

Построение модового базиса для круглого диэлектрического волновода методом интегральных уравнений

М. Н. Легенький

*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина
E-mail: mlegenkiy@yandex.ru*

Статья поступила в редакцию 29 июля 2010 г.

Предложен новый способ построения модового базиса для круглого диэлектрического волновода в свободном пространстве, основанный на методе интегральных уравнений. Аналитически рассчитаны выражения для модовых и нормировочных функций. Продемонстрирована быстрая сходимость разложения моды частотной области по полученному базису. Изменение поля во времени и вдоль продольной оси описывается системой интегро-дифференциальных эволюционных уравнений для коэффициентов разложения поля. Показана возможность сведения системы интегро-дифференциальных эволюционных уравнений к системе матричных дифференциальных уравнений с помощью метода моментов. Решение этой системы для гармонической волны дает дисперсионные кривые круглого диэлектрического волновода. Правильность предлагаемого метода подтверждается совпадением дисперсионных кривых, полученных с его помощью, с известными решениями в частотной области.

1. Введение

В последнее время появляется много электродинамических задач, для решения которых целесообразно использовать методы во временной области (ВО). Одной из них является задача распространения импульсных сигналов в открытых диэлектрических волноводах. В этом случае может быть применен хорошо известный и универсальный метод конечных разностей (Finite Difference in Time Domain (FDTD) method) [1]. Однако данный метод обладает некоторыми недостатками: он является численным, а это усложняет физический анализ полученных результатов, а также требует большого количества компьютерных ресурсов. Поэтому в этом случае удобнее использовать другие методы, например метод модового базиса (ММБ), предложенный О. А. Третьяковым [2]. Этот метод основывается на представлении полей в волноводе в виде разложения по модам в ВО. Коэффициенты разложения (модовые амплитуды) при

этом удовлетворяют системе эволюционных уравнений, описывающих изменение временной формы сигнала при распространении в волноводе. Существуют различные модификации данного метода (см. обзор в [3]). В частности, он может быть применен и для анализа открытых диэлектрических структур. Особенностью применения ММБ для анализа поперечно-неоднородных диэлектрических волноводов (в том числе и открытых) является использование разложения по частотно-независимым связанным модам, каждая из которых удовлетворяет граничным условиям на границе поперечного сечения диэлектриков. Пример построения подобного модового базиса для открытого диэлектрического волновода дан в статье [4], где был рассмотрен прямоугольный волновод с продольным диэлектрическим слоем, одна из широких стенок которого удалена на бесконечность. В [4] показано, что модовый базис для такого открытого волновода обладает как дискретным, так и непрерывным спектром.

Так как ММБ использует представление полей во ВО, то он является эффективным для решения задач расчета и анализа возбуждения и распространения импульсных сигналов в диэлектрическом волноводе [5]. Для применения метода должен быть построен модовый базис для конкретной линии передачи. В настоящей статье представлен новый способ построения модового базиса для круглого диэлектрического волновода на основе метода интегральных уравнений. Этот подход аналогичен предложенному в [6] при построении базиса для открытого диэлектрического волновода в частотной области (ЧО). Целью статьи является описание особенностей построения модового базиса для круглого диэлектрического волновода: получение аналитических выражений для модовых и нормировочных функций, вывод системы интегро-дифференциальных эволюционных уравнений, описывающей изменение модовых амплитуд при распространении. Для проверки предложенного метода построения модового базиса в статье решаются эволюционные уравнения для круглого диэлектрического волновода для режима гармонических волн. При этом дисперсионные характеристики сравниваются с характеристиками, полученными непосредственно в ЧО известными ранее методами.

2. Постановка задачи

Рассмотрим круглый диэлектрический волновод радиуса a в свободном пространстве (см. рис. 1). Диэлектрическая проницаемость волно-

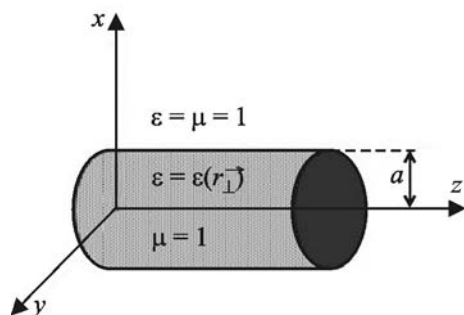


Рис. 1. Круглый диэлектрический волновод в свободном пространстве

вода может изменяться по произвольному закону $\epsilon(\vec{r})$, а вне волновода равняется единице. Магнитные проницаемости волновода и свободного пространства считаются равными единице. Численный пример в конце статьи приведен для случая, когда диэлектрическая проницаемость внутри стержня является константой.

Электромагнитные поля в такой структуре удовлетворяют уравнениям Максвелла, записанным в форме

$$\begin{cases} \partial_z H_z = -\nabla_{\perp} \cdot \vec{H}, \\ \partial_z (\epsilon(\vec{r}) E_z) = -\nabla_{\perp} \cdot (\epsilon(\vec{r}) \vec{E}), \\ -[\nabla_{\perp} \times \vec{z}_0] \cdot \vec{H} = \epsilon(\vec{r}) \partial_t E_z, \\ -[\nabla_{\perp} \times \vec{z}_0] \cdot \vec{E} = -\mu \partial_t H_z, \\ [\nabla_{\perp} \times \vec{z}_0] H_z + \partial_z [\vec{z}_0 \times \vec{H}] = \epsilon(\vec{r}) \partial_t \vec{E}, \\ [\nabla_{\perp} \times \vec{z}_0] E_z + \partial_z [\vec{z}_0 \times \vec{E}] = -\mu \partial_t \vec{H}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь векторы выражены в виде суммы векторов, лежащих в плоскости поперечного сечения волновода (плоскость xu на рис. 1), и векторов, направленных вдоль координатной оси z . Оператор Гамильтона разделен на поперечную и продольную части, $\nabla = \nabla_{\perp} + \vec{z}_0 \partial_z$. Поля должны также удовлетворять условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности [7].

Получим основные соотношения, которые будут использоваться для построения модового базиса в следующем разделе статьи.

