Сарачева А.С.

СИСТЕМАТИЗАЦИЯ КЛАССОВ ОПРЕДЕЛИМОСТИ

Введение.

Одно из центральных понятий логической семантики – понятие определимости, связано с выразимостью одних логических объектов через другие. Определимостью можно назвать некоторое отношение между явлением X и множеством M, в которое X не входит. Единственное условие, предъявляемое к M, состоит в том, что M – структура, т.е. множество, в котором имеют место постадийные преобразования элементов M и результатов преобразований. Для этого предполагается: в M, помимо элементов входят преобразующие средства L. Преобразования L как и всякие преобразующие силы, превращают любой элемент из M в элемент, не обязательно принадлежащий M.

В литературе есть несколько дефиниций определимости. Предполагается, что обобщенным является следующее:

Определение. Будем говорить, что X определим в структуре M, если и только если предъявлен процесс $c_1, c_2, c_3,..., c_n$, такой, что:

Любое c_j – либо элемент M, либо получено из предшествующих c_j элементов (т.е. c_{j-1}, c_{j-2} и т.д.): посредством L.

c_n находится в одном из следующих отношений к X: тождества, равенства, приближения, подобия, аналогии и т.п.; представления, замены, взаимозаменяемости. Список отношений можно уточнять.

Это определение дано в [1].

Много примеров определимости можно найти в математике. Это может быть выразимость (определимость) периодических функций действительных переменных через другие (представление функции в виде ряда Фурье); сопоставление с функцией $y(x)$ функции известного класса $Y(x) \equiv y(x, a_0, a_1,..., a_n)$, которая зависит от $n+1$ параметров a_j, выбранных специальным способом. Кроме этого примером определимости может служить нахождение корней уравнения вида $f(x)=0$, где $f(x)$ непрерывная функция (график этой функции не содержит точек разрыва) и т.д.

Дефиниция определимости функции через другие выглядит так:

Определение. Функция $f(x)$ определима через другие функции тогда и только тогда, когда существует другая функция с такими же переменными, такая, что ее график полностью совпадает с графиком исходной функции.

Рассмотрим такой пример из численных методов математики [9]:

Допустим, в некоторые дискретные моменты времени $x_1, x_2,..., x_n$ наблюдаются значения функции $f(x)$, требуется восстановить ее значения при других x. Другими словами, необходимо определить функцию, если известны ее значения в некоторых точках. В этом случае целесообразно искать не саму функцию, а некоторое ее приближение в виде: $f(x) \approx g(x, a_0, a_1..., a_n)$. Значения параметров a_j выбираются так, чтобы значения $g(x)$ совпадали со значениями $f(x)$ для данного множества $n+1$ значений аргумента x_k (узлов интерполяции). Понятно, что график приближенной функции будет совпадать с графиком функции $f(x)$, с некоторой погрешностью. Приближать функции можно многочленами, в некоторых случаях удобнее делать это тригонометрическими полиномами, иногда дробно–рациональными полиномами. Например, так:

$$f(x) \approx g(x) = \frac{\sum_{j=0}^{n} a^j x^j}{\sum_{k=0}^{m} b_k x^k}$$

В любом случае определимость будет иметь место.

Ярким примером из гармонического анализа, рассматриваемого колебательные движения, может служить выразимость периодической функции[2] в виде ряда Фурье:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

, где a_0, a_j, b_j – коэффициенты Фурье (см. [9])

В связи с бурным развитием науки, многие ученые обобщают понятие определимости в логических терминах. Кроме того выделяют различные типы, классы определимостей, не только функций, также других объектов.

Сколько классов определимости существует? На какие типы делится это понятие?

[2] Функция $f(t)$ является периодической с периодом T, если $f(t+T) \equiv f(t)$. [9]

Вообще говоря, понятие определимости не является “абсолютным”, оно зависит от теории, в которой рассматриваются логические объекты, от самих объектов, для которых вводится это понятие. Поэтому разбить на классы все виды определимости и построить единую систему практически невозможно. В связи с этим, существует несколько классификаций этого понятия (разными авторами), но нужно отметить, что каждая собирает разработанные именно этим автором определимости. Рассмотрим некоторые из них.

Аналитическая определимость явлений.

