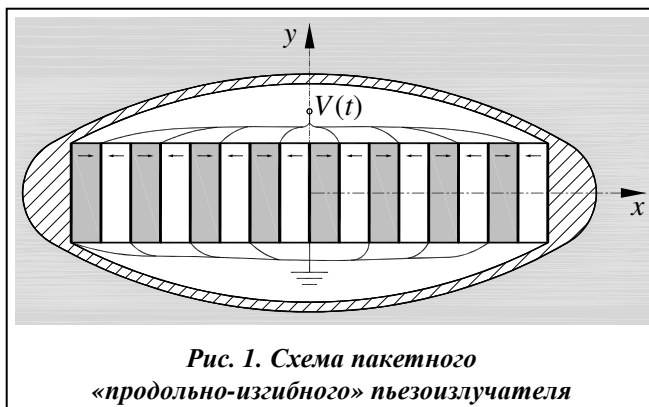


Рис. 1. Схема пакетного «продольно-изгибного» пьезоизлучателя

данной проблематике следует отметить [4–9]. Этим объясняется интерес к привлечению численных процедур исследования, в частности, методом конечных элементов (МКЭ) [10–14]. Подавляющая часть полученных в рамках этих исследований результатов соответствует режиму периодического во времени внешнего нагружения. Вместе с тем интенсификация условий эксплуатации пьезопреобразователей и возможность расширения их функциональных возможностей делает актуальными работы в области нестационарной гидроэлектроупругости. Анализ динамического поведения импульсно нагружаемых пьезопреобразователей, прогнозирование их динамической прочности и решение различных по постановкам оптимизационных задач на основе МКЭ не получили достаточного отражения в научной литературе.

В настоящей работе представлено конечноэлементное решение задачи о нестационарных колебаниях погруженного в акустическую среду пакетного «продольно-изгибного» пьезоэлектрического излучателя [1], схема которого изображена на рис. 1. Конструктивно рассматриваемый пьезопреобразователь представляет собой набор из четного количества отдельных пьезокерамических (как наиболее технологичного пьезоэлектрика с высокими и стабильными показателями) элементов призматической формы, расположенных вдоль большей оси эллиптической оболочки из упругого, пьезоэлектрически пассивного материала. Пьезоэлементы в пакете установлены по принципу встречной поляризации, а электрически соединены между собой параллельно. При этом внешние электроды набора и соответствующие им внутренние электроды поддерживаются на нулевом потенциале (рис. 1), а к остальным электродам подводится нестационарный электрический потенциал $V(t)$. В результате электрического возбуждения пьезоэлементов возникают продольные колебания составного стержня, которые обуславливают изгибные колебания расположенных по обе его стороны фрагментов оболочки, тем самым генерируя во внешней безграничной акустической среде звуковые волны.

В настоящей работе представлено конечноэлементное решение задачи о нестационарных колебаниях погруженного в акустическую среду пакетного «продольно-изгибного» пьезоэлектрического излучателя [1], схема которого изображена на рис. 1. Конструктивно рассматриваемый пьезопреобразователь представляет собой набор из четного количества отдельных пьезокерамических (как наиболее технологичного пьезоэлектрика с высокими и стабильными показателями) элементов призматической формы, расположенных вдоль большей оси эллиптической оболочки из упругого, пьезоэлектрически пассивного материала. Пьезоэлементы в пакете установлены по принципу встречной поляризации, а электрически соединены между собой параллельно. При этом внешние электроды набора и соответствующие им внутренние электроды поддерживаются на нулевом потенциале (рис. 1), а к остальным электродам подводится нестационарный электрический потенциал $V(t)$. В результате электрического возбуждения пьезоэлементов возникают продольные колебания составного стержня, которые обуславливают изгибные колебания расположенных по обе его стороны фрагментов оболочки, тем самым генерируя во внешней безграничной акустической среде звуковые волны.

Постановка задачи

Колебания пьезокерамических элементов излучателя как механический процесс описывается классическим уравнением [15]

$$\bar{\nabla} \cdot \hat{\sigma} = \rho \bar{u}'' , \quad (1)$$

а с точки зрения электрических явлений – уравнениями вынужденной электростатики

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{D} = 0; \quad \bar{\nabla} \times \bar{E} = 0, \quad (2)$$

которые записаны в предположении отсутствия объемных сил и свободных электрических зарядов при следующих обозначениях: $\hat{\sigma}$ – тензор механических напряжений; \bar{u} – вектор перемещений; \bar{D} , \bar{E} – векторы электрической индукции и напряженности электрического поля; $\bar{\nabla}$ – оператор Гамильтона; ρ – плотность материала; точка над переменной обозначает производную по времени t ; "·", "×" – знаки скалярного и векторного произведений.

