УДК 530.1:531.19

КИНЕТИКА ЧАСТИЦ ПОВЕРХНОСТИ ВО ВНЕШНЕМ ФЛУКТУИРУЮЩЕМ ПОЛЕ

В.И. Приходько, П.В. Турбин

Научный физико-технологический центр МОН и НАН Украины (Харьков) Украина

Поступила в редакцию 11.05.2005

Построена кинетика частиц поверхности, находящихся в стохастическом поле [1]. Используя результаты этой работы и работ [2 – 5] рассчитаны законы изменения температуры такой системы за счет внешних полей. Показано возникновение эффективноного "взаимодействия" частиц через стохастическое поле.

ВВЕДЕНИЕ

Займемся изучением конкретной модели – системы невзаимодействующих между собой частиц в случайном поле $\varphi_\omega(x, t)$. Вначале рассмотрим случай одной частицы в случайном поле. Гамильтониан такой модели имеет вид $H = p^2/2m + \varphi_\omega(x, t)$, где x и p – координата и импульс частицы (в двумерном пространстве). Операторы $\Lambda^{(0)}$ и $\Lambda^{(1)}_\omega(t)$ имеют соответственно вид:

$$\Lambda^{(0)} = -i\frac{p}{2m}\frac{\partial}{\partial x},\ \Lambda^{(1)}_\omega(t) = -\int dk\varphi_\omega(k,t)e^{ikx}k\frac{\partial}{\partial p},$$

где $\varphi_\omega(k, t)$ – фурье-компонента поля $\varphi_\omega(x, t)$. Рассмотренная в статье [1] схема с исчерпывающей полнотой описывает в рамках теории возмущений кинетику такой системы. В частности, одночастичный оператор $\overset{1}{L} = -i\overset{1}{\Lambda}{}^{(0)} + \overset{1}{L}$, определяющий эволюцию одночастичной функции распределения $f(x_1, p_1; t) \equiv f(1, t)$ (координату x_1 и импульс p_1 частицы для сокращения обозначений пишем, как 1), может быть найден из уравнения (26) работы [1]. Как показано в [1], корреляционная функция f_S ((17) работа [1]) при $t >> \tau_0$ (τ_0 – временной корреляционный масштаб) становится функционалом одночастичной функции распределения.

Однако если мы перейдем к изучению многочастичной системы невзаимодействующих друг с другом частиц, то наряду с упрощением в описании когда одночастичные корреляционные функции $f_S(f(1, \ldots, n; t))$ становятся функционалами n-частичной функции распределения $f(1, \ldots, n; t)$, появляется дополнительное упрощение, вызванное тем, что благодаря принципу ослабления корреляций для n частичных функций распределения последние в области больших времен становятся функционалами одночастичных функций распределения.

Так как одночастичный "интеграл столкновений" $L(f(1)) = Lf(1)$ не подправляется многочастичными функциями распределения, то может показаться, что n-частичная функция распределения есть произведение n одночастичных функций распределения, но это не так, потому что благодаря случайному полю имеется статистическая связь между частицами. Иначе говоря, исследуемая задача может рассматриваться, как одночастичная в том смысле, что многочастичные функции распределения становятся функционалами одночастичных, а эволюция одночастичных функций определяется "интегралом столкновений", не чувствующим влияния высших функций распределения.

КИНЕТИКА ДВУХЧАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ

Для изучения статистических закономерностей, происходящих в многочастичной системе, мы рассмотрим для простоты, двухчастичную систему. Гамильтониан такой системы имеет вид

$H = \sum_{i=1}^{2}\left(p_i^2/2m_i + \varphi_\omega(x_i,t)\right)$, где x_i и p_i – координата и импульс i-ой частицы. Случайная двухчастичная функция распределения $f_\omega(12; t)$ подчиняется уравнению движения.

Структура гамильтониана такова, что для оператора Λ справедливо представление:

$$\Lambda^{(0)} = -i\left(\frac{\mathrm{p}_1}{m_1}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1} + \frac{\mathrm{p}_2}{m_2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_2}\right),$$

$$\Lambda^{(1)}_{\omega}(t) = -\int dk\varphi_{\omega}(k,t)\left\{e^{ikx_1}k_1\frac{\partial}{\partial p_1} + e^{ikx_2}k_2\frac{\partial}{\partial p_2}\right\}.$$

Уравнение движения для двухчастичной функции распределения имеет вид

$$\partial_t f(12;\, t) = -i\Lambda^{(0)} f(12;\, t) + L(12;\, t),$$
$$L(12;\, t) = Lf(12;\, t). \qquad (1)$$

Будем считать, что для начальной функции распределения $f(12;\, 0)$ справедлив принцип пространственного ослабления корреляций

$$f(12;\, 0) \xrightarrow[x_1 - x_2 \to \infty]{} f(1;\, 0) f(2;\, 0). \qquad (2)$$

Подчеркнем, что $f(12;\, 0)$ – начальная функция распределения по отношению к “кинетическому этапу эволюции”.

Оператор L, очевидно, всегда можно представить в виде

$$L = \overset{1}{L} + \overset{2}{L} + \overset{12}{D}, \qquad (3)$$

где $\overset{i}{L}$ – одночастичный оператор “столкновений” для i-ой частицы. Исходя из уравнений (8) работы [1] можно показать, что когда расстояние между частицами 1 и 2 стремится к бесконечности, оператор $\overset{12}{D}$ стремится к нулю. Более строго это можно сформулировать следующим образом: для любой функции $q(12)$ справедливо соотношение

$$\overset{12}{D} q(12) \xrightarrow[x_1 - x_2 \to \infty]{} 0. \qquad (4)$$

Например, для пространственно-однородного δ-коррелированного во времени процесса имеем

$$\overset{12}{D} = \frac{1}{2}\int dk g(k) e^{ik(x_1 - x_2)} k_i k_j \frac{\partial^2}{\partial p_{1_i}\partial p_{2_j}} =$$

$$D_{ij}(x_1 - x_2)\frac{\partial^2}{\partial p_{1_i}\partial p_{2_j}}, \qquad (5)$$

где $D_{ij}(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} g(x)$. Таким образом, соотношение (4) в этом случае становится тривиальным в силу принципа пространственного ослабления корреляций для случайного процесса. Формальное решение уравнения (1) представимо в виде ряда

$$f(12;t) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-t}^{0} d\tau_1 \int_{-t}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots$$

$$\ldots \int_{-t}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \lambda_n(\tau_1 \ldots \tau_n) e^{-i\Lambda^{(0)}t} f(12;0), \qquad (6)$$

где $\lambda_n(\tau_1 \ldots \tau_n) = (\alpha(\tau_1) + \beta(\tau_1)) + (\alpha(\tau_2) + \beta(\tau_2)) \ldots (\alpha(\tau_n) + \beta(\tau_n))$ и $\alpha(\tau) = e^{i\Lambda^{(0)}\tau}\left(\overset{1}{L} + \overset{2}{L}\right)e^{-i\Lambda^{(0)}\tau}$,

$$\beta(\tau) = e^{i\Lambda^{(0)}\tau}\,\overset{12}{D}\, e^{-i\Lambda^{(0)}\tau}.$$

Из (4) следует, что $\beta(\tau) \xrightarrow[\tau \to \pm\infty]{} 0$, или точнее

$$\beta(\tau) q(12) \xrightarrow[\tau \to \pm\infty]{} 0 \qquad (7)$$

так как $e^{i\Lambda^{(0)}\tau}\vec{x}_i = \vec{x}_i + \dfrac{\vec{p}_i}{m}\tau$, $(i = 1, 2)$.