Для построения модового базиса система (1) может быть переписана относительно поперечных компонент поля в следующей векторной форме:

$$W_h \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_z \{ \partial_t \vec{E} + \partial_z (\epsilon(\vec{r}))^{-1} [\vec{H} \times \vec{z}_0] \} \\ -\partial_t \{ \partial_t \epsilon(\vec{r}) [\vec{z}_0 \times \vec{E}] + \partial_z \vec{H} \} \end{pmatrix},$$

$$W_e \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_t \{ \partial_z \vec{E} + \partial_z \mu [\vec{H} \times \vec{z}_0] \} \\ \partial_z \{ \partial_z \mu^{-1} [\vec{z}_0 \times \vec{E}] + \partial_t \vec{H} \} \end{pmatrix}.$$

Здесь мы ввели два линейных оператора [2]:

$$W_h \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & [\vec{z}_0 \times \varepsilon^{-1} \nabla_{\perp}] \nabla_{\perp} \cdot \\ \mu^{-1} \nabla_{\perp} [\vec{z}_0 \times \nabla_{\perp}] \cdot & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix},$$

$$W_e \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \nabla_{\perp} \varepsilon^{-1} [\nabla_{\perp} \times \vec{z}_0] \cdot \\ \mu^{-1} [\nabla_{\perp} \varepsilon^{-1} \times \vec{z}_0] \nabla_{\perp} \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим функциональное пространство четырехмерных действительных функций (векторы \vec{E} и \vec{H} являются двумерными)

$$X(\vec{r}_{\perp}) = \text{col}(\vec{E}(\vec{r}_{\perp}), \vec{H}(\vec{r}_{\perp})) = \begin{pmatrix} \vec{E}(\vec{r}_{\perp}) \\ \vec{H}(\vec{r}_{\perp}) \end{pmatrix},$$

удовлетворяющих условиям излучения Зоммерфельда и условию ограниченности в плоскости xy (\vec{r}_{\perp} – проекция радиус-вектора на эту плоскость, $\vec{r} = \vec{r}_{\perp} + \vec{z}_0$). Определим скалярное произведение в этом пространстве как

$$\langle X_1, X_2 \rangle = \int_S (\varepsilon \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 + \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2) dS,$$

$$\langle X_1, X_2 \rangle = \langle \vec{E}_1, \vec{E}_2 \rangle_e + \langle \vec{H}_1, \vec{H}_2 \rangle_h,$$

$$\langle \vec{E}_1, \vec{E}_2 \rangle_e = \int_S \varepsilon \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 dS,$$

$$\langle \vec{H}_1, \vec{H}_2 \rangle_h = \int_S \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 dS.$$

Аналогично тому, как это сделано в работе [2], можно доказать, что задачи на собственные значения для операторов W_h и W_e дают ортогональные базисы. Задача на собственные значения для H -волн записывается в виде

$$W_h X^h = p^2 X^h, \quad X^h = \text{col}(\vec{E}^h, \vec{H}^h), \quad (2)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_0^{-1} [\vec{z}_0 \times \varepsilon^{-1} \nabla_{\perp}] \nabla_{\perp} \cdot \vec{H}^h = p^2 \vec{E}^h, \\ \mu_0^{-1} \nabla_{\perp} [\vec{z}_0 \times \nabla_{\perp}] \cdot \vec{E}^h = p^2 \vec{H}^h. \end{cases}$$

Векторная задача (2) может быть сведена к скалярной относительно двух функций Φ^h и Ψ^h :

$$\begin{aligned} \vec{H}^h(\vec{r}_{\perp}, p) &= p^{-1} \nabla_{\perp} \Psi^h(\vec{r}_{\perp}, p), \\ \vec{E}^h(\vec{r}_{\perp}, p) &= p^{-1} \varepsilon^{-1} [\nabla_{\perp} \Phi^h(\vec{r}_{\perp}, p) \times \vec{z}_0], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \nabla_{\perp} \cdot \varepsilon(\vec{r}_{\perp})^{-1} \nabla_{\perp} \Phi^h(\vec{r}_{\perp}, p) + p^2 \Psi^h(\vec{r}_{\perp}, p) = 0, \\ \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \Psi^h(\vec{r}_{\perp}, p) + p^2 \Phi^h(\vec{r}_{\perp}, p) = 0. \end{cases}$$

Аналогично можно записать задачу на собственные значения для E -волн:

$$\begin{aligned} \vec{H}^e(\vec{r}_{\perp}, p) &= p^{-1} \mu_0^{-1} [\vec{z}_0 \times \nabla_{\perp} \Phi^e(\vec{r}_{\perp}, p)], \\ \vec{E}^e(\vec{r}_{\perp}, p) &= p^{-1} \nabla_{\perp} \Psi^e(\vec{r}_{\perp}, p), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \Phi^e(\vec{r}_{\perp}, p) + p^2 \varepsilon(\vec{r}_{\perp}) \Psi^e(\vec{r}_{\perp}, p) = 0, \\ \nabla_{\perp} \cdot \varepsilon(\vec{r}) \nabla_{\perp} \Psi^e(\vec{r}_{\perp}, p) + p^2 \varepsilon(\vec{r}_{\perp}) \Phi^e(\vec{r}_{\perp}, p) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, чтобы построить модовый базис, нужно решить задачи (3) и (4).

3. Метод интегральных уравнений

3.1. H -волны

Чтобы построить модовый базис для H -волн нужно решить систему (3) в поперечных координатах r и φ . При этом необходимо заметить, что для цилиндрической системы координат поперечная компонента оператора Гамильтона имеет вид $\nabla_{\perp} = \vec{r}_0 \partial_r + \vec{\phi}_0 r^{-1} \partial_{\varphi} = r^{-1} \partial_r r \vec{r}_0 + \vec{\phi}_0 r^{-1} \partial_{\varphi}$ (в цилиндрической системе координат орт $\vec{\phi}_0$ не является константой [8]).