Если ввести в рассмотрение (псевдо-) вектор [11] деформаций $\bar{\epsilon} = [\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{23}, 2\epsilon_{13}, 2\epsilon_{12}]^T$ и (псевдо-) вектор напряжений $\bar{\sigma} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}]^T$, содержащие независимые компоненты соответствующих тензорных величин (при этом $\hat{\epsilon} = 0,5(\bar{\nabla} \bar{u} + \bar{u} \bar{\nabla})$, индексом T обозначена операция транспонирования), то связанность механических переменных (1) с переменными электрического поля (2) определяется посредством уравнений состояния пьезоэлектрической среды

$$\bar{\sigma} = \mathbf{c}^E \bar{\varepsilon} - \mathbf{e} \bar{E}, \quad \bar{D} = \mathbf{e}^T \bar{\varepsilon} + \varepsilon^S \bar{E}, \quad (3)$$

где \mathbf{c}^E – симметричная матрица модулей упругости, измеренных при нулевой напряженности электрического поля; \mathbf{e} – матрица пьезоэлектрических модулей; ε^S – матрица коэффициентов диэлектрической проницаемости при постоянных деформациях.

Для упругого элемента исследуемого пьезопреобразователя применимы аналогичные (1) и (3) выражения, в которых пренебрегают электрическими полевыми величинами.

Возмущенное движение внешней жидкой среды моделируется уравнением акустической теории

$$c_w^2 \nabla^2 \phi = \ddot{\phi}, \quad (4)$$

в котором ϕ – потенциальная функция; c_w – скорость распространения звука; ∇^2 – оператор Лапласа. При этом для вектора скорости \bar{v} и звукового давления p будут справедливы равенства

$$\bar{v} = \bar{\nabla} \dot{\phi}, \quad p = -\rho_w \dot{\phi}, \quad (5)$$

где ρ_w – равновесное значение плотности.

При решении задачи дифференциальные уравнения (1) и (4) дополняются начальными условиями для полей перемещений и скоростей и граничными условиями, с помощью которых распределяются параметры на граничных поверхностях элементов, в т. ч. на границе контакта с внешней средой, а также на бесконечности. Применительно к задачам гидроэлектроупругости граничные условия группируют на условия для механических переменных и электрических, первые из которых формулируются аналогично условиям в задачах гидроупругости [16]. Условия электрической природы зависят от расположения токопроводящих покрытий (электродов) и способа подвода или съема электрической энергии [2]. В частности, при возбуждении пьезокерамических элементов с помощью генератора электрического напряжения на электродах Γ_i ($\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, $i \neq j$) задаются значения электростатического потенциала $\psi - \psi|_{\Gamma_i} = V_i$ (через ψ выражается напряженность электрического поля – $\bar{E} = -\bar{\nabla} \psi$). При этом относительно электродов делаются предположения, что они являются весьма тонкими идеальными проводниками с пренебрежимо малой массой и жесткостью на изгиб и растяжение.

Исследование нестационарных колебаний

Решение задачи (1)–(5) строится с помощью программного комплекса ANSYS, реализующего МКЭ. В предположении, что электрическая и механическая нагрузки не зависят от координаты, измеряемой вдоль образующей рассматриваемого пьезоизлучателя, векторы предварительной поляризации элементов составного стержня находятся в перпендикулярной этой образующей плоскости, принято допущение о плоском деформированном состоянии. Также ввиду симметрии схемы электромеханического нагружения и деформаций излучателя относительно большой и малой осей упругой оболочки за расчетную геометрическую область к задаче принимается 1/4 часть полной, построение которой выполнено на основании подхода «снизу вверх» – задавались ключевые точки подобластей, через эти точки проводились линии и формировались площади из ограничивающих их линий. КЭ-сетка создавалась в режиме упорядоченного разбиения с использованием квадратичных конечных элементов, при этом занимаемые пьезокерамическими элементами площади разбивались на КЭ с компонентами вектора перемещений \bar{u} (u_x и u_y) и электрическим потенциалом ψ в качестве узловых степеней свободы, а площадь под упругую оболочку – на аналогичные КЭ, но не содержащие переменную электрического поля.

