УДК 534.014.2:517.957

О ВОЗНИКНОВЕНИИ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Ю.В. Михлин, Г.В. Манучарян

Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт"
Украина

Поступила в редакцию 04.01.2004

Предлагается новый подход к построению гомо- и гетероклинических траекторий нелинейных механических систем с несколькими положениями равновесия. Образование таких траекторий принимается в качестве критерия перехода от регулярной к хаотической динамике системы. Для построения используются Паде и квази-Паде аппроксимации, а также условие их сходимости. Проведен анализ уравнения колебаний математического маятника с колеблющейся точкой подвеса.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема хаотических колебаний, которые за последние 25 – 30 лет были обнаружены в широких классах нелинейных детерминированных механических системах, привлекает внимание многих исследователей. Предсказание такого поведения в системе важно не только для теории, но и для инженерных расчетов, поскольку в этом случае динамика конкретной системы в значительной степени становится непредсказуемой. Наиболее существенным представляется определение начала хаотического поведения при изменении управляющих параметров или внешнего воздействия. В качестве одного из критериев перехода от регулярного к хаотическому поведению динамической системы с несколькими положениями равновесия при наличии внешнего периодического воздействия принимается образование замкнутых гомо- или гетероклинических траекторий (НТ) ([1, 2] и др.). Авторы многочисленных работ, посвященных образованию НТ, используют известное условие Мельникова ([1 – 5] и др.), которое не позволяет определить все неизвестные характеристики этой траектории. В общем случае задача эффективной аналитической аппроксимации НТ сложна и не решена до сих пор.

В данной работе предлагается новый подход к построению НТ в нелинейных динамических системах с фазовым пространством размерности два, базирующийся на использовании Паде и квази-Паде аппроксимаций [6 – 7]. Аналитические результаты иллюстрируются численными расчетами касания и пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий седловой точки системы.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ

Предположим, что получено локальное разложение решения по степеням некоторого параметра C в виде ряда $y^{(0)} = \alpha_0 + \alpha_1 c + \alpha_2 c^2 + \ldots$ (возможно, что получено также разложение по степеням c^{-1} при предельно больших значениях параметра: $y^{(\infty)} = \beta_0 + \beta_1 c^{-1} + \beta_2 c^{-2} + \ldots$). Заметим, что этот параметр может быть амплитудным значением решения или энергией системы. Для аналитического продолжения решения (или для сращивания двух предельных локальных разложений) используются дробно-рациональные диагональные аппроксимации Паде (PA) [7] вида:

$$\mathrm{P}A_s = \frac{\sum_{j=0}^{s} a_j c^j}{\sum_{j=0}^{s} b_j c^j} = \frac{\sum_{j=0}^{s} a_j c^{j-s}}{\sum_{j=0}^{s} b_j c^{j-s}}, \quad s = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Сравнивая выражения (1) с локальными разложениями и удерживая в последних только члены до порядка r ($r = 2s + 1$) в случае аналитического продолжения или $r = s$ в случае сращивания локальных разложений) по параметрам c и c^{-1}, получим систему $2s + 2$ линейных однородных алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_j, b_j. Так как в общем случае определитель системы D_s не равен нулю, система имеет единственное тривиальное точное решение. Будем разыскивать PA с ненулевыми коэффициентами a_j, b_j. Не теряя общности, можно предположить, что для такой PA $b_0 = 1$. Теперь система алгебраических уравнений для определения a_j, b_j становится переопределенной. Все неизвестные коэффициенты могут быть определены из $2s + 1$ уравнения, в то время как "невязка" этого приближенного решения может быть получена путем подстановки всех коэффициентов в оставшееся уравнение. Очевидно, что "невязка" (или "ошибка") определяется значением Δ_s, так как ненулевое решение и, следовательно, точная PA могут быть получены в данном приближении по c только в случае, когда $\Delta_s = 0$. Отсюда получаем необходимое условие сходимости последо-

Вычислим интеграл из полученного выше выражения, подставив вместо функции $y(t)$ ее локальное разложение в окрестности нуля $y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \ldots$:

$$\int_0^\infty \left(\delta y' - f\cos\omega t \sin y\right) y' dt =$$

$$= \left(At + Bt^2 + Ct^3 + Dt^4 + Et^5 + \cdots\right)\Big|_0^\infty ,$$

где $A = a_1(\delta a_1 - f\sin a_0) = 0$, $B = a_1(2\delta a_2 - f a_1 \cos a_0)/2 + a_2(\delta a_1 - f\sin a_0) = 0$, …

Для аналитического продолжения на бесконечность полученного локального разложения перестроим его в Паде аппроксимацию

$$At + Bt^2 + Ct^3 + Dt^4 + Et^5 + \cdots \to \frac{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2}{1 + \beta_1 t + \beta_2 t^2}, \quad (8)$$

где $\alpha_1 = A$, $\alpha_2 = (-2ABC + DA_2 + B_3)/(B_2 - AC)$, $\beta_1 = (DA - BC)/(B_2 - AC)$, $\beta_2 = (BD - C_2)/(AC - B_2)$.