Предположим, что потенциалы имеют зависимость от угловой координаты в виде $\Phi^h(\vec{r}, p) = \Phi^h(r, p) \cos(m\varphi)$, $\Psi^h(\vec{r}, p) = \Psi^h(r, p) \cos(m\varphi)$ и диэлектрическая проницаемость не зависит от угловой переменной $\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon(r)$. Для получения модового базиса используется подход, предложенный в [6] при построении базиса в ЧО. С этой целью там было сформулировано интегральное уравнение, в котором потенциальная функция (подобно Ψ^h или Φ^h в нашем случае) во всем бесконечном прост-

ранстве выражалась через интеграл от потенциальной функции по диэлектрическому слою конечной толщины (где $\varepsilon(r) \neq 1$). В нашем случае для получения таких интегральных уравнений следует записать следующее выражение относительно произвольной функции $Z(\rho, r)$, интегрируя дважды по частям:

$$\int_0^r Z(\rho, r) \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} (\Phi^h(\rho, p) - \Psi^h(\rho, p)) \right) \rho d\rho =$$

$$= \int_0^r \left(\frac{d}{d\rho} + \rho \frac{d^2}{d\rho^2} \right) Z(\rho, r) (\Phi^h(\rho, p) - \Psi^h(\rho, p)) d\rho +$$

$$+ Z(\rho, r) \rho \frac{d}{d\rho} (\Phi^h(\rho, p) - \Psi^h(\rho, p)) \Big|_0^r -$$

$$- \frac{d}{d\rho} Z(\rho, r) \rho (\Phi^h(\rho, p) - \Psi^h(\rho, p)) \Big|_0^r. \quad (5)$$

Перепишем соотношение (5) относительно произвольной функции $F(\rho, r)$, удовлетворяющей условиям $F(\rho, r)|_{\rho=r} = 0$, $dF(\rho, r)/d\rho|_{\rho=r} = 1$:

$$\int_0^r F(\rho, r) \left(\frac{1}{\varepsilon(\rho)} \frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho} \frac{d}{d\rho} \Phi^h(\rho, p) + \right.$$

$$\left. + p^2 (1 - \varepsilon(\rho)) \Psi^h(\rho, p) \right) \rho d\rho +$$

$$+ \int_0^r F(\rho, r) \left(\frac{m^2}{\rho^2} + p^2 \right) (\Phi^h(\rho, p) - \Psi^h(\rho, p)) \rho d\rho =$$

$$= \int_0^r \left(\frac{d}{d\rho} F(\rho, r) + \rho \frac{d^2}{d\rho^2} F(\rho, r) \right) \times$$

$$\times (\Phi^h(\rho, p) - \Psi^h(\rho, p)) d\rho + \rho \left[\frac{d}{d\rho} F(\rho, r) - \right.$$

$$\left. - F(\rho, r) \frac{d}{d\rho} \right] (\Phi^h(\rho, p) - \Psi^h(\rho, p)) \Big|_{\rho=0} -$$

$$- r (\Phi^h(r, p) - \Psi^h(r, p)). \quad (6)$$

В соотношении (6) первое подынтегральное выражение в области вне диэлектрического слоя

(где $\varepsilon(r) = 1$) равно нулю. Таким образом, для получения интегрального уравнения, где комбинация потенциалов $r(\Phi^h(r, p) - \Psi^h(r, p))$ во всей бесконечной области $(0, \infty)$ выражается через интеграл по диэлектрическому слою, функция $F(\rho, r)$ должна удовлетворять модифицированному уравнению Бесселя и выражается через модифицированную функцию Бесселя $I_m(\cdot)$ и функцию Макдональда $K_m(\cdot)$ следующим образом: $F(\rho, r) = r(K_m(pr)I_m(pp) - I_m(pr)K_m(pp))$ [9]. Это позволяет переписать соотношение (6) в следующем виде:

$$\int_0^r F(\rho, r) \left(\frac{1}{\varepsilon(\rho)} \frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho} \frac{d}{d\rho} \Phi^h(\rho, p) + \right.$$

$$\left. + p^2 (1 - \varepsilon(\rho)) \Psi^h(\rho, p) \right) \rho d\rho = \rho \left[\frac{d}{d\rho} F(\rho, r) - \right.$$

$$\left. - F(\rho, r) \frac{d}{d\rho} \right] (\Phi^h(\rho, p) - \Psi^h(\rho, p)) \Big|_{\rho=0} -$$

$$- r (\Phi^h(r, p) - \Psi^h(r, p)). \quad (7)$$

Важно отметить, что здесь функции $F(\rho, r)$ и $dF(\rho, r)/d\rho$ при $\rho = 0$ могут быть сингулярными, но в выражении (7) комбинация $\rho(\Phi^h(\rho, p) - \Psi^h(\rho, p))$ является регулярной. Таким образом, мы получили одно интегральное уравнение для потенциальной функции, в котором интеграл обращается в нуль вне диэлектрического слоя.

Выражение (5) может быть записано относительно суммы потенциалов $\Phi^h(r, p) + \Psi^h(r, p)$ и функции $G(\rho, r)$, удовлетворяющей условиям $G(\rho, r)|_{\rho=r} = 0$, $dG(\rho, r)/d\rho|_{\rho=r} = -1$, как

$$\int_0^r G(\rho, r) \left(\frac{1}{\varepsilon(\rho)} \frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho} \frac{d}{d\rho} \Phi^h(\rho, p) + \right.$$

$$\left. + p^2 (1 - \varepsilon(\rho)) \Psi^h(\rho, p) \right) \rho d\rho + \int_0^r G(\rho, r) \left(\frac{m^2}{\rho^2} - p^2 \right) \times$$

$$\times (\Phi^h(\rho, p) + \Psi^h(\rho, p)) \rho d\rho = \int_0^r \left(\frac{d}{d\rho} + \rho \frac{d^2}{d\rho^2} \right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times G(\rho, r) (\Phi^h(\rho, p) + \Psi^h(\rho, p)) d\rho + \rho \left[\frac{d}{d\rho} G(\rho, r) - \right. \\ & \left. - G(\rho, r) \frac{d}{d\rho} \right] (\Phi^h(\rho, p) + \Psi^h(\rho, p)) \Big|_{\rho=0} + \\ & + r (\Phi^h(r, p) + \Psi^h(r, p)). \end{aligned} \quad (8)$$