Следует отметить, что при составлении на языке APDL (ANSYS Parametric Design Language) массивов материальных свойств пьезокерамики отталкивались от следующих матриц упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических постоянных (см. (3))

учитываются диссипативные эффекты ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$), клеточную структуру входящих в систему (7) матриц и правой части можно представить как

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & & \\ & \mathbf{0} & \\ \mathbf{R}_{pu} & & \mathbf{M}_{pp} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\psi} & \mathbf{R}_{up} \\ \mathbf{K}_{u\psi}^T & \mathbf{K}_{\psi\psi} & \\ & & \mathbf{K}_{pp} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_\psi \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

причем матрица \mathbf{M}_{uu} отражает инерционные свойства твердотельной среды; матрицы \mathbf{K}_{uu} , $\mathbf{K}_{u\psi}$, $\mathbf{K}_{\psi\psi}$ включают упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические свойства системы; \mathbf{M}_{pp} , \mathbf{K}_{pp} – матрицы масс и жесткости акустической среды; \mathbf{R}_{up} – «связующая» матрица; \mathbf{F}_u , \mathbf{F}_ψ – векторы приведенных к узловым механическим нагрузкам и электрических зарядов.

Следует отметить, что конечноэлементная аппроксимация (6), формирование системы уравнений (7) и ее решение выполняются программным комплексом в автоматическом режиме и, соответственно, не требуют вмешательства пользователя. При этом решение (7) строится на каждом шаге по времени $m\Delta t$ ($m = 1, 2, \dots$; Δt – шаг интегрирования) с использованием классической схемы Ньюмарка при обеспечивающих устойчивость вычислительного процесса параметрах.

Численные результаты

Расчеты проводились при нулевых начальных условиях для преобразователя, срединная поверхность оболочки которого имеет близкую к эллиптической форму, при этом большая и малая оси эллипса равны 56 мм и 18 мм соответственно, толщина оболочки – 2 мм. Составной стержень включает 16 элементов толщиной 3 мм и высотой 10 мм. Материал оболочки – титановый сплав ВТ-6, элементов стержня – пьезокерамика марки PZT-5 (физические характеристики приведены в [5]). Акустическая среда – вода с $\rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3$ и $c_w = 1500 \text{ м/с}$.

На рис. 2 изображен фрагмент готовой конечноэлементной модели расчетной области, на которой с использованием встроенных в ANSYS обозначений показаны граничные условия, направления элементных систем координат и взаимное расположение КЭ, которые имели место на этапе запуска на счет. Цифрами 1 и 2 на этом рисунке отмечены наиболее характерные точки излучателя, отцентровые перемещения которых ($u_x^{(1)}$ и $u_y^{(2)}$) позволяют оценить продольные колебания составного стержня и изгибные колебания упругой оболочки.

На рис. 3 представлены результаты расчета перемещений точки 1 (кривая 1') и точки 2 (кривая 2') при возбуждении излучателя электрическим сигналом ступенчатого профиля ($V(t) = V_0 H(t)$, где $V_0 \approx 70,71 \text{ В}$; $H(t)$ – единичная функция Хевисайда). Для сравнения линиями 1 и 2 приведены эпюры перемещений одноименных точек, когда снаружи преобразователя вакуум. Из приведенных графиков видно, что наличие жидкой среды приводит к некоторому снижению уровня отцентровых перемещений точки в средней части излучающего фрагмента оболочки (для принятых исходных данных отличие экстремальных значений достигает примерно 12%) и увеличению периода низшей формы ее изгибных колебаний ($T_1 \approx 1,34 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ – в вакууме; $T_2 \approx 2,62 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ – в воде). При этом для выбранной конфигурации электрического сигнала находящийся в акустической среде пьезопреобразователь достаточно быстро выходит на статическое деформированное состояние (кривые 1' и 2'), относительно которого имеют место периодические его колебания в случае отсутствия внешней среды (кривые 1 и 2).