Дальнейшая задача состоит в нахождении асимптотического поведения функции $f(12;\, t)$ при $t \to \infty$. Легко видеть, что имеет место соотношение

$$\lambda_n(\tau_1 \ldots \tau_n) = \alpha(\tau_1) \ldots \alpha(\tau_n) +$$
$$+ \sum_{l=0}^{n-1}\lambda_1(\tau_1 \ldots \tau_l)\beta(\tau_{l+1})\alpha(\tau_{l+2}) \ldots \alpha(\tau_n), \quad \lambda_0 = 1.$$

С учетом этого соотношения перепишем (6) в виде

$$f(12;t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_{-t}^{0} d\tau_1 \ldots \int_{-t}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \alpha(\tau_1) \ldots \alpha(\tau_n)\right\} +$$

$$+ \sum_{l=0}^{n-1}\left\{\int_{-t}^{0} d\tau_1 \ldots \int_{-t}^{\tau_{l-1}} d\tau_l \int_{-t}^{\tau_l} d\tau_{l+1} \int_{-t-\tau_{l+1}}^{0} d\tau_{l+2} \int_{-t-\tau_{l+1}}^{\tau_{l+2}} d\tau_{l+3} \ldots\right.$$

$$\left.\ldots \int_{-t-\tau_{l+1}}^{\tau_{n-1}} d\tau_n\right\}\lambda_l(\tau_1 \ldots \tau_l)\beta(\tau_{l+1})\alpha(\tau_{l+2} + \tau_{l+1}) \ldots$$

$$\ldots \alpha(\tau_n + \tau_{l+1}) e^{-i\Lambda^{(0)}t} f(12;0). \qquad (8)$$

Заметим теперь, что согласно (2)

$$e^{-i\Lambda^{(0)}t} f(12;0) \xrightarrow[t \to \infty]{} e^{-i\Lambda^{(0)}t} f(1;0) f(2;0).$$

Кроме того, примем во внимание, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-t}^{0} d\tau_1 \ldots \int_{-t}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \alpha(\tau_1) \ldots \alpha(\tau_n) e^{-i\Lambda^{(0)}t} \times$$

$$\times f(12;0) \xrightarrow[t \to \infty]{} f(1;t) f(2;t).$$

Поэтому, обменивая в (8) порядок суммирования по n и l, и учитывая, что

$$f(1,t+\tau)=\exp\left(\tau L(f)\frac{\delta}{\delta f}\right)f(1,t),$$

найдем

$$f(1,2;t)\xrightarrow[t\to\infty]{} f(1;t)f(2;t)+\sum_{l=0}^{\infty}\int_{-t}^{0}d\tau_1\int_{-t}^{\tau_1}d\tau_2\ldots$$

$$\ldots\int_{-t}^{\tau_l}d\tau_{l+1}\lambda_l(\tau_1\ldots\tau_l)\beta(\tau_{l+1})e^{i\Lambda^{(0)}\tau_{l+1}}e^{\tau_{l+1}L(f)\frac{\delta}{\delta f}}\times$$

$$\times f(1;t)f(2;t).$$

Так как согласно (7) $\beta(\tau)\xrightarrow[\tau\to-\infty]{}0$ и $0>\tau_1>\tau_2>\ldots>\tau_{l+1}$, то в последнем выражении нижние пределы интегрирования можно заменить на $-\infty$. В результате получим

$$f(1,2;t)\xrightarrow[t\to\infty]{} f(1;t)f(2;t),$$

$$f(1,2;t)=f(1;t)f(2;t)+\sum_{l=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}d\tau_1\int_{-\infty}^{\tau_1}d\tau_2\ldots$$

$$\ldots\int_{-\infty}^{\tau_l}d\tau_{l+1}\lambda_l(\tau_1\ldots\tau_l)\beta(\tau_{l+1})e^{i\Lambda^{(0)}\tau_{l+1}}e^{\tau_{l+1}L(f)\frac{\delta}{\delta f}}\times$$

$$\times f(1;t)f(2;t). \qquad (9)$$

Таким образом, двухчастичная функция распределения в асимптотической области зависит от времени только через посредство зависимости от времени одночастичной функции распределения.

Представим уравнение (9) в виде удобном для применения итерационной процедуры по взаимодействию со случайным полем, то есть в виде интегрального уравнения. Замечая, что

$\exp(i\Lambda^{(0)}\tau)\alpha(\tau')\exp(-i\Lambda^{(0)}\tau)=\alpha(\tau'+\tau)$,

$\exp(i\Lambda^{(0)}\tau)\beta(\tau')\exp(-i\Lambda^{(0)}\tau)=\beta(\tau'+\tau)$,

и используя определение λ_l, представим второй член правой части уравнения (9) (который обозначим через Q) в виде

$$Q=\int_{-\infty}^{0}d\tau_1\beta(0)e^{i\Lambda^{(0)}\tau_1}e^{\tau_1L(f)\frac{\delta}{\delta f}}f(1;t)f(2;t)+$$

$$+\int_{-\infty}^{0}d\tau_1e^{i\Lambda^{(0)}}(\alpha(0)+\beta(0))\sum_{l=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}d\tau_1\int_{-\infty}^{\tau_1}d\tau_2\ldots$$

$$\ldots\int_{-\infty}^{\tau_l}d\tau_{l+1}(\alpha(\tau_2)+\beta(\tau_2))\ldots(\alpha(\tau_l)+\beta(\tau_l))\beta(\tau_{l+1})\times$$

$$\times e^{i\Lambda^{(0)}\tau_{l+1}}e^{(\tau_{l+1}\tau_1)L(f)\frac{\delta}{\delta f}}f(1;t)f(2;t)$$

Отсюда, используя определение величины Q, получим

$$Q=\int_{-\infty}^{0}d\tau_1\beta(0)e^{i\Lambda^{(0)}\tau_1}e^{\tau_1L(f)\frac{\delta}{\delta f}}f(1;t)f(2;t)+$$

$$+\int_{-\infty}^{0}d\tau_1e^{i\Lambda^{(0)}\tau_1}(\alpha(0)+\beta(0))e^{\tau_1L(f)\frac{\delta}{\delta f}}Q$$

Так как согласно (9)

$$Q=f(12;f(t))-f(1;t)f(2;t),$$

то это соотношение можно переписать в виде

$$f(12;f(t))-f(1;t)f(2;t)=\int_{-\infty}^{0}d\tau_1\beta(0)e^{i\Lambda^{(0)}\tau_1}e^{\tau_1L(f)\frac{\delta}{\delta f}}\times$$

$$\times\{(\alpha(0)+\beta(0))(f(12;f(t))-f(1;t)f(2;t))+$$
$$+\beta(0)f(1;t)f(2;t)\}. \qquad (10)$$

При попытке решения этого уравнения в рамках теории возмущений по случайному полю мы столкнемся с необходимостью разложения в ряд по взаимодействию со случайным полем экспоненты $\exp\{\tau L(f)(\delta/\delta f)\}$. Чтобы обойти эту техническую трудность, воспользуемся следующей леммой.