Как и в уравнении (6), в (8) первый член равен нулю в области вне диэлектрического слоя. Таким образом, для получения искомого интегрального уравнения функция $G(\rho, r)$ должна удовлетворять уравнению Бесселя. Решение этого уравнения, выраженное через функции Бесселя $J_m(\cdot)$ и Неймана $Y_m(\cdot)$, имеет вид $G(\rho, r) = -\frac{\pi r}{2} (Y_m(\rho r) J_m(\rho r) - J_m(\rho r) Y_m(\rho r))$ [9]. С использованием этого вида функции $G(\rho, r)$ выражение (8) переходит в следующее интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} & \int_0^r G(\rho, r) \left(\frac{1}{\varepsilon(\rho)} \frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho} \frac{d}{d\rho} \Phi^h(\rho, p) + \right. \\ & \left. + p^2 (1 - \varepsilon(\rho)) \Psi^h(\rho, p) \right) \rho d\rho = \rho \left[\frac{d}{d\rho} G(\rho, r) - \right. \\ & \left. - G(\rho, r) \frac{d}{d\rho} \right] (\Phi^h(\rho, p) + \Psi^h(\rho, p)) \Big|_{\rho=0} + \\ & + r (\Phi^h(r, p) + \Psi^h(r, p)). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь, как и в соотношении (7), функции $G(\rho, r)$ и $dG(\rho, r)/d\rho$ при $\rho = 0$ могут быть сингулярными, но в комбинации с $\rho (\Phi^h(\rho, p) + \Psi^h(\rho, p))$ они становятся регулярированными.

Из интегральных уравнений (7) и (9) можно получить следующие интегральные уравнения для потенциалов Ψ^h и Φ^h :

$$\begin{aligned} K^h(\rho, p) &= \frac{1}{\varepsilon(\rho)} \frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho} \frac{d}{d\rho} \Phi^h(\rho, p) + \\ & + p^2 (1 - \varepsilon(\rho)) \Psi^h(\rho, p), \end{aligned}$$

$$Y_1^h(\rho, p) = \left[\frac{d}{d\rho} G(\rho, r) - G(\rho, r) \frac{d}{d\rho} \right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times (\Phi^h(\rho, p) + \Psi^h(\rho, p)), \\ Y_2^h(\rho, p) &= \left[\frac{d}{d\rho} F(\rho, r) - F(\rho, r) \frac{d}{d\rho} \right] \times \\ & \times (\Phi^h(\rho, p) - \Psi^h(\rho, p)), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Psi^h(r, p) &= \frac{1}{2r} \int_0^r (G(\rho, r) + F(\rho, r)) K^h(\rho, p) \rho d\rho - \\ & - \frac{\rho}{2r} (Y_1^h(\rho, p) + Y_2^h(\rho, p)) \Big|_{\rho=0}, \\ \Phi^h(r, p) &= \frac{1}{2r} \int_0^r (G(\rho, r) - F(\rho, r)) K^h(\rho, p) \rho d\rho - \\ & - \frac{\rho}{2r} (Y_1^h(\rho, p) - Y_2^h(\rho, p)) \Big|_{\rho=0}. \end{aligned}$$

При этом интегралы в (10) равны нулю вне диэлектрического слоя из-за вида функции $K^h(\rho, p)$ (при $\rho > a$ выполняются соотношения $\varepsilon(\rho) = 1$ и $d\varepsilon(\rho)/d\rho = 0$).

3.2. E-волны

Предположим, что для случая E -поляризации потенциалы имеют угловую зависимость в виде $\Phi^e(\vec{r}, p) = \Phi^e(r, p) \sin(m\varphi)$, $\Psi^e(\vec{r}, p) = \Psi^e(r, p) \sin(m\varphi)$ и $\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon(r)$. Тогда соотношение (5) может быть переписано для разности $\Phi^e(\rho, p) - \Psi^e(\rho, p)$ с использованием функции $F(\rho, r)$ в виде

$$\begin{aligned} r(\Phi^e(r, p) - \Psi^e(r, p)) &= -\rho \left[F(\rho, r) \frac{d}{d\rho} - \right. \\ & \left. - \frac{d}{d\rho} F(\rho, r) \right] (\Phi^e(r, p) + \Psi^e(r, p)) \Big|_{\rho=0} - \\ & - \int_0^r F(\rho, r) \left(\frac{1}{\varepsilon(\rho)} \frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho} \frac{d}{d\rho} \Psi^e(\rho, p) + \right. \\ & \left. + p^2 (1 - \varepsilon(\rho)) \Psi^e(\rho, p) \right) \rho d\rho. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогичное соотношение для суммы потенциалов $\Phi^e(r, p) + \Psi^e(r, p)$ получается из (5) с использованием функции $G(\rho, r)$:

$$\begin{aligned}
 r(\Phi^e(r, p) + \Psi^e(r, p)) = & \rho \left[G(\rho, r) \frac{d}{d\rho} - \right. \\
 & \left. - \frac{d}{d\rho} G(\rho, r) \right] (\Phi^e(\rho, p) + \Psi^e(\rho, p)) \Big|_{\rho=0} + \\
 & + \int_0^r G(\rho, r) \left(-\frac{1}{\varepsilon(\rho)} \frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho} \frac{d}{d\rho} \Psi^e(\rho, p) + \right. \\
 & \left. + p^2 (1 - \varepsilon(\rho)) \Psi^e(\rho, p) \right) \rho d\rho. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Из интегральных уравнений (11) и (12) можно получить следующие интегральные уравнения для потенциалов Φ^e и Ψ^e в случае E -поляризации:

$$\begin{aligned}
 K^e(\rho, p) = & -\frac{1}{\varepsilon(\rho)} \frac{d\varepsilon(\rho)}{d\rho} \frac{d}{d\rho} \Psi^e(\rho, p) + \\
 & + p^2 (1 - \varepsilon(\rho)) \Psi^e(\rho, p), \\
 Y_1^e(\rho, p) = & \left[F(\rho, r) \frac{d}{d\rho} - \frac{d}{d\rho} F(\rho, r) \right] \times \\
 & \times (\Phi^e(\rho, p) - \Psi^e(\rho, p)), \\
 Y_2^e(\rho, p) = & \left[G(\rho, r) \frac{d}{d\rho} - \frac{d}{d\rho} G(\rho, r) \right] \times \\
 & \times (\Phi^e(\rho, p) + \Psi^e(\rho, p)), \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi^e(r, p) = & \frac{1}{2r} \int_0^r (G(\rho, r) - F(\rho, r)) K^e(\rho, p) \rho d\rho - \\
 & - \frac{\rho}{2r} (Y_1^e(\rho, p) - Y_2^e(\rho, p)) \Big|_{\rho=0}, \\
 \Psi^e(r, p) = & \frac{1}{2r} \int_0^r (G(\rho, r) + F(\rho, r)) K^e(\rho, p) \rho d\rho + \\
 & + \frac{\rho}{2r} (Y_1^e(\rho, p) + Y_2^e(\rho, p)) \Big|_{\rho=0}.
 \end{aligned}$$

Полученные интегральные уравнения (10) и (13) позволяют выразить модовые функции для области вне диэлектрического стержня

через модовые функции для области внутри диэлектрического стержня. Необходимо отметить, что эти уравнения могут быть применены для анализа волноводов с произвольной зависимостью диэлектрической проницаемости от поперечных координат.