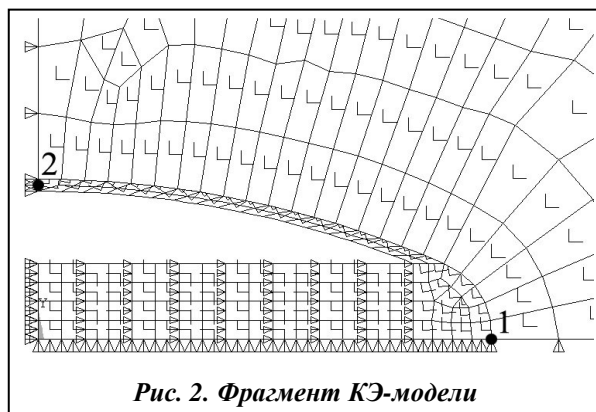


Рис. 2. Фрагмент КЭ-модели

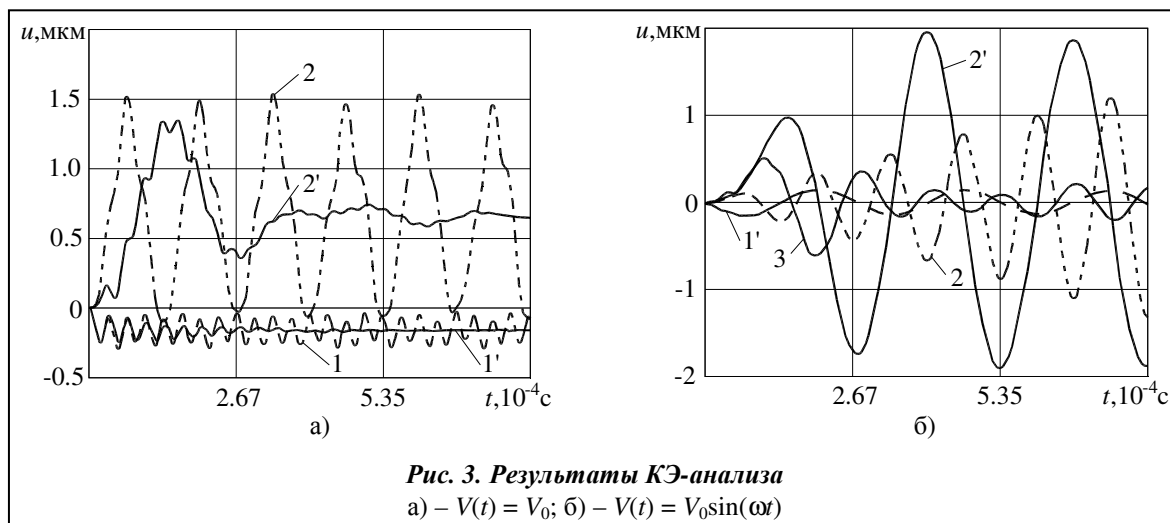


Рис. 3. Результаты КЭ-анализа

а) – $V(t) = V_0$; б) – $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$

При приложении к электродам погруженного в воду преобразователя синусоидальной электрической нагрузки $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$ с частотой $\omega = 2\pi/T_2 \approx 24 \cdot 10^3$ 1/с амплитуда колебаний точки 2 на начальном этапе исследования нарастает, затем наблюдаются практически установившиеся во времени деформации (кривая 2', рис. 3, б). Эффективность "продольно-изгибного" преобразования колебаний при таком варианте нагружения пьезоизлучателя позволяет оценить сопоставление кривых 2' и 1', последняя из которых отражает динамику изменения перемещений точки 1. Из анализа этих кривых следует, что на исследуемом промежутке времени максимальные перемещения точки 2, характеризующей уровень изгибных колебаний оболочки, превышают максимальные значения продольных перемещений составного стержня приблизительно в 14 раз. Следует отметить, что в случае возбуждения находящегося в вакууме пьезопреобразователя синусоидальным сигналом с частотой $\omega = 2\pi/T_1 \approx 47 \cdot 10^3$ 1/с происходит линейное нарастание значений перемещений точки 2 с ростом t (кривая 2 на рис. 3, а построена с масштабным коэффициентом 0,1 для удобства иллюстрации результатов). Возбуждение этой же нагрузкой погруженного в жидкую среду преобразователя приводит к принципиально иной картине динамического поведения исследуемой точки (кривая 3, рис. 3, б).

Выводы

Выполненная серия расчетов и анализ результатов показали, что КЭ-модель с крупной сеткой дает несколько заниженные значения. КЭ-сетка средней плотности, составленная из квадратичных КЭ или из соответствующих им линейных, приводит к достаточно близким между собой результатам при вычислении механических перемещений и электрического потенциала. Полученный числовой материал свидетельствует о необходимости исследования динамических процессов в пьезоизлучателе и расчете его эксплуатационных параметров с учетом контактирующей с ним жидкой среды. Существенное влияние на характер изгибных колебаний упругой оболочки оказывает конфигурация подводимого к электродам излучателя электрического сигнала. Так, при приложении ступенчатой нагрузки деформации оболочки погруженного в акустическую среду преобразователя при $t > 2T_2$ выходят на статический уровень, а для преобразователя в вакууме имеют место практически периодические колебания относительно некоторого статического деформированного состояния. При воздействии синусоидальным импульсом характер изменения во времени деформаций пьезопреобразователя зависит от частоты электрического сигнала. Для погруженного в акустическую среду пьезопреобразователя через приближенно равный $2T_2$ промежуток времени с момента приложения нагрузки наблюдаются практически установившиеся его колебания, а для преобразователя в вакууме при совпадении частоты нагружения с низшей частотой изгибных колебаний рабочей части упругой оболочки имеет место линейное нарастание значений отцентровых перемещений в ее середине.