Лемма. Если оператор $B(f)$, определяемый формулой

$$B(f)=\int_{-\infty}^{0}d\tau e^{i\Lambda^{(0)}\tau}\exp\{\tau L(f)(\delta/\delta f)\}A(f) \qquad (11)$$

существует (где $L(f)=(-iL^{(0)}+L)(f)$, то он удовлетворяет интегральному уравнению

$$B(f)=\int_{-\infty}^{0}d\tau e^{i\Lambda^{(0)}\tau}\{A(f)-$$

$$-L(f)(\delta/f)B(f)\}\Big|_{f\to e^{-i\Lambda^{(0)}\tau}f}. \qquad (12)$$

Доказательство. Вводя определение $A_\tau(f)=e^{\tau L(f)(\delta/\delta f)}A(f)$, нетрудно получить интегральное уравнение для $A_\tau(f)$

$$A_\tau(f)=e^{-i\tau\Lambda^{(0)}\frac{\delta}{\delta f}}A(f)+$$

$$+\int_{0}^{\tau}d\tau'e^{-i(\tau-\tau')\Lambda^{(0)}\frac{\delta}{\delta f}}L(f)\frac{\delta}{\delta f}A_{\tau'}(f).$$

Подставляя это выражение в формулу (11), получим

$$B(f)=\int_{-\infty}^{0}d\tau e^{i\tau\Lambda^{(0)}}e^{-i\tau\Lambda^{(0)}\frac{\delta}{\delta f}}A+$$

$$+\int_{-\infty}^{0} d\tau e^{i\tau\Lambda^{(0)}} \int_0^{\tau} d\tau' e^{-i(\tau-\tau')\Lambda^{(0)}\frac{\delta}{\delta f}} L(f)\frac{\delta}{\delta f}A_{\tau'}(f). \quad (13)$$

Легко видеть, что для второго слагаемого правой части соотношения (13) справедлива цепочка преобразований

$$\int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\tau\Lambda^{(0)}}\int_0^\tau d\tau' e^{-i(\tau-\tau')\Lambda^{(0)}\frac{\delta}{\delta f}} L(f)\frac{\delta}{\delta f}A_{\tau'}(f)=$$

$$=-\int_{-\infty}^0 d\tau'\int_0^{\tau} d\tau e^{i\tau\Lambda^{(0)}} e^{-i(\tau-\tau')\Lambda^{(0)}\frac{\delta}{\delta f}} L(f)\frac{\delta}{\delta f}A_{\tau}(f)=$$

$$=-\int_{-\infty}^0 d\tau' s\int_0^{\tau'} d\tau e^{i(\tau+\tau')\Lambda^{(0)}} e^{-i\tau\Lambda^{(0)}\frac{\delta}{\delta f}} L(f)\frac{\delta}{\delta f}A_{\tau'}(f)=$$

$$=-\int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\tau\Lambda^{(0)}} e^{-i\tau\Lambda^{(0)}\frac{\delta}{\delta f}} L(f)\frac{\delta}{\delta f}B(f).$$

Итак, выражение (13) принимает вид

$$B(f)=\int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\tau\Lambda^{(0)}} e^{-i\tau\Lambda^{(0)}\frac{\delta}{\delta f}}\left\{A(f)-L(f)\frac{\delta}{\delta f}B(f)\right\}.$$

Замечая, что $e^{-i\tau\Lambda^{(0)}\frac{\delta}{\delta f}}K(f)=K\left(e^{i\tau\Lambda^{(0)}}f\right)$, где $K(f)$ – некоторый функционал f, мы приходим к интегральному уравнению (12).

Используя эту лемму, и, замечая, что $\alpha(0)=\overset{1}{L}+\overset{2}{L}$, $\beta(0)=\overset{12}{D}$, представим уравнение (10) в следующем виде

$$f(12;f(t))=f(1;t)f(2;t)+\int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\Lambda^{(0)}\tau}\times$$

$$\times\{\alpha(0)+\beta(0)-L(f)(\delta/\delta f)\}f(12;f(t))\Big|_{f\to e^{-i\Lambda^{(0)}\tau}f}.$$

Вспоминая определения величин $\alpha(\tau)$ и $\beta(\tau)$, перепишем интегральное уравнение в окончательном виде

$$f(12;\mathrm{f}(t))=f(1;t)f(2;t)+\int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\Lambda^{(0)}\tau}\Big\{\overset{1}{L}+\overset{2}{L}+\overset{12}{D}-$$

$$-L(f)(\delta/\delta f)\Big\}f(12;f(t))\Big|_{f\to e^{-i\Lambda^{(0)}\tau}f}. \qquad (14)$$

Находя величины $\overset{i}{L}$ и $\overset{12}{D}$ с помощью уравнений (3)в виде рядов теории возмущений по взаимодействию со случайным полем, легко из уравнения (14) найти $f(12;f(t))$ также в виде ряда теории возмущений.

Однако, стандартная теория возмущений, связанная со слабостью взаимодействия применима не всегда. Для исследования области ее применимости удобно исходить из явного выражения (9) для $f(12;f(t))$, которое позволяет просто строить ряды теории возмущений по $\overset{12}{D}$ или β (а не одновременно по величинам $\overset{12}{D}$, $\overset{1}{D}$, $\overset{2}{D}$). Для построения такой теории возмущений исходим из уравнения (9), согласно которому двухчастичная функция распределения имеет вид

$$f(12;f(t))=f(1;t)f(2;t)+f^{(1)}(12;f(t))+$$
$$+f^{(2)}(12;f(t))+\ldots+f^{(l)}(12;f(t))=$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\int_{-\infty}^0 d\tau_1\ldots\int_{-\infty}^{\tau_{l-1}}d\tau_l\int_{-\infty}^0 d\tau_{l+1}\alpha(\tau_1)\ldots\alpha(\tau_l)\times \qquad (15)$$

$$\times\beta(\tau_{l+1})e^{i\Lambda^{(0)}\tau_{l+1}}e^{\tau_{l+1}L(f)\frac{\delta}{\delta f}}f(1;t)f(2;t)\vartheta(\tau_l-\tau_{l+1}).$$

Так как $0>\tau_1>\ldots>\tau_l>\tau_{l+1}$, то $f^{(1)}(12;f(t))$ можно переписать в виде

$$f^{(1)}(12;f(t))=\int_{-\infty}^0 d\tau\sum_{l=0}^{\infty}\int_\tau^0 d\tau_1\ldots\int_\tau^{\tau_{l-1}}d\tau_l\alpha(\tau_1)\ldots\alpha(\tau_l)\times$$

$$\times\beta(0)e^{i\Lambda^{(0)}\tau}e^{\tau L(f)\frac{\delta}{\delta f}}f(1;t)f(2;t).$$

Поскольку имеет место соотношение

$$\sum_{l=0}^{\infty}\int_\tau^0 d\tau_1\ldots\int_\tau^{\tau_{l-1}}d\tau_l\alpha(\tau_1)\ldots\alpha(\tau_l)e^{i\Lambda^{(0)}\tau}=$$

$$=e^{-\tau\left(\overset{1}{L}+\overset{2}{L}\right)}=\left\{T\exp\int_\tau^0 d\tau'\alpha(\tau')\right\}e^{i\Lambda(0)\tau}, \qquad (16)$$