3.3. Модовый базис для круглого диэлектрического волновода с постоянной диэлектрической проницаемостью

Рассмотрим круглый диэлектрический волновод радиуса a с постоянной диэлектрической проницаемостью ε . Для этой структуры решение систем (3) и (4) для области внутри диэлектрического стержня может быть записано через неизвестные коэффициенты A^h , B^h , A^e и B^e [9] в следующей форме:

$$\begin{aligned}
 \Psi_{in}^h(r, p) = & A^h(p) J_m(\sqrt[4]{\varepsilon} pr) + B^h(p) I_m(\sqrt[4]{\varepsilon} pr), \\
 \Phi_{in}^h(r, p) = & \\
 = & \sqrt{\varepsilon} (A^h(p) J_m(\sqrt[4]{\varepsilon} pr) - B^h(p) I_m(\sqrt[4]{\varepsilon} pr)), \quad (14) \\
 \Psi_{in}^e(r, p) = & \\
 = & 1/\sqrt{\varepsilon} (A^e(p) J_m(\sqrt[4]{\varepsilon} pr) - B^e(p) I_m(\sqrt[4]{\varepsilon} pr)), \\
 \Phi_{in}^e(r, p) = & A^e(p) J_m(\sqrt[4]{\varepsilon} pr) + B^e(p) I_m(\sqrt[4]{\varepsilon} pr).
 \end{aligned}$$

Из этих формул, используя интегральные уравнения (10) и (13), можно получить модовые функции для области вне диэлектрического слоя. При этом подынтегральные функции в (10) и (13) имеют сингулярности в нуле, которые могут быть раскрыты с помощью асимптотических выражений для цилиндрических функций в случае малых значений аргумента: $J_m(x) \approx I_m(x) \approx (1/m!)(x/2)^m$, $Y_m(x) \approx -(\pi/2)K_m(x) \approx (\pi/2)(\ln(x/2) + \gamma)$ при $m=0$ и $Y_m(x) \approx -(\pi/2)K_m(x) \approx -((m-1)!/\pi)(2/x)^m$ при $m \neq 0$ [8]. Необходимо отметить, что в случае постоянной диэлектрической проницаемости интеграл от производной $d\varepsilon(\rho)/d\rho$ в выражении (10) равен скачку ε на границе диэлектрика. Значение его, с использованием

граничного условия непрерывности для E_φ - компоненты поля на границе, может быть переписано с учетом выражения для поля внутри стержня (14). После этих преобразований получаются следующие соотношения для потенциалов для области внутри диэлектрического стержня с коэффициентами $d^{h,e}$, $b^{h,e}$, $c^{h,e}$ и $f^{h,e}$ (которые зависят от коэффициентов A^h , B^h , A^e и B^e) для E - и H -волн:

$$\begin{aligned} \Psi_{out}^h(r, p) &= \\ &= d^h J_m(pr) + b^h Y_m(pr) + c^h K_m(pr) + f^h I_m(pr), \\ \Psi_{out}^e(r, p) &= \\ &= d^e J_m(pr) + b^e Y_m(pr) + c^e K_m(pr) + f^e I_m(pr). \end{aligned}$$

Выражения для потенциалов $\Phi_{out}^{h,e}$ имеют такой же вид, только перед коэффициентами $c^{e,h}$ и $f^{e,h}$ появляется знак “-”. Так как физическое решение должно удовлетворять условию ограниченности на бесконечности [6], коэффициенты при неограниченной на бесконечности функции $I_m(pr)$ должны равняться нулю для каждого значения спектрального параметра p :

$$\begin{cases} f^h(p, A^h, B^h) = 0, \\ f^e(p, A^h, B^h) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Это условие существования непрерывного спектра. Спектральный параметр p может принимать любое значения от нуля до бесконечности (введение отрицательных значений спектрального параметра не приводит к появлению новых решений). Таким образом, рассматриваемый волновод, в отличие от прямоугольного диэлектрического волновода с одной боковой стенкой, удаленной на бесконечность [4], обладает непрерывным спектром модового базиса.

Из условий (15) для каждого значения спектрального параметра p могут быть найдены соотношения между константами A^h и B^h (A^e и B^e). Для определенности предположим, что $A^h = A^e = 1$, тогда потенциалы для области вне диэлектрического слоя выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_{out}^h(r, p) &= \\ &= d^h(p) J_m(pr) + b^h(p) Y_m(pr) + c^h(p) K_m(pr), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{out}^e(r, p) &= \\ &= d^e(p) J_m(pr) + b^e(p) Y_m(pr) + c^e(p) K_m(pr). \end{aligned}$$

Здесь введены следующие коэффициенты:

$$d^h(p) = \frac{-\pi\sqrt{\varepsilon}}{4} \left(\zeta_+ \Lambda(Y, J, -\varepsilon^{-1/4}, \zeta_-) + \right.$$

$$\left. + V^h(p) \zeta_- \Lambda(Y, I, -\varepsilon^{-1/4}, -\zeta_+) \right),$$

$$b^h(p) = \frac{\pi\sqrt{\varepsilon}}{4} \left(\zeta_+ \Lambda(J, J, -\varepsilon^{-1/4}, \zeta_-) + \right.$$

$$\left. + V^h(p) \zeta_- \Lambda(J, I, -\varepsilon^{-1/4}, -\zeta_+) \right),$$

$$c^h(p) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \left(\zeta_- \Lambda(I, J, -\varepsilon^{-1/4}, \zeta_+) + \right.$$

$$\left. + V^h(p) \zeta_+ \Lambda(I, I, -\varepsilon^{-1/4}, -\zeta_-) \right),$$

$$d^e(p) = \frac{\pi}{4} \left(-\zeta_+ \Lambda(Y, J, -\varepsilon^{3/4}, -\sqrt{\varepsilon}\zeta_-) + \right.$$

