

А. А. Каминский, Е. Е. Курчаков

О состоянии предельного равновесия нелинейного анизотропного тела с трещиной

(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)

Изучено состояние предельного равновесия нелинейного анизотропного тела с трещиной нормального отрыва при наличии зоны предразрушения. В результате численного решения соответствующей краевой задачи установлено влияние длины трещины на поля перемещений и деформаций. Выявлены особенности этих полей в окрестности трещины и зоны предразрушения.

Ключевые слова: нелинейное анизотропное тело, трещина нормального отрыва, зона предразрушения, критерий прочности.

В настоящей работе изучается состояние предельного равновесия нелинейного анизотропного тела с трещиной нормального отрыва при наличии зоны предразрушения. В частности, исследуется влияние длины трещины на ее раскрытие в вершине, а также на деформации в конце зоны предразрушения. Как и в работе [1], принимается, что размеры зоны предразрушения не зависят от длины трещины и внешней нагрузки на тело. Постановка краевой задачи осуществляется в компонентах вектора перемещений.

Постановка краевой задачи. Для постановки краевой задачи потребуются определяющие уравнения, связывающие компоненты тензора напряжений S с компонентами тензора деформаций D .

Воспользуемся тензорно-линейными определяющими уравнениями [2]:

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right). \quad (1)$$

Аргументом функции $\tilde{\varphi}(\Omega)$ является величина

$$\Omega = \sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}. \quad (2)$$

Инварианты Z , E и Ξ таковы:

$$Z = F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta}; \quad E = g^{\alpha\beta} D_{\alpha\beta}; \quad \Xi = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta}. \quad (3)$$

Отметим, что тензор F и тензор G , обратный тензору F , характеризуют анизотропию. Эти тензоры обладают высокой симметрией. Иначе говоря, в компонентах этих тензоров можно менять местами как индексы, относящиеся к любой одной паре индексов, так и сами пары индексов.

Следуя [2], функцию $\tilde{\varphi}(\Omega)$ примем такой:

$$\tilde{\varphi}(\Omega) = \begin{cases} 0, & \Omega \in [0, v]; \\ \frac{\Omega - v - a \ln\left(\frac{\Omega - v}{a} + 1\right)}{\Omega}, & \Omega \in [v, \psi]. \end{cases} \quad (4)$$

В дальнейшем потребуется также критерий прочности. Воспользуемся критерием прочности [2]:

$$\Omega = \psi. \quad (5)$$

Как показано в статье [2], при нарушении прочности плотность энергии, расходуемой на деформацию элемента тела без изменения его объема, принимает значение Ψ :

$$\Psi = v \left(\psi - \frac{v}{2} \right) + a^2 \left\{ \left(\frac{\psi - v}{a} + 1 \right) \left[\ln \left(\frac{\psi - v}{a} + 1 \right) - 1 \right] + 1 \right\}. \quad (6)$$

Будем считать, что система координат x^1, x^2, x^3 , к которой отнесено тело, является прямоугольной декартовой. Стало быть,

$$g^{\varepsilon\zeta} = \begin{cases} 1 & (\varepsilon = \zeta); \\ 0 & (\varepsilon \neq \zeta). \end{cases} \quad (7)$$

Выведем основные уравнения для компонент вектора перемещений \mathbf{u} . Воспользуемся соотношениями Коши [3]:

$$D_{\varepsilon\zeta} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x^\zeta} \quad (\varepsilon, \zeta). \quad (8)$$

Привлекая соотношения (8), запишем уравнения (1) в виде

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right). \quad (9)$$

С учетом соотношений (8) второй и третий из инвариантов (