В целом, располагая КЭ-моделью, созданной через APDL-программирование, можно решать также различные по постановкам задачи оптимизации геометрии пьезоизлучателя уже на этапе его проектирования, тем самым существенно сокращать объем дорогостоящих натуральных экспериментов или обоснованно определять рациональную программу их проведения.

Литература

1. Дідковський В. С. Електроакустичні п'єзоелектричні перетворювачі (розрахунок, проектування, конструювання) / В. С. Дідковський, О. Г. Лейко, В. Г. Савін. – Кіровоград: Імекс-ЛТД, 2006. – 448 с.
2. *Механика* связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. Т. 5. Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники / Л. А. Бессонов. – М.: Высш. шк., 1996. – 638 с.
4. Дидусенко Ю. А. Звуковое поле системы из двух цилиндрических пьезокерамических излучателей / Ю. А. Дидусенко, А. Г. Лейко // *Электроника и связь*. – 2010. – № 4. – С. 184–187.
5. Подчасов Н. П. Излучение акустической волны с давлением заданного профиля толстостенным цилиндрическим пьезопреобразователем / Н. П. Подчасов, И. В. Янчевский // *Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А. Природничі науки*. – 2012. – № 1. – С. 97–104.
6. Савин В. Г. Действие акустического импульса на плоскую электроупругую систему из биморфов / В. Г. Савин, А. Э. Бабаев // *Інформаційні системи, механіка та керування: наук.-техн. зб.* – 2009. – Вип. 3. – С. 30–40.
7. Babaev A. E. Influence of an oscillating circuit on the radiation of transient acoustic waves by an electroelastic cylinder / A. E. Babaev, A. A. Babaev, I. V. Yanchevskiy // *J. Acoust. Soc. of Am.* – 2010. – Vol. 127, № 4. – P. 2282–2289.
8. Hu J. Axisymmetric vibrations of a viscous-fluid-filled piezoelectric spherical shell and the associated radiation of sound / J. Hu, Zh. Qiu, Ts.-Ch. Su // *J. Sound and Vibration*. – 2011. – Vol. 330, № 24. – P. 5982–6005.
9. Jhung M. J. Free vibration analysis of circular plate with eccentric hole submerged in fluid / M. J. Jhung, Y. H. Choi, Y. H. Ryu // *J. Nuclear Eng. and Technology*. – 2009. – Vol. 41, № 3. – P. 355–364.
10. Богущ М. В. Анализ функции преобразования пьезоэлектрических датчиков давления методом конечных элементов / М. В. Богущ, Э. М. Пикалев // *Изв. Южн. федерал. ун-та. Техн. науки*. – 2008. – № 3. – С. 74–84.
11. Наседкин А. В. Конечно-элементное моделирование гидроакустических пьезопреобразователей / А. В. Наседкин // *Консонанс-2003: тез. докл. симпозиума, г. Киев, 1-3 окт. 2003 г.* – С. 159–164.
12. Avdiaj S. Modeling of the piezoelectric effect using the finite-element method / S. Avdiaj, J. Šetina, N. Sylá // *Materials and Technology*. – 2009. – Vol. 43, № 6. – P. 283–291.
13. Chung G. Finite element modeling of surface acoustic waves in piezoelectric thin films / G. Chung, D. Phan // *J. Korean Phys. Soc.* – 2010. – Vol. 57, № 3. – P. 446–450.
14. Kamath H. Vibration of piezoelectric elements surrounded by fluid media / H. Kamath, M. Willatzen, R. V. N. Melnik // *Ultrasonics*. – 2006. – Vol. 44, № 1. – P. 64–72.
15. *Математическое моделирование в задачах механики связанных полей: В 2 т. Т. I: Введение в теорию термопьезоэлектричества* / Д. И. Бардзюкас, А. И. Зобнин, Н. А. Сенник, М. Л. Фильштинский. – М.: КомКнига, 2010. – 312 с.
16. Гузь А. Н. Гидроупругость систем оболочек / А. Н. Гузь, В. Д. Кубенко, А. Э. Бабаев. – Киев: Наук. думка, 1984. – 208 с.

Поступила в редакцию
18.01.13