$$\left. + V^e(p) \zeta_- \Lambda(Y, I, -\varepsilon^{3/4}, -\sqrt{\varepsilon}\zeta_+) \right),$$

$$b^e(p) = \frac{-\pi}{4} \left(-\zeta_+ \Lambda(J, J, -\varepsilon^{3/4}, -\sqrt{\varepsilon}\zeta_-) + \right.$$

$$\left. + V^e(p) \zeta_- \Lambda(J, I, -\varepsilon^{3/4}, -\sqrt{\varepsilon}\zeta_+) \right),$$

$$c^e(p) = \frac{1}{2} \left(-\zeta_- \Lambda(I, J, -\varepsilon^{3/4}, \sqrt{\varepsilon}\zeta_+) + \right.$$

$$\left. + V^e(p) \zeta_+ \Lambda(I, I, -\varepsilon^{3/4}, \sqrt{\varepsilon}\zeta_-) \right),$$

$$\zeta_+ = (1 + \sqrt{\varepsilon}) / \sqrt{\varepsilon}, \quad \zeta_- = (1 - \sqrt{\varepsilon}) / \sqrt{\varepsilon},$$

$$V^h(p) = \frac{-\zeta_- \Lambda(J, K, \varepsilon^{-1/4}, -\zeta_+)}{\zeta_+ \Lambda(I, K, \varepsilon^{-1/4}, \zeta_-)},$$

$$V^e(p) = \frac{\zeta_- \Lambda(J, K, \varepsilon^{3/4}, -\sqrt{\varepsilon}\zeta_+)}{\zeta_+ \Lambda(I, K, \varepsilon^{3/4}, -\sqrt{\varepsilon}\zeta_-)}$$

$$\Lambda(Z^{(1)}, Z^{(2)}, \eta, \chi) = pa \left(Z_m^{(1)} \left(\sqrt[4]{\epsilon} pa \right) Z_{m+1}^{(2)}(pa) + \right. \\ \left. + \eta Z_{m+1}^{(1)} \left(\sqrt[4]{\epsilon} pa \right) Z_m^{(2)}(pa) \right) + \chi m Z_{m+1}^{(1)} \left(\sqrt[4]{\epsilon} pa \right) Z_m^{(2)}(pa).$$

Выражения для $\Phi_{out}^{h,e}$ имеют такой же вид, только перед коэффициентами $c^{h,e}$ появляется знак “-”. Таким образом, мы получили модовый базис для диэлектрического волновода с постоянной диэлектрической проницаемостью: в области внутри диэлектрического стержня базисные функции выражаются формулами (14), вне диэлектрического стержня они могут быть записаны в виде (16). Проверено, что полученный этим методом базис удовлетворяет граничным условиям на поверхности диэлектрика. Векторные модовые базисные функции могут быть вычислены с помощью формул (3) и (4).

Данный метод позволяет получить аналитические выражения для нормировочных функций:

$$\begin{aligned} (N^h(p))^2 \delta(p-p') &= \int_S \Phi^h(\vec{r}, p) \Psi^h(\vec{r}, p') dS = \\ &= \frac{\lambda_m \pi}{p} (d^h(p)^2 + b^h(p)^2) \delta(p-p'), \\ (N^e(p))^2 \delta(p-p') &= \int_S \epsilon(\vec{r}) \Phi^e(\vec{r}, p) \Psi^e(\vec{r}, p') dS = \\ &= \frac{\lambda_m \pi}{p} (d^e(p)^2 + b^e(p)^2) \delta(p-p'), \end{aligned} \tag{17}$$

где $\lambda_m = 1$ при $m = 0$ и $\lambda_m = 2$ при $m \neq 0$. При получении формул (17) использовались предельные значения цилиндрических функций на бесконечности: $J_m(x) \sim \sqrt{2/(\pi x)} \cos(x - (2m+1)\pi/4)$, $Y_m(x) \sim \sqrt{2/(\pi x)} \sin(x - (2m+1)\pi/4)$, $K_m(x) \sim \sqrt{2/(\pi x)} e^{-x}$, – и формула для интегрирования цилиндрических функций [8]

$$\int Z_p(\alpha r) \mathfrak{S}_p(\beta r) r dr = \frac{\alpha r Z_{p+1}(\alpha r) \mathfrak{S}_p(\beta r) - \beta r Z_p(\alpha r) \mathfrak{S}_{p+1}(\beta r)}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

Эта формула справедлива для функций Бесселя, $J_m(x)$, функций Неймана, $Y_m(x)$, и функций Ханкеля первого, $H^{(1)}(x)$, и второго, $H^{(2)}(x)$, рода. Для модифицированных функций Бесселя она может быть трансформирована с использованием определений модифицированной функции Бесселя, $I_m(x) = i^{-m} J_m(ix)$, и функции Макдональда, $K_m(x) = (\pi/2) i^{m+1} H_m^{(1)}(ix)$. Для получения нормировочных функций (17) использовалось следующее выражение для дельта-функции Дирака: $\lim_{R \rightarrow \infty} (\sin(\kappa - \tilde{\kappa})R / (\kappa - \tilde{\kappa})) = \pi \delta(\kappa - \tilde{\kappa})$.

Подобно соотношениям (17) могут быть записаны условия ортогональности для векторных базисных функций, выражающихся через скалярные базисные функции с помощью формул (3) и (4):

$$\begin{aligned} \int_S \epsilon(\vec{r}) \vec{E}^h(\vec{r}, p) \cdot \vec{E}^h(\vec{r}, p') dS &= (N^h(p))^2 \delta(p-p'), \\ \int_S \vec{H}^h(\vec{r}, p) \cdot \vec{H}^h(\vec{r}, p') dS &= (N^h(p))^2 \delta(p-p'), \\ \int_S \epsilon(\vec{r}) \vec{E}^e(\vec{r}, p) \cdot \vec{E}^e(\vec{r}, p') dS &= (N^e(p))^2 \delta(p-p'), \\ \int_S \vec{H}^e(\vec{r}, p) \cdot \vec{H}^e(\vec{r}, p') dS &= (N^e(p))^2 \delta(p-p'), \\ \int_S \epsilon(\vec{r}) \vec{E}^h(\vec{r}, p) \cdot \vec{E}^e(\vec{r}, p') dS &= 0, \\ \int_S \vec{H}^h(\vec{r}, p) \cdot \vec{H}^e(\vec{r}, p') dS &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Далее в этой статье будут использоваться только нормированные модовые функции $\Phi^b(\vec{r}, p) = \Phi^b(\vec{r}, p) / N^b(p)$, $\Psi^b(\vec{r}, p) = \Psi^b(\vec{r}, p) / N^b(p)$, где $b = e, h$. Все векторные базисные функции определяются через эти нормированные скалярные базисные функции с помощью формул (3) и (4).