Напомним некоторые определения из [1].

Будем рассматривать множество М элементов произвольной природы А, В, С..., вступающих в связи (отношения) α, β, γ,…, образуя комбинации.

Комбинационный процесс для множества с элементами А, В, С, Д,… и бинарными связками α, β, γ задается так:

А, В, С, Д… – элементарные комбинации.

Если х, у – комбинации, то комбинациями и являются так же α(х, у), β(х, у), γ(х, у).

Определение. Элемент Х аналитически определим в |М|, если и только если в |М| выстраивается конфигурация из фрагментов |М|, в силу которой и результатом которой является Х//[] – одна из комбинаций |М|, не содержащая Х. Точнее: пусть в |М| с правилами отбора L: L_1, L_2, L_3, …L_n из фрагментов A_1, A_2, …$A_к$, строится конфигурационная последовательность C_1, C_2, C_3, …, C_m, такая, что C_m есть Х// [], где [] – одно из комбинаций |М|, составленное из A_1, A_2, …$A_к$, или их частей, но без Х, тогда говорят: Х определимо в М.

// – отношение взаимозаменяемости. |М| – структура (множество элементов М,, множество связей его элементов, множество комбинаций из элементов М, посредством связей).

Это определение введено Николко В.Н., в его работе “Аналитическая определимость явлений”. Автор выделяет два класса аналитической определимости (А–определимости): ДА–определимость (дедуктивная определимость) и ТА–определимость (тождественно–аналитическая определимость).

Определение. Некоторое Х ДА–определимо в некотором множестве М тогда и только тогда, когда в этом множестве выводима комбинация ($X \to A$) и комбинация ($A \to X$), что обозначают Х//А, где Х – элемент множества М, А – комбинация множества М, не содержащая Х.

Определение. Х ТА–определим в множестве М, если и только если в М существует отборочный процесс, благодаря которому Х=[], где [] – одна из комбинаций М, не содержащая Х.

Наглядным примером этой определимости служит решение простейшего линейного уравнения: 4х+10=0 [1]. Решение этого уравнения представляет собой последовательность конструкций, отвечающую условиям дефиниции определимости явлений.

В свою очередь ТА–определимость можно разделить на подклассы. Отобразим это в таблице:

<table>
<tr><td colspan="4">Аналитическая определимость (А–определимость)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ДА–определимость</td><td colspan="3">ТА–определимость</td></tr>
<tr><td>Программная определимость явлений (ПТА–определимость)</td><td>Грамматическая определимость</td><td>Социальная определимость</td></tr>
</table>

Определение. Х ПТА–определим в множестве М, если и только если, существует программа сборки (или поиска) элементов М, в некоторую комбинацию из М, не содержащую Х, но тождественную Х.

Определение. Х грамматически определим в языке М, если и только если, в М найдется не содержащая Х речевая конструкция, адекватная Х

Существует также два непересекающихся между собой класса определимости: программная аналитическая определимость и теоретико–множественная аналитическая определимость.

Классификация определимости В.А.Смирнова.

Большой вклад в развитие теории определимости внес В.А.Смирнов, в работах которого представлено достаточно много материала по этому вопросу.

Классически различают явную и неявную определимости, причем рассматривают синтаксическое и семантическое понятие этих терминов. [4] Под синтаксическими терминами понимают понятия “переменная”, “формула”, “предложение”, “аксиома” и т.д.

Пусть Т – теория. Под теорией будем понимать множество предложений, замкнутое относительно выводимости. Пусть Р – к–местный предикат. [2]

Определение. Предикат Р явно семантически определим в теории Т, если семантически можно обосновать утверждение:

$\forall M(M \,\|\!= T \Rightarrow M \,\|\!= \forall x_1,..., \forall x_n (P(x_1,..., x_n) \equiv A(x_1,..., x_n))$, то есть каждая возможная реализация теории Т, являющаяся ее моделью, является моделью и для формулы

$$\forall x_1,..., \forall x_n (P(x_1,..., x_n) \equiv A(x_1,..., x_n)).$$

||= – знак семантического следования[3].

Определение. Р неявно семантически определим в теории Т, ели любые две возможные реализации , которые приписывают одно и то же значение всем предикатам, отличным от предиката Р, припишут одинаковые значения и самому предикату Р.