Таким образом, с учетом представления (8), условие на бесконечности для фазовой траектории дает нам следующее уравнение:

$$-\frac{a_1^2}{2} + \cos(b_0) - \cos(a_0) + \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 0 . \quad (9)$$

Положим $b_0 = 0$. Перестройка локального разложения искомого решения уравнения (7) в окрестности нуля в квази-Паде аппроксимацию дает аналитическое продолжение этого разложения на бесконечность:

$$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots \to e^{-t}\frac{\alpha_0 + \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{2t}}{1 + \beta_2 e^{2t}} . \quad (10)$$

Здесь $\alpha_0 = -2(a_0 a_1 + 3a_0 a_3 + 2a_1^2 + 6a_1 a_3 - 3a_1 a_2 - 3a_2 a_0 - 6a_2^2)/K$, $\alpha_1 = 2(3a_0^2 + 4a_0 a_1 + 12a_0 a_3 - 2a_1^2 + 12a_1 a_3 - 12a_1 a_2 - 12a_2^2)/K$, $\alpha_2 = -2(-3a_0 a_1 + 9a_0 a_3 - 4a_1^2 + 6a_1 a_3 - 9a_1 a_2 - 3a_2 a_0 - 6a_2^2)/K$, $\beta_2 = (a_1 - 6a_3)/(6a_0 + 11a_1 + 6a_3 + 12a_2)$, где $K = 6a_0 + 11a_1 + 6a_3 + 12a_2$.

Еще два уравнения могут быть получены из условия сходимости (2) для PA в форме (8) и для QPA в форме (10):

$$2CBD - C^3 - D^2A + EAC - EB^2 = 0, \quad (11)$$

$$6a_1a_2 - 72a_2a_3 + 42a_1^2 - 30a_1a_3 + 3a_0a_1 - 18a_0a_3 + 36a_4a_0 + 72a_4a_1 + 72a_4a_2 - 72a_3^2 - 3a_2a_0 - 6a_2^2 = 0. \quad (12)$$

Уравнения (9), (11), (12) образуют систему трех нелинейных уравнений для вычисления a_0, a_1 и $f = f(\delta)$ при фиксированной частоте w.

На рис. 4, 5 представлены полученные зависимости между управляющими параметрами системы f, ω и δ.

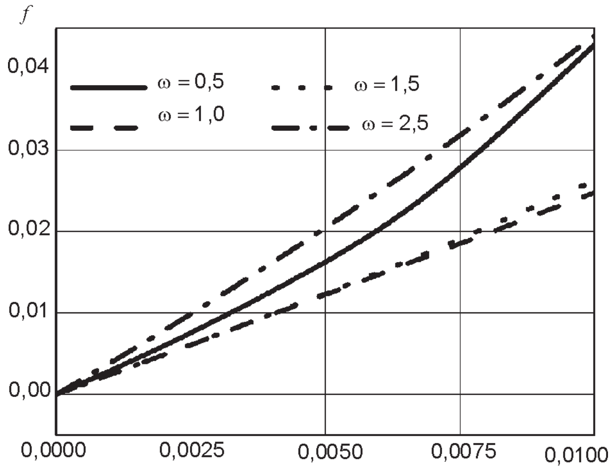

Рис. 4. Зависимость амплитуды вынуждающей силы от коэффициента трения для гетероклинической траектории.

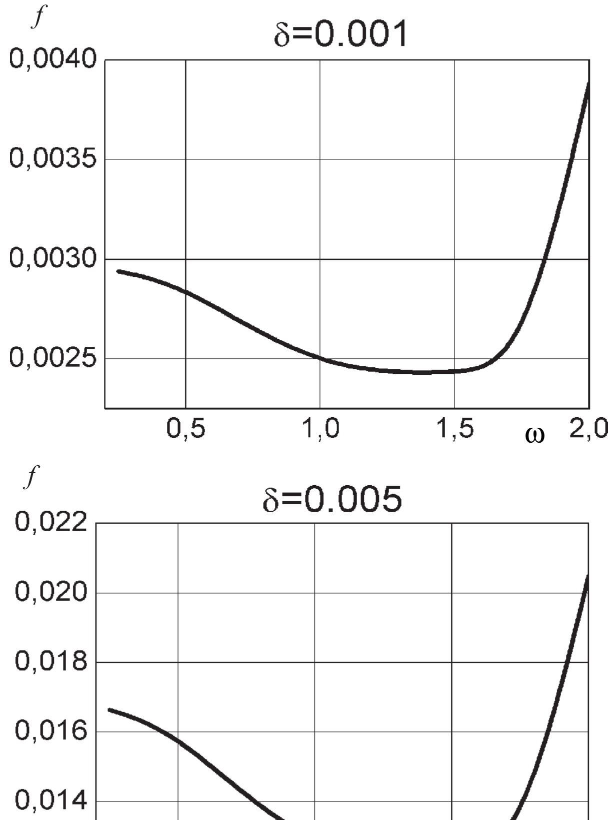

Рис. 5. Зависимости между амплитудой и частотой вынуждающей силы, соответствующими гетероклинической траектории.