На рис. 2 представлены модовые функции с различными значениями спектрального параметра p для волновода с $\epsilon = 5$, $a = 1$ и известная мода HE_{11} в ЧО (заштрихованная область обозначает диэлектрический стержень). Таким

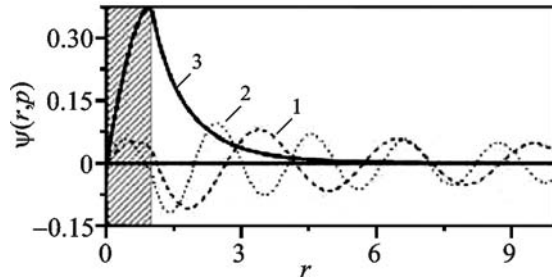


Рис. 2. Зависимость модовой функции $\Psi(r, p)$ от радиальной координаты для значений спектрального параметра $p = 2$ (кривая 1) и $p = 3$ (кривая 2) и для моды HE_{11} (кривая 3). Заштрихованная область обозначает диэлектрический стержень

образом, полученные модовые функции существенно отличаются от мод, используемых в ЧО. Необходимо также отметить, что моды в ЧО имеют на границе диэлектрика скачок производной, в то время как полученные моды во ВО – скачок второй производной. Это приводит к быстрой сходимости разложения по этим модам. Для примера на рис. 3 показано быстрое затухание коэффициентов разложения моды HE_{11} по полученному спектру.

Используемый метод построения модового базиса является более эффективным, чем стандартный метод, использующий граничные условия на границе диэлектрика и приводящий к системе линейных алгебраических уравнений с размерностью 4×4 , так как позволяет получить аналитические выражения для модовых и нормировочных функций.



Рис. 3. Затухание амплитуды коэффициентов разложения моды HE_{11} по модовому базису

4. Система эволюционных уравнений

Для получения системы эволюционных уравнений, описывающих изменение электромагнитной волны в продольном направлении и во времени, искомые поля раскладываются в интегралы по модам:

$$H_z(z, t, \vec{r}) = \mu_0^{-1/2} \int_p h(z, t, p) p \Phi^h(\vec{r}, p) dp,$$

$$E_z(z, t, \vec{r}) = \epsilon_0^{-1/2} \int_p e(z, t, p) p \Phi^e(\vec{r}, p) dp,$$
(19)

$$\vec{E}(z, t, \vec{r}) = \epsilon_0^{-1/2} \times$$

$$\times \int_p \left(v^h(z, t, p) \vec{E}^h(\vec{r}, p) + v^e(z, t, p) \vec{E}^e(\vec{r}, p) \right) dp,$$

$$\vec{H}(z, t, \vec{r}) = \mu_0^{-1/2} \times$$

$$\times \int_p \left(i^h(z, t, p) \vec{H}^h(\vec{r}, p) + i^e(z, t, p) \vec{H}^e(\vec{r}, p) \right) dp.$$

Подставляя разложения (19) в уравнения Максвелла в форме (1) и используя формулы (3), (4) и (18), можно получить следующие уравнения для коэффициентов разложений (здесь предполагаем отсутствие источников):

$$\partial_\tau i^h(p) + \int L^{hh}(p', p) \partial_z v^h(p') dp' = 0,$$

$$\partial_\tau v^e(p) + \int L^{ee}(p, p') \partial_z i^e(p') dp' = 0,$$

$$\int \left(L^{hh}(p, p') \partial_z i^h(p') - p'^2 h^z(p') + \right.$$

$$\left. + L^{he}(p, p') \partial_z i^e(p') \right) dp' = -\partial_\tau v^h(p),$$
(20)

$$\int \left(L^{ee}(p', p) \partial_z v^e(p') - q'^2 e^z(p') + \right.$$

$$\left. + L^{he}(p', p) \partial_z v^h(p') \right) dp' = -\partial_\tau i^e(p),$$

$$v^h(p) = -\int K^{hh}(p, p') \partial_\tau h_z(p') dp',$$

$$i^e(p) = -\int K^{ee}(p, p') \partial_\tau e_z(p') dp'.$$

Здесь введены следующие функции связи ($a = e, h; b = e, h$): $L^{ab}(p, p') = \int \bar{z}_0 \cdot [\bar{E}^a(\bar{r}, p) \times \bar{H}^b(\bar{r}, p')] dS$, $K^{ab}(p, p') = \int \epsilon_{\perp} \bar{z}_0 \cdot [\bar{E}^a(\bar{r}, p) \times \bar{H}^b(\bar{r}, p')] dS$. Таким образом, четырехмерная система уравнений Максвелла превратилась в двумерную систему эволюционных уравнений (20).

Для верификации предложенного подхода мы получим дисперсионные зависимости для рассматриваемой структуры в случае аксиально-симметричных волн и сравним результаты с известным в ЧО решением [10]. Для случая аксиально-симметричных волн ($m = 0$) функции связи между H - и E -поляризациями обращаются в нуль, $L^{he}(p, p') = 0$, и система (20) разделяется на две независимые системы для H - и E -волн. Для H -волн в случае отсутствия источников при использовании гармонической зависимости от времени и координаты в виде $e^{j(\beta z - k\tau)}$ может быть получено следующее интегральное уравнение для модовой амплитуды $h(p)$:

$$-k^2 \int K^{hh}(p, p') h(p') dp' + \beta^2 \int L^{hh}(p, p') h(p') dp' + p^2 h(p) = 0. \quad (21)$$

Используя метод моментов, выразим модовую амплитуду в виде разложения по ортогональным функциям $h(p) = \sum H_j \psi_j(p)$, $\langle \psi_j(p) | \psi_i(p) \rangle = \delta_{i,j}$ (в качестве функций разложения в работе использовались прямоугольные импульсы).