[3] $p \,\|\!= q$ означает, что из истинности p следует истинность q .[11]

Определение. Говорят, что P явно синтаксически определим в терминах предложений T, если найдется такая формула $A(x_1,\ldots,x_n)$, не содержащая P такая, что доказуемо следующее утверждение:

$$T \vdash \forall x_1,\ldots,\forall x_n(P(x_1,\ldots,x_n)\equiv A(x_1,\ldots,x_n)),$$

где $\vdash$ – синтаксическое отношение выводимости[4].

Пусть теперь выполнены следующие условия:

$P'(x_1,\ldots,x_n)$ – n–местный предикат, не содержащийся в теории T. Пусть T' – теория, образованная из теории T, заменой в каждом положении всех вхождений предиката Px на предикат $P'x$.

Определение. Предикат Px неявно синтаксически определим в T, если

$$T \cup T' \vdash \forall x_1,\ldots,x_n(P(x_1,\ldots,x_n)\equiv P'(x_1,\ldots,x_n)),$$

то есть в теории $T \cup T'$ доказуемо утверждение об эквивалентности двух предикатов P и P'.

Из выше указанных определений определимости ясно, что решение проблем, связанных с определимостью, сводится к нахождению формулы A, но метод ее отыскания не прописан. Большую роль в этом процессе (отыскания) сыграли интерполяционная теорема Крейга, а также теорема А.Падоа и обратная ей теорема Бета (об эквивалентности явной и неявной определимостей).

Теорема (Падоа). Если P явно синтаксически определим в T, то P неявно синтаксически определим в T.

Теорема (Бета). Если P синтаксически неявно определим в T, то P явно синтаксически определим в T.

Все типы определимости, описанные В.А.Смирновым, можно представить в виде таблицы:

Полная определимость	Неполная (частичная) определимость
Явная определимость (семантическая, синтаксическая)	Дизъюнктивная определимость (явная, неявная)
Неявная определимость (семантическая, синтаксическая)	Условно–параметрическая определимость (явная, неявная)
Условная определимость (явная, неявная)	Параметрическая определимость (явная, неявная)

Нужно отметить, что для выше перечисленных типов определимости также различают синтаксическое и семантическое аспекты. Из названий классов определимости ясно, что некоторые из них вводятся с помощью различных типов определений. Прежде всего, условная определимость. Дадим краткую характеристику.

Итак, пусть P – термин, зависящий от l переменных, т.е P$=P(x_1,\ldots,x_l)$. T – множество предложений.

Определение. Термин P явно условно определим в терминах предложений T тогда и только тогда, когда существует условие S и формула a, содержащие ровно l различных свободных переменных, и сформулированные в терминах, отличных от P, такие, что

$$T \vdash \forall x(Sx \supset Px \sim a),$$

где $\supset$ – знак следования, а ~ – знак тождества.

Определение. Термин P неявно условно определим в терминах предложений T тогда и только тогда, когда

$$T,T' \vdash \forall x(Sx \supset Px \sim P'x),$$

где T' – теория, образованная из теории T, заменой в каждом положении всех вхождений предиката Px на предикат $P'x$.

Для этого класса определимости также справедлива теорема Бета об эквивалентности.

Рассмотрим теперь случай неполной определимости, то есть такой определимости, к которой отнесены термины, определимые не всегда в других терминах.

Определение. Термин P дизъюнктивно определим в терминах теории T тогда и только тогда, когда существуют формулы $a_1,\ldots,a_n$, с различными свободными переменными, такие, что

$$T \vdash \forall x(Px \sim a_1) \vee \ldots \vee \forall x(Px \sim a_n).$$

Аналогичным способом вводятся понятия условно–параметрической и параметрической определимости. Для всех них справедлива теорема Бета.