то

$$f^{(1)}(12;f(t))=\int_{-\infty}^0 d\tau e^{-\tau\left(\overset{1}{L}+\overset{2}{L}-L(f)\frac{\delta}{\delta f}\right)}\beta(0)f(1;t)f(2;t)$$

Аналогичным образом, нетрудно получить выражение для $f^{(2)}(12;f(t))$

$$f^{(2)}(12;f(t))=$$

$$=\int_{-\infty}^0 d\tau\int_{-\infty}^0 d\tau' e^{-\tau\left(\overset{1}{L}+\overset{2}{L}-L(f)\frac{\delta}{\delta f}\right)}\beta(0)e^{-\tau'\left(\overset{1}{L}+\overset{2}{L}-L(f)\frac{\delta}{\delta f}\right)}\times$$

$$\times\beta(0)f(1;t)f(2;t). \qquad (17)$$

Выясним, какому малому параметру соответствует формальное разложение $f(12; f(t))$ в ряд по степеням β или $\overset{12}{D}$. Ограничиваясь для простоты случаем δ-коррелированного процесса, для которого $[\alpha(\tau), \alpha(\tau')] = 0$ (напомним, что для такого процесса

$$\alpha(\tau)=\overset{1}{\alpha}(\tau)+\overset{2}{\alpha}(\tau),$$

где $\overset{1}{\alpha}(\tau)=\overset{1}{D}\delta_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial p_{1_i}}-\frac{\tau}{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial p_{1_j}}-\frac{\tau}{m}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$)

и, используя соотношения (15), (16), (17), получим $f^{(1)}(12;\, f(t)) =$

$$= \int_{-\infty}^{0}d\tau\left\{\exp\int_{\tau}^{0}d\tau'\left(\overset{1}{D}\delta_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial p_{1_i}}-\frac{\tau'}{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial p_{1_j}}-\frac{\tau'}{m}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\overset{2}{D}\delta_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial p_{2i}}-\frac{\tau'}{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial p_{2j}}-\frac{\tau'}{m}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)\right\}\times$$

$$\times\overset{12}{D}_{mn}\left(x+\frac{\tau}{m}(p_1-p_2)\right)\left(\frac{\partial}{\partial p_{1m}}-\frac{\tau}{m}\frac{\partial}{\partial x_m}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial p_{1n}}-\frac{\tau'}{m}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\cdot e^{i\Lambda^{(0)}\tau}e^{\tau L(f)\frac{\delta}{\delta f}}f(1;t)f(2;t).$$

В случае пространственной однородности одночастичных функций распределения $f(i, t)$ выражение значительно упрощается и его можно представить в следующем виде

$$f^{(1)}(p_1, p_2; f) = R(x, p_1-p_2)f(p_1, t)f(p_2, t),$$

$$R(x, p_1-p_2) = \tag{18}$$

$$= \int_{-\infty}^{0}d\tau\left\{\exp\int_{\tau}^{0}d\tau_0\left(2\frac{\tau_0-\tau}{m}\left(-\overset{1}{D}\frac{\partial^2}{\partial p_{1_i}\partial x_i}+\overset{2}{D}\frac{\partial^2}{\partial p_{2_i}\partial x_i}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(\tau_0-\tau)^2}{m^2}\left(\overset{1}{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\overset{2}{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right)\right\}\times$$

$$\times\overset{12}{D}_{mn}(x)\Big|_{x\to x+\frac{\tau}{m}(p_1-p_2)}\frac{\partial^2}{\partial p_{1_m}\partial p_{1_n}}.$$

Выражение (18) представляет собой поправку первого порядка по $\overset{12}{D}$ с учетом всех порядков по $\overset{i}{D}$ к двухчастичной функции распределения $f(p_1, p_2; f)$.

Вводя фурье-компоненты одночастичных функций распределения

$$f(p_i, t) = \int dq_i \exp(iq_ip_i)f(q_i, t)$$

и фурье-компоненту функции $\overset{12}{D}_{nm}$,

$$\overset{12}{D}_{nm} = \int dk \exp(ikx)\overset{12}{D}_{mn}(k),$$

запишем формулу (18) в виде

$$f^{(1)}(p_1, p_2; f) = \int dq_1dq_2R(k, q_1, q_2, p_1-p_2)\times$$
$$\times f(q_1, t)f(q_2, t), \tag{19}$$

где $R(k, q_1, q_2, p_1-p_2) = q_{1_m}q_{2_n}\overset{12}{D}_{mn}(k)\times$

$$\times\int_{-\infty}^{0}d\tau\exp\left(ik\frac{\tau}{m}(p_1-p_2)\right)\exp\left\{-\frac{\tau^2}{m}\left(-\overset{1}{D}k_iq_{2_i}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\overset{2}{D}k_iq_{1_i}\right)+\frac{\tau^3}{3m^2}\left(\overset{1}{D}+\overset{2}{D}\right)k^2\right\}. \tag{20}$$

(Заметим, что интеграл по τ абсолютно сходится, так как $\overset{1}{D}>0$, $\overset{2}{D}>0$). Займемся исследованием подынтегрального выражения в последней формуле. Поскольку основной вклад в интеграл вносит та область изменения τ, где показатель экспоненты меньше или порядка единицы, то пренебрегая членом квадратичным по τ (в дальнейшем будут выяснены условия применимости этого приближения), получим соотношение, определяющее область изменения переменной τ, дающей вклад в (20)

$$k\frac{\tau}{m}|p_1-p_2|+\frac{\tau^3}{3m^2}\left(\overset{1}{D}+\overset{2}{D}\right)k^2\le 1. \tag{21}$$

В интеграле (20) до перехода в асимптотическую область нижний предел интегрирования есть $-t$. Поэтому при стремлении t к бесконечности ($t\to\infty$) в формуле (20) можно писать нижний предел интегрирования $-\infty$, как только $t \gg \tau_0$, где характерное время τ_0 определяется из соотношения (21). Иначе говоря, τ_0 есть то время, по истечении которого двухчастичная функция распределения становится функционалом одночастичной функции распределения.

Вернемся к соотношению (21). Исследование этого соотношения проведем в двух следующих предельных случаях:

1-*й случай*. Предположим, что в соотношении (21) второе слагаемое пренебрежимо мало по сравнению с первым. Тогда характерное время τ_1 определяется формулой

$$\tau_1 = m/k|p_1 - p_2|,$$

а для справедливости сделанного предположения должно выполняться неравенство

$$\sigma_1 = mD/k|p_1 - p_2|^3 << 1.$$

Кроме этого, из требования малости члена квадратичного по τ в показателе экспоненты в (20) получаем такой критерий

$$mD/k|p_1 - p_2|^2 << 1,$$

где $\overline{p} \sim 1/q_1$, $1/q_2$ – характерный средний импульс частиц. Найдем, наконец, тот малый параметр разложению, по степеням которого соответствует формула (15). Очевидно, чтобы разложение (15) имело место, должно выполняться неравенство $\gamma_1 = \dfrac{f^{(1)}(p_1,p_2;f)}{f(p_1,t)f(p_2,t)} << 1$,

или согласно (19) $\gamma_1 \sim \overset{12}{D} m/k\,\overline{p}^2|p_1 - p_2| << 1$. Таким образом, пренебрегая в показателе экспоненты в формуле (20) величинами квадратичными и кубичными по τ, получим

$$f^{(1)}(p_1, p_2; f) = \int_{-\infty}^{0} d\tau \overset{12}{D}_{mn}\left(x + \frac{\tau}{m}(p_1 - p_2)\right)\frac{\partial^2}{\partial p_{1_m}\partial p_{1_n}} \times$$

$$\times f(p_1, t) f(p_2, t). \qquad (22)$$

Представим это выражение в таком виде, чтобы параметр γ_1 был выделен явно. Выбирая систему координат с началом в точке x_2 и осью z вдоль вектора $p_1 - p_2$, имеем согласно (22)

$$f^{(1)}(p_1 - p_2; f) =$$

$$= \frac{m}{\left|\vec{p}_1 - \vec{p}_2\right|}\int_{-\infty}^{z} dz' \overset{12}{D}_{mn}(x, y, z')\frac{\partial^2}{\partial p_{1_m}\partial p_{1_n}} \times$$

$$\times f(p_1, t) f(p_2, t). \qquad (23)$$

Поскольку функция $\overset{12}{D}_{mn}(x)$ имеет характерный масштаб r_0 (r_0 – радиус корреляции случайного процесса), то интеграл по z' масштаба $r_0 \overset{12}{D} = \overset{12}{D}/k$; производная $\partial^2/\partial p_{1m}\partial p_{1n}$ масштаба $1/\overline{p}^2$, поэтому мы снова видим, что выражение (23) есть величина первого порядка по γ_1.

Обратим внимание на то, что из выражения (23) следует, что $f^{(1)}(p_1 - p_2; f)$ в соответствии с принципом ослабления корреляций обращается в ноль, если $|x_1 - x_2| = |z| \to \infty$; исключение составляет тот случай, когда $z \to \infty$ оставаясь при этом параллельным направлению $p_1 - p_2$ (если $z \to \infty$ антипараллельно $p_1 - p_2$, то принцип ослабления корреляций также выполняется). Это свойство является общим свойством огрубленных многочастичных функций распределения (являющихся функционалами одночастичных функций распределения) в статистической механике, что связано с необратимостью макроскопических процессов.

Формула (23) соответствует стандартной теории возмущений. Заметим, что при $p_1 \approx p_2$ ряд теории возмущений по γ_1 будет содержать секулярные слагаемые, что показывает, что в области $p_1 \approx p_2$ стандартная теория возмущений не применима.

2-ой случай. Предположим, что в соотношении (21) первое слагаемое пренебрежимо мало по сравнению со вторым. Тогда характерное время τ_2 определяется формулой $\tau_2 = (m^2/Dk^2)^{1/3}$, а для справедливости сделанного предположения должно выполняться неравенство $\sigma_2 = mD/k|p_1 - p_2|^3 >> 1$. Кроме этого, из требования малости члена квадратичного по τ в показателе экспоненты в (20) получим критерий $(kD/\overline{p}m)(m^2/Dk^2)^{1/3} << 1$. Найдем, наконец, тот малый параметр, разложению по степеням которого соответствует формула (15). Очевидно, таким параметром является величина

$$\gamma_2 = \frac{f^{(1)}(p_1, p_2; f)}{f(p_1,t)f(p_2,t)} \approx (\overset{12}{D}/\overline{p}^2)(m^2/Dk^2)^{1/3},$$

$$\gamma_2 << 1.$$

В рассматриваемом приближении выражение для двухчастичной функции распределения получается, если величину R из (20) взять в виде

$$R(k, q_1, q_2, \overline{p_1 - p_2}) =$$

$$= q_{1_m} q_{2_n} \overset{12}{D}_{mn}(k)\int_{-\infty}^{0} d\tau \exp\left\{\frac{\tau^3}{3m^2}\left(\overset{1}{D} + \overset{2}{D}\right)k^2\right\}.$$

Тогда имеем

$$f^{(1)}(p_1 p_2; f) =$$

$$= \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\int dk e^{ikx} \overset{12}{D}_{mn}(k)\left[3m^2\Big/\left(\overset{1}{D} + \overset{2}{D}\right)k^2\right]^{1/3} \times$$

$$\times\frac{\partial^2}{\partial p_{1m}\partial p_{1n}} f(p_1,t)\, f(p_2,t)\,,$$

где Г(1/3) – значение Г(z) функции при $z = 1/3$. Это выражение в отличие от выражения (23) не содержит секулярных слагаемых при $p_1 \approx p_2$. Считая $\overset{12}{D} \sim D$, мы видим, что в рассматриваемой области переменной $|p_1-p_2|$ построенная теория возмущений соответствует разложению по степеням $D^{2/3}$. Из формулы (17) видно, что функция $f^{(2)}$ будет масштаба γ^2 по отношению к $f^{(0)} \equiv f(1,t)f(2,t)$. Таким образом, построенная нами теория возмущений по степеням $\overset{12}{D}$ равномерно применима во всей области изменения $|p_1 - p_2|$, в отличие от стандартной теории возмущений, справедливой в области не слишком малых значений $|p_1 - p_2|$.

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ И ЗАКОНЫ НАГРЕВА СИСТЕМЫ

Построим теперь квантовое кинетическое уравнение для одночастичной матрицы плотности и на его основе найдем закон возрастания температуры приповерхностного слоя.

Рассмотрим задачу, гамильтониан которой имеет вид

$$H = H_0 + \varphi_\omega(\hat{x},t)\,, \qquad (24)$$

где H_0 – гамильтониан "свободной" частицы $\varphi_\omega(\hat{x},t)$ описывает взаимодействие со случайным полем. Представив оператор взаимодействия в виде

$$\varphi_\omega(\hat{x},t) = \int dy \varphi_\omega(y,t)\delta(y-\hat{x})\,,$$

где $\varphi_\omega(y, t)$ – некоторое случайное и, по предположению, стационарное поле, мы видим, что в данной задаче структура оператора $a(y,\tau)$ такова $a(y,\tau) = e^{iH_0\tau}\delta(y-\hat{x})e^{-iH_0\tau}$.

Используя представление "интеграла столкновений" [1] выпишем его выражение, удерживая лишь линейные и квадратичные по полю члены

$$L = -i\int dy a(y,0)\{\chi_1(y,0) - i\int dy' \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{0} d\tau \tilde{\chi}_2(y,0,y',\tau) a(y',0)\}\,, \qquad (25)$$

где согласно определениям [1] величин χ и $\tilde{\chi}$, $\chi_1(y,0) = \langle\varphi_\omega(y,0)\rangle$ и $\tilde{\chi}_2(y,0,y',\tau) = \langle\varphi_\omega(y,0)\varphi_\omega(y',\tau)\rangle - \langle\varphi_\omega(y,0)\rangle\langle\varphi_\omega(y',\tau)\rangle$. Тогда кинетическое уравнение для одночастичной матрицы плотности $\hat{f}$ принимает вид

$$\partial_t \hat{f} + i\Lambda^{(0)}\hat{f} = L\hat{f}\,, \qquad (26)$$

где L определяется (25), а операторы $\Lambda^{(0)}$ и $a(y,\tau)$ действуют не в гильбертовом пространстве векторов состояний, а в пространстве одночастичных операторов. С учетом последнего замечания уравнение движения (25) можно переписать, очевидно, в следующей форме

$$\partial_t \hat{f} + i[H_0,\hat{f}] = -i\int dy \chi_1(y,0)[\delta(y-\hat{x}),\hat{f}] -$$

$$-\int dy dy' \int\limits_{-\infty}^{0} d\tau \tilde{\chi}_2(y,0,y'\tau)\times$$

$$\times[\delta(y-\hat{x}),[e^{iH_0\tau}\delta(y'-\hat{x})e^{-iH_0\tau},\hat{f}]], \qquad (27)$$

где квадратные скобки обозначают коммутатор операторов, $[A, B] \equiv AB - BA$. На языке матричных элементов в импульсном представлении $\langle 1|\hat{f}|2\rangle = f_{12}$ кинетическое уравнение (27) имеет вид

$$\partial_t f_{12} + i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) f_{12} = -i\sum_{1'}\langle\varphi(1'-1)\rangle f_{1'2} -$$

$$-i\sum_{1'}\langle\varphi(2-1')\rangle f_{11'} + \qquad (28)$$

$$+(-\pi\sum_{1'2'}\int d\gamma\{f_{11'}\tilde{\chi}_2(2'-1',0;2-2';-\gamma)\delta_-(\gamma_{1'2'}-\gamma) -$$

$$- f_{1'2'}\tilde{\chi}_2(1'-1,0;2-2';-\gamma)\delta_-(\gamma_{1'2'}-\gamma)\} + h.c.),$$

где $\gamma_{12} \equiv \varepsilon_1 - \varepsilon_2$,

$\tilde{\chi}_2(1-2,0;3-4;\gamma) = (1/2\pi)\int d\tau e^{i\tau\gamma}\tilde{\chi}_2(1-2,0;3-4;\tau)$,

$\langle\varphi(1-2)\rangle = ((2\pi)^3/V)\int d^3y \langle\varphi(y)\rangle e^{i(1-2)y}$,

$$\tilde{\chi}_2(1-2,0;3-4;\tau) = \frac{(2\pi)^6}{V^2}\times$$

$$\times\int d^3y d^3y' \tilde{\chi}_2(y,0;y',\tau) e^{i(1-2)y} e^{i(3-4)y'}\,.$$

Отметим, что $\langle\varphi\rangle$ не зависит от времени ввиду стационарности случайного поля.

Уравнение (28) определяет изменение функции f_{12} со временем за счет взаимодействия частиц системы со случайным полем. Члены линейные по $\langle\varphi\rangle$ соответствуют приближению самосогласованного поля в обычном кинетическом уравнении, а квадратичные по $\langle\varphi\rangle$ – "интегралу столкновений".

В пространственно-однородном случае, когда $f_{12}=f_1\delta_{12}$, $\langle\varphi\rangle=0$, а величина содержит импульсный символ Кронекера $\delta_{1-2,\,3-4}$, т.е. $\tilde{\chi}_2(1-2,0;3-4;\ \gamma)=\tilde{\chi}_2(1-2,\gamma)\delta_{1-2,\,3-4}$, кинетическое уравнение (28) значительно упрощается

$$\partial_t f_p=-\pi\sum_{12}\int d\gamma(\delta_{1p}-\delta_{2p})(f_1-f_2)\{\tilde{\chi}_2(2-1;\gamma)+$$

$$+\tilde{\chi}_2(2-1;-\gamma)\}\delta(\gamma_{12}-\gamma)\equiv L_p(f) \qquad (29)$$

(считаем, что $\tilde{\chi}_2(k;\ \gamma)+\tilde{\chi}_2(-k;\ \gamma)$). В пространственно-неоднородном случае состояние системы можно характеризовать вигнеровской функцией распределения

$$f_p(x)=\sum_q e^{iqx} f_{p+\frac{q}{2},\,p-\frac{q}{2}}\,.$$

Кинетическое уравнение для этой функции легко получить из уравнения (28), если ввести величину $L_p(x)=\sum_q e^{iqx} L_{p+\frac{q}{2},\,p-\frac{q}{2}}$ и рассмотреть случай, когда характерные размеры неоднородности системы l много больше радиуса корреляций случайного поля r_0 ($l>>r_0$). При этом можно ограничиться членами линейными по градиентам функции $f_p(x)$, а интеграл столкновений $L_p(x)$ взять в нулевом по градиентам приближения

$$\frac{\partial f_p}{\partial t}+\frac{p_k}{m}\frac{\partial f_p}{\partial x_k}-\frac{\partial\langle\varphi(x)\rangle}{\partial x_k}\frac{\partial f_p}{\partial p_k}=L_p(x)\,. \qquad (30)$$

Интеграл столкновений $L_p(x)$ при этом формально совпадает с интегралом столкновений для пространственно-однородного случая (29), если в последнем f_p заменить на $f_p(x)$. Как видно, в квантовом случае во втором приближении по взаимодействию "интеграл столкновений" уже не имеет Фоккер-Планковской формы.

При некоторых предположениях относительно функции $\tilde{\chi}_2$ можно проследить дальнейшее упрощение в описании рассматриваемой системы и формирование нового параметра сокращенного описания. Пусть $\tilde{\chi}_2(2-1;\ \pm\gamma)$ как функция γ отлична от нуля лишь при малых γ. Разлагая $\delta(\gamma_{12}-\gamma)$ в уравнении (29) получим

$$L_p(f)=L_p^{(0)}(f)+L_p^{(1)}(f)+L_p^{(2)}(f)+\ldots$$

где $L_p^{(0)}(f)=-\pi\sum_{12}\int d\gamma(\delta_{1p}-\delta_{2p})\delta(\gamma_{12})(f_1-f_2)\times$

$$\times\{\tilde{\chi}_2(2-1;-\gamma)+\tilde{\chi}_2(2-1;\gamma)\}\,,\quad L_p^{(1)}(f)=0\,,$$

$$L_p^{(2)}(f)=-\frac{\pi}{2}\sum_{12}\int d\gamma\gamma^2(\delta_{1p}-\delta_{2p})\delta''(\gamma_{12})\times$$

$$\times(f_1-f_2)\{\tilde{\chi}_2(2-1;-\gamma)+\tilde{\chi}_2(2-1;\gamma)\}\,.$$

Очевидно, что

$$\int d\Omega_p L_p^{(0)}(f)=0\,, \qquad (31)$$

где $d\Omega_p$ – элемент телесного угла в p-пространстве.

Так как $|L_p^{(0)}(f)|>>|L_p^{(2)}(f)$, то с учетом последнего соотношения (31) функция распределения по энергии, определяемая как

$$n(x,\,\varepsilon,\,t)=(1/4\pi)\int d\Omega_p f_p(x,\,t)$$

будет меняться значительно медленнее функции $f_p(x,\ t)$, которая фактически будет "подстраиваться" под мгновенное значение $n(x,\,\varepsilon,\,t)$. Функция распределения по энергии оказывается параметром сокращенного описания. Упрощение в описании системы, связанное с формированием нового параметра, обусловлено тем, что интеграл столкновений допускает разбиение на два слагаемых, одно из которых $L_p^{(0)}(f)$ производит хаотизацию одночастичной функции распределения по направлениям импульсов, формируя тем самым функцию распределения по энергии, а второе, более "слабое" $L_p^{(2)}(f)$ слагаемое, обеспечивает эволюцию этой функции распределения.

Таким образом, возникает следующая иерархия времен. Время τ_l, определяемое

$L_p^{(0)}(f)$, $\tau_l \sim \dfrac{1}{|\widetilde{\chi}_2|}$ значительно меньше времени τ_r ($\tau_l << \tau_r$), определяемого $L_p^{(2)}$, $\tau_r \sim \dfrac{V}{r_0\gamma}\tau_l$, $\gamma << \dfrac{v}{r_0}$, поскольку разложение по степеням γ предполагает малость изменения функции $\widetilde{\chi}_2(k;\tau)$ (являющейся, по сути дела, корреляционной функцией поля) за время пролета частицей "области взаимодействия".

Поэтому при временах $t >> \tau_l$ (τ_l определяется формулой (37)) $f_p(x, t)$ будет функционалом $n(x, \varepsilon, t)$,

$$f_p(x,t)\xrightarrow[t>>t_l]{} f_p(x,n(x',\varepsilon',t))\equiv f(n).$$

Этот функционал удовлетворяет условию

$$n(x,\varepsilon,t)=\frac{1}{4\pi}\int d\Omega_p f_p(x,n(x',\varepsilon',t)). \quad (32)$$

Теперь, интегрируя кинетическое уравнение (30), и, учитывая соотношение (31), получим уравнение движения для $n(x, \varepsilon, t)$

$$\partial_t n+\operatorname{div}\frac{1}{4\pi}\int d\Omega_p \frac{p}{m} f(n)=\int d\Omega_p L_p^{(2)}(f). \quad (33)$$

Ввиду сделанных при выводе кинетического уравнения (30) предположений о слабой неоднородности системы функционал $f_p(x, n(x', \varepsilon', t))$ можно представить в виде

$$f_p(x, n(x', \varepsilon', t)) = n(x, \varepsilon, t) + \delta f_p + \ldots , \quad (34)$$

где δf_p может содержать члены, пропорциональные градиенту $n(x, \varepsilon, t)$ и параметру γ_0^2, связанному с разложением по степеням γ $\delta(\gamma_{12}-\gamma)$, входящей в $L_p(f)$. Заметим, что в силу условия (32) интеграл по $d\Omega_p$ от δf_p обращается в нуль

$$\int d\Omega_p \delta f_p = 0. \quad (35)$$

Нетрудно написать уравнение для определения δf_p. Согласно (30) это уравнение имеет вид

$$\overline{\frac{\partial n}{\partial t}}+\frac{p}{m}\frac{\partial n}{\partial x}=L_p^{(0)}(\delta f)+L_p^{(2)}(n), \quad (36)$$

где $\overline{\dfrac{\partial n}{\partial t}}$ – скорость изменения функции распределения по энергии, найденная в линейном по градиентам и по параметру γ_0^2 приближении. Учтем, что в силу (32) $\overline{\dfrac{\partial n}{\partial t}}=L_p^{(2)}(n)$.

Поэтому уравнение (35) можно записать следующим образом

$$\frac{p}{m}\frac{\partial n}{\partial x}=-\pi\sum_{12}\int d\gamma(\delta_{1p}-\delta_{2p})\delta(\gamma_{12})(\delta f_1-\delta f_2)\times$$
$$\times\{\widetilde{\chi}_2(2-1;-\gamma)+\widetilde{\chi}_2(2-1;\gamma)\}.$$

Преобразуем правую часть последнего уравнения к виду

$$\pi\sum_{p_1}\int d\gamma\delta(\gamma_{p_1p})(\delta f_{p_1}-\delta f_{p_2})\times$$
$$\times\{\widetilde{\chi}_2(p-p_1;-\gamma)+\widetilde{\chi}_2(p-p_1;\gamma)\}.$$

С использованием соотношения (35), получим $\delta f_p=-\tau_l(\varepsilon)\dfrac{p}{m}\dfrac{\partial n}{\partial x}$, где

$$\tau_l^{-1}(\varepsilon)=\pi\sum_{p_1}\int d\gamma\delta(\gamma_{p_1p})(1-\cos\vartheta)\times$$
$$\times\{\widetilde{\chi}_2(p-p_1;-\gamma)+\widetilde{\chi}_2(p-p_1;\gamma)\} \quad (37)$$

и ϑ – угол между векторами p и p_1. Величина $\tau_l(\varepsilon)$является тем характерным временем, по прошествии которого состояние системы можно описывать функцией распределения частиц по энергии.

Для $L_p^{(2)}(n)$ легко получить следующее выражение

$$L_p^{(2)}(n)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\sqrt{\varepsilon}g(\varepsilon)\frac{\partial n(x,\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right),$$

где $g(\varepsilon)=\dfrac{\pi}{2}\sum_{p_1}\int d\gamma\gamma^2\delta(\varepsilon_p-\varepsilon_{p_1})\times$

$$\times\{\widetilde{\chi}_2(p-p_1;-\gamma)+\widetilde{\chi}_2(p-p_1;\gamma)\}.$$

Функция $g(\varepsilon)$положительна в силу того, что для пространственно-однородного, стационарного поля фурье-компонента (по пространственной и временной переменным) корреляционной функции, положительна.

Теперь из (36) нетрудно получить уравнение для $n(x, \varepsilon, t)$ в приближении квадратичном по градиентам и линейном по γ_0^2

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D(\varepsilon)\Delta_x n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\sqrt{\varepsilon}g(\varepsilon)\frac{\partial n(x,\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right), \quad (38)$$

где $D(\varepsilon) = \dfrac{4\tau_l(\varepsilon)}{3m}\varepsilon$.

Уравнение (38) есть кинетическое уравнение для функции распределения по энергии с "интегралом столкновений", описывающим диффузию в энергетическом пространстве. В пространственно-однородном случае уравнение (38) принимает, очевидно, вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\sqrt{\varepsilon}g(\varepsilon)\frac{\partial n(x,\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right). \quad (39)$$

Вообще говоря, при рассмотрении физических систем в уравнение (39) нужно включить парные столкновения частиц между собой, то есть к правой части уравнения (39) добавить больцмановский интеграл столкновений $L(n)$.

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\sqrt{\varepsilon}g(\varepsilon)\frac{\partial n(x,\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right) + L(n). \quad (40)$$

Благодаря парным столкновениям, "интенсивность" которых преобладает над "интенсивностью" взаимодействия со случайным полем, в такой системе за относительно короткое время τ_0 (определяемое $L(n)$) устанавливается максвелловское распределение с медленно меняющейся во времени средней энергией или температурой. Таким образом, возникает следующий этап сокращенного описания, когда функция распределения по энергии $n(\varepsilon, t)$ (при временах $t > \tau_0$) начинает зависеть от времени через посредство средней энергии $n(\varepsilon, \bar{\varepsilon}(t))$, где $\bar{\varepsilon}$ определяется следующим равенством

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^\infty d\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\varepsilon n(\varepsilon). \quad (41)$$

При этом считается, что условие нормировки функции $n(\varepsilon)$имеет вид $\int_0^\infty d\varepsilon\sqrt{\varepsilon}n(\varepsilon) = 1$. Появление множителя $\sqrt{\varepsilon}$ обусловлено тем, что $p^2dp = m\sqrt{2m}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon$.

Уравнения (40), (41) совместно с предположением о функциональной зависимости (через посредство $\bar{\varepsilon}$) от времени функции распределения по энергии позволяют получить замкнутое уравнение для изменения $\bar{\varepsilon}$ со временем, на основе которого можно сделать вывод о возрастании энергии системы. Для $\partial_t\bar{\varepsilon}$ в случае системы с парным взаимодействием из уравнения (41) получаем

$$\partial_t\bar{\varepsilon}(t) = -\int_0^\infty d\varepsilon\sqrt{\varepsilon}g(\varepsilon)\frac{\partial n^{(0)}}{\partial\varepsilon}, \quad (42)$$

где $n^{(0)}$ – максвелловское распределение по энергии $n^{(0)} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi T^3}}e^{-\varepsilon/T}$, обращающее в ноль больцмановский интеграл столкновений, T – температура системы, связанная с ее средней энергией соотношением $\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}T$.

Поскольку $\dfrac{\partial n^{(0)}}{\partial\varepsilon} < 0$, $g(\varepsilon) > 0$, то средняя энергия возрастает во времени, иначе говоря, за счет взаимодействия со случайным полем, система нагревается.

Из выражения (42) найдем уравнение для изменения температуры

$$\partial_t T(t) = T^{-5/2}\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\int_0^\infty d\varepsilon\sqrt{\varepsilon}g(\varepsilon)e^{-\varepsilon/T}. \quad (43)$$

Исследование этого уравнения проведем в следующих двух случаях.

1-й случай, $T << \varepsilon_0$, где ε_0 определяется "шириной размытия" $\tilde{\chi}(p,\gamma)$ по $|p|$. Иначе говоря, функция $g(\varepsilon)$ заметно отлична от нуля лишь при $\varepsilon \le \varepsilon_0$. Поэтому можно заменить $g(\varepsilon)$ ее значением в нуле и вынести из-под знака ин-теграла $g(0)$. Таким образом, получаем

$$\partial_t T = \frac{1}{T}\frac{4}{3\sqrt{\pi}}g(0)\int_0^\infty dx\sqrt{x}e^{-x} =$$

$$= \frac{1}{T}\frac{4}{3\sqrt{\pi}}g(0)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}\frac{g(0)}{T}. \quad (44)$$

Прежде чем интегрировать это уравнение введем характерное время следующим соотношением $\tau_1^{-1} = 2g(0)/3\varepsilon_0^2$. Величина τ_1^{-1} определяет тот масштаб времен, на котором выполняется критерий $T << \varepsilon_0$. Уравнение (44) в терминах τ_1 и ε_0 можно записать таким образом $\partial_t(T/\varepsilon_0) = \varepsilon_0/T\tau_1$, откуда получаем

$$T = \varepsilon_0(2t/\tau_1)^{1/2} + T_{init}, \qquad (45)$$

где T_{init} – некоторое начальное значение температуры системы ($T_{init} << \varepsilon_0$).

С течением времени температура системы возрастет до таких значений, что критерий $T_{init} << \varepsilon_0$ окажется нарушенным и зависимость (45) не будет иметь места. Однако можно установить поведение температуры во времени при больших температурах, когда будет иметь место

2-й случай, $T >> \varepsilon_0$. При этом благодаря указанному свойству $g(\varepsilon)$под знаком интеграла (43) экспоненту можно заменить единицей. Таким образом, мы получаем

$$\partial_t T(t) = T^{-5/2} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\varepsilon \sqrt{\varepsilon}\, g(\varepsilon). \qquad (46)$$

Определим характерное время τ_2 следующим соотношением

$$\tau_2^{-1} = \frac{1}{\varepsilon_0^2} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \sqrt{x}\, g(\varepsilon_0 x).$$

Тогда уравнение (46) может быть представлено в безразмерных величинах таким образом $\partial_t(T/\varepsilon_0) = (\varepsilon_0/T)^{5/2} \tau_2^{-1}$. Откуда имеем $T = \varepsilon_0 \left(\frac{7}{2} \frac{t}{\tau_2} \right)^{2/7} + T_{init}$. Следовательно, при "высоких" температурах ($T >> \varepsilon_0$) нагрев системы происходит медленнее, чем в области "низких" ($T << \varepsilon_0$) температур.

Отметим здесь, что проведенное рассмотрение справедливо для систем, где выполняется критерий $\tau_0 << \tau_1$, τ_2. Иначе говоря, нагревание происходит медленно, так, что система в каждый момент времени остается максвелловской.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена кинетика двухчастичной системы, находящейся во внешнем случайном поле. Получены законы нагрева такой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Приходько В.И., Кавчук В.Н., Турбин П.В. К кинетической теории частиц поверхности в методе сокращенного описания //Физическая инженерия поверхности.– 2004.– Т.2, № 4.– С. 154-164.
2. N.N. Bogolyubov. In Studies in statistical mechanics. Edited by J. de Boer and G.E. Uhlenbeck, Amsterdam. – 1962. – Vol. 1.
3. A.I. Akhiezer, S.V. Peletminskii. Methods of Statistical Physics. International series in natural philosophy. Pergamon Press. – 1981. – Vol. 104. – P. 450.
4. N.V. Laskin, S.V. Peletminskii and V.I. Prikhod'ko. To kinetic theory of systems in random fields // Teor. Mat. Fiz. – 1978. –Vol. 34. – No. 2. – P. 244-255.
5. N.V. Laskin, S.V. Peletminskii and V.I. Prikhod'ko. On the dynamical theory of systems in random fields//Jornal of Physical Studies. – 1998. – Vol. 2, No. 1. – P. 6-15.
6. Исаев А.А., Пелетминский С.В., Приходько В.И. Двумерная нелокальная гидродинамика с учетом флуктуаций//Теор. Мат. Физ. – 1989. –Том 78, № 1. – С. 94-107.
7. S.V. Peletminskii, V.I. Prikhod'ko. Method of asymptotical operators in statistical mechanics I. Spatially homogeneous states//Teor. Mat. Fiz. – 1972. – Vol. 12, No. 1. – P. 88-105.
8. S.V. Peletminskii, V.I. Prikhod'ko. Method of asymptotical operators in statistical mechanics II. Spatially inhomogeneous states // Teor. Mat. Fiz. – 1972. – Vol. 12, No. 2. – P. 283-301.

КІНЕТИКА ЧАСТИНОК ПОВЕРХНІ В ЗОВНІШНЬОМУ ФЛУКТУЮЧОМУ ПОЛІ

В.І. Приходько, П.В. Турбін

Побудована кінетика частинок, що знаходяться в стохастичному полі [1]. Визначено закони зміни температури такої системи за рахунок зовнішніх полів. Доведено виникнення "взаємодії" частинок через стохастичні поля.

THE KINETICS OF SURFACE PARTICLES IN EXTERNAL FLUCTUATED FIELD

V.I. Prikhod'ko, P.V. Turbin

The kinetics of surface particles, located in stochastic field was built [1].The temperature change laws were calculated for such system on the account of external fields. The particles "interaction" through stochastic fields was shown.