Таким образом, интегральное уравнение (21) переходит в систему линейных алгебраических уравнений, которая в матричной форме может быть записана как $(k^2 \mathbf{K} - \beta^2 \mathbf{L} - \mathbf{P}^2) \cdot \mathbf{H} = 0$. Здесь введены следующие матрицы: $\mathbf{K}_{i,j} = \iint \psi_j(p') \psi_i(p) K^{hh}(p, p') dp' dp$, $\mathbf{L}_{i,j} = \iint \psi_j(p') \psi_i(p) L^{hh}(p, p') dp' dp$, $\mathbf{P}^2_{i,j} = \int p^2 \psi_i(p) \psi_j(p) dp$. Полученная однородная система имеет решение только в случае, если ее определитель обращается в нуль. Из этого условия мы получаем значения k^2 и β^2 для каждой дисперсионной зависимости. На рис. 4

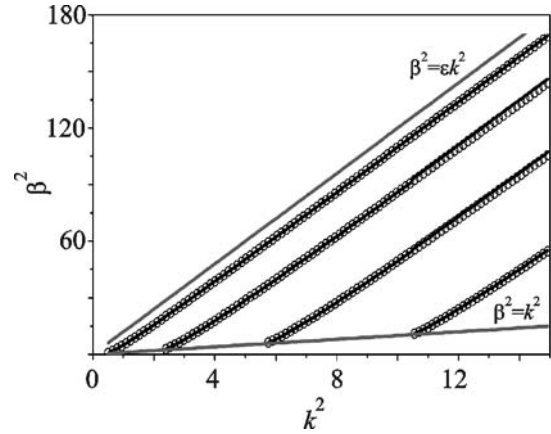


Рис. 4. Зависимости постоянных распространения β от волнового числа k для распространяющихся мод волновода радиуса $a = 1.1$ с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 12$, полученные предложенным методом (кружочки) и спектральным методом (линии)

представлены дисперсионные зависимости для распространяющихся мод, полученные предложенным методом и с помощью решения в ЧО. Хорошее совпадение между ними подтверждает правильность предложенного подхода.

5. Выводы

В статье с помощью метода интегральных уравнений построен модовый базис для круглого диэлектрического волновода в свободном пространстве. Для этого случая получен непрерывный спектр модового базиса. Исследуемый волновод в отличие от прямоугольного диэлектрического волновода с одной боковой стенкой, удаленной на бесконечность, не имеет дискретного спектра. Рассмотренное решение позволяет получить аналитические выражения для модовых и нормировочных функций. Правильность предложенного подхода подтверждается хорошим совпадением между дисперсионными кривыми, полученными с его помощью и с использованием известного решения в частотной области. Предложенный метод может быть применен также для анализа диэлектрического волновода с произвольной зависимостью диэлектрической проницаемости от пространственных координат.

Литература

1. A. Taflove and S. Hagness. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain method, Second Edition. – Boston: Artech House, 2000. – 852 p.
2. Hashimoto M., Idemen M., Tretyakov O. A. Analytical and Numerical Methods in Electromagnetic Wave Theory. – Tokyo: Science House Co, Ltd, 1993. – 572 p.
3. Бутрым А. Ю., Кочетов Б. А. Метод модового базиса во временной области для волновода с поперечно неоднородным многосвязным сечением. 1. Общая теория метода // Радиофизика и радиоастрономия. – 2009. – Т. 14, №2. – С. 162-173.
4. Бутрым А. Ю., Легенький М. Н. Метод модового базиса для открытых диэлектрических структур // Вестник Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина. – 2008. – №806 – С. 44-47.
5. Legenkiy M. and Butrym A. Impulse signal propagation in open dielectric circular waveguide // Proc. Ultra-wideband and Ultrashort Impulse Signals UWBUSIS 2010. – Sevastopol (Ukraine). – 2010. – P. 119-121.
6. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах. Введение в теорию. – М.: Наука, 1969. – 191 с.
7. Sommerfeld A. Partial Differential Equations in Physics. – New York: Academic Press, 1949. – 335 p.
8. Table of Integrals, Series, and Products, 7th edition / I. S. Gradshteyn, I. M. Ryznik/ Ed. by A. Jeffrey and D. Zwillinger. – New York: Academic Press, 2007. – 1163 p.
9. Polyanin A. D. Handbook of linear Partial Differential Equations for engineers and scientists. – London: Chapman & Hall / Boca Raton: CRC Press, 2002. – 785 p.
10. K. Zhang, D. Li. Electromagnetic Theory for Microwaves and Optoelectronics, 2nd edition. – New York: Springer, 2007. – 666 p.

Побудова модового базису для круглого діелектричного хвилеводу методом інтегральних рівнянь

М. М. Легенький

Запропоновано новий метод, що ґрунтується на методі інтегральних рівнянь, для побудови модового базису для круглого діелектричного хвилеводу у вільному просторі. Аналітично розраховано вирази для модових та нормувальних функцій. Продемонструва-

но швидко збіжність розкладання моди частотної області за отриманим базисом. Зміна поля у часі та в напрямку подовжньої осі описується системою інтегро-диференціальних еволюційних рівнянь для коефіцієнтів розкладання поля. Показана можливість зведення системи інтегро-диференціальних еволюційних рівнянь до системи матричних диференціальних рівнянь за допомогою методу моментів. Розв'язок цієї системи для гармонічної хвилі дає дисперсійні криві круглого діелектричного хвилеводу. Вірність запропонованого методу підтверджується збігом дисперсійних кривих, отриманих з його допомогою, з відомими розв'язками в частотній області.

Mode Basis Construction for Circular Dielectric Waveguide by Integral Equation Approach

M. M. Legenkiy

A new method based on the integral equation approach is proposed for mode basis construction for a circular dielectric waveguide in free space. The expressions for mode and norm functions are obtained in closed form. The rapid convergence of the expansion of frequency domain mode over obtained basis is shown. The field change in time and longitudinal coordinate is described by the system of integro-differential evolutionary equations for coefficients of the field expansion over basis. It is shown that the system of integro-differential equations can be reduced to the system of matrix differential equations by the method of moments. Solution of this system for a harmonic wave gives dispersion curves for a circular dielectric waveguide. The validity of the method proposed is confirmed by the coincidence of the dispersion curves obtained by the given approach with the known solutions in the frequency domain.