ПОСТРОЕНИЕ УСТОЙЧИВОГО И НЕУСТОЙЧИВОГО МНОГООБРАЗИЙ СЕДЛОВОЙ ТОЧКИ СИСТЕМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА LATTЙS

Полученные аналитические результаты можно проиллюстрировать численно. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с гладкой правой частью:

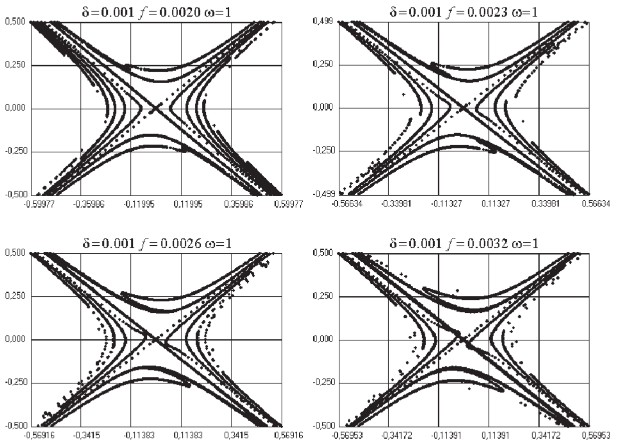

Рис. 6. Фазовые портреты (15) в окрестности точки (0, 0) для $\omega = 1$.

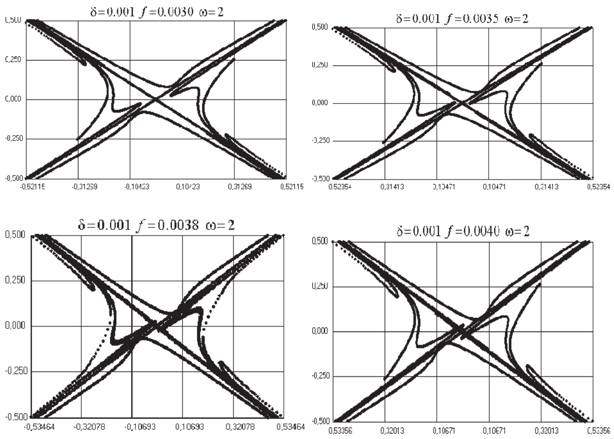

Рис. 7. Фазовые портреты (15) в окрестности точки (0, 0) для $\omega = 2$.

ВЫВОДЫ

Предложен новый подход к исследованию перехода от регулярной к хаотической динамике в нелинейных механических системах с несколькими положениями равновесия. Исследовано образование гетероклинической траектории колебаний математического маятника с колеблющейся точкой подвеса. Получены зависимости между управляющими параметрами, соответствующими НТ. Проведено численное исследование устойчивого и неустойчивого многообразий седловых точек. Эффективность использования предложенного подхода подтверждается соответствием полученных аналитических и численных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. New York: Springer, 1993, 459 p.
2. Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. New York etc.: Springer, 1990, 672 p.
3. Мельников В.К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Моск. мат. общества, 1963. – Т.12. – С.3-52.
4. Holmes P.J. A nonlinear oscillator with a strange attractor// Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A., 1978. – V.292. – №1394. – P.419-448.
5. Moon F.C. Chaotic Vibrations. New York: Wiley, 1987, 309 p.
6. Martin P., Baker G.A. Two-point quasifractional approximant in physics. Truncation error// J. Math. Phys. 1991. – V.32. – №6. – P.1470-1477.
7. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. Москва: Мир, 1986, 502с.
8. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. Москва: Наука, 1987, 424 с.
9. Lattйs S. Sur les equations fonctionnelles qui dйfinissent une courbe ou une surface invariante par une transformatio // Annali di Matematica, 1906.– 13(3). – P. 1-137.

ПРО ВИНИКНЕННЯ ХАОТИЧНИХ КОЛИВАНЬ ПАРАМЕТРИЧНО ПОРУШУВАНОГО МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА

Ю.В. Міхлін, Г.В. Манучарян

Пропонується новий підхід до побудови гомо- та гетероклінічних траєкторій нелінійних механічних систем з декількома положеннями рівноваги. Утворення таких траєкторій приймається як критерій переходу від регулярної до хаотичної динаміки системи. Для побудови використовуються Паде та квазі-Паде апроксимації, а також умова їхньої збіжності. Проведено аналіз рівняння коливань математичного маятника з коливною точкою підвісу.

ON APPEARANCE OF CHAOTIC BEHAVIOR OF PARAMERICALLY EXCITED MATHEMATICAL PENDULUM

Yu.V. Mikhlin, G.V. Manucharyan

New approach to construction of homo- and heteroclinic trajectories of nonlinear mechanical systems with several equilibrium positions is proposed. Formation of such trajectories is accepted as a criterion of transition from regular to chaotic dynamics of system. For this construction Padй and quasi-Padй approximants and their convergence condition are used. Analysis of the equation of vibrations of mathematical pendulum with oscillating point of suspension is done.