Определение. к–местный термин P условно–параметрически определим в терминах теории T тогда и только тогда, когда существует такая формула S с m различными свободными переменными $y_1,\ldots,y_m$ и формулы $a_1,\ldots,a_n$, с $k+m$ различными свободными переменными $x_1,\ldots,x_k$, $y_1,\ldots,y_m$, сформулированными в терминах, отличных от P, такие, что

[4] $p \vdash q$ означает, что q выводимо из p с помощью некоторых четко описанных правил. [11]

$$T \vdash \exists y Sy \mathbin{\&} \forall y \ (Sy \supset \bigvee_{1\le i\le n} \forall x(Px \sim a_i)).$$

Определение. . к–местный термин P параметрически определим в терминах теории T тогда и только тогда, когда существуют формулы $a_1,...,a_n$, с $k+m$ различными свободными переменными $x_1,...,x_k$, $y_1,...,y_m$, сформулированными в терминах, отличных от P, такие, что

$$T \vdash \bigvee_{1\le i\le n} \exists y \forall x(Px \sim a_i xy).$$

Имеется также вид определимости, который обобщает условно–параметрическую и дизъюнктивную определимости. При анализе этих видов определимости нужно учесть, что возможны формулировки в терминах явной и неявной семантической и явной и неявной синтаксической определимости.

Рассмотрим теперь некоторое обобщенное понятие определимости свойств и отношений в первопорядковой теории – понятие К–определимости. [3].

Пусть S – первопорядковая теория, U – область ее интерпретации[5]. Рассмотрим некоторое отношение R на области U. Чтобы понятие теории стало точным, необходимо фиксировать язык, на котором делаются утверждения теории. Язык теории T обозначим S. Пусть К – произвольный класс формул языка S: он непротиворечив и замкнут относительно формальной выводимости. Пусть дана следующая арифметическая функция $D(n)$, определяемая следующим способом:

$$D(n) = \begin{cases} D(1) = 1 \\ D(n+1) = D(n) + 1 \end{cases}$$

Определение. Будем говорить, что n–местный предикат R К–определим в S тогда и только тогда, когда существует формула A языка S, содержащая в точности n попарно различных свободных переменных $a_1,...,a_n$ такая, что

$$\forall k_1,...,\forall k_n [(R(k_1,...,k_n)) \supset (A(D(k_1),...,D(k_n)) \in K)) \wedge (\neg R(k_1,...,k_n) \supset (\neg A(D(k_1),...,D(k_n)) \in K].$$

Воспроизведем понятие К–определимости для функции.

Определение. n–местная функция j К–определима в S тогда и только тогда, когда существует такой терм a в S, содержащий в точности n попарно различных свободных переменных $a_1,...,a_n$, что

$$\forall k_1,...,\forall k_n [(D(j(k_1,...,k_n)) \approx a(D(k_1),...,D(k_n)) \in K]$$

Рассматривая различные первопорядковые теории, получаем различные виды К–определимости. В качестве первопорядковой теории рассмотрим арифметику P. Тогда в качестве множества К могут выступать множества Tr (класс формул, общезначимых в области целых положительных чисел) и класс T (класс теорем системы P). Оба этих класса непротиворечивы, замкнуты. [3].

В этом случае получаем следующую классификацию определимости свойств и отношений в первопорядковой теории, в частности, в арифметике P.

К–определимость	
Пусть К = Tr, получаем Tr–определимость предикатов и функций.	Пусть К = T, получаем T–определимость предикатов. Эту определимость называют иногда рекурсивной определимостью предикатов.

Источники и литература

1. Николко В.Н. Аналитическая определимость явлений./ Учебно-методические материалы по курсу “Теория определений” для студентов философского факультета. – Симферополь, 2004.
2. Смирнов В.А. Логические методы научного знания. – М., 1987.
3. Смирнова Е.Д. Логические основы семантики.
4. Бочаров В.А., Смирнова Е.Д. Определимость // Новая философская энциклопедия. Т.III. – М., 2000 .
5. Клини С.К. Введение в математику./ Издание иностранной литературы.– М., 1957.
6. Клини С.К.. Математическая логика./ Издание иностранной литературы.– М., 1973.
7. Робинсон. А Введение в теорию моделей и математику алгебры. – М.1967.
8. Э.Мендельсон. Введение в математическую логику. – М.1971. – 318 с.
9. Корн Г., Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М., “Наука”, 1984г.
10. Линдон Р.. Заметки по логике./ Издательство “Мир”. – М.,1968. – 128 с.

[5] Интерпретация – любая система, состоящая из непустого множества *U*, называемого областью интерпретации и какого–либо соответствия $j : U^n \to U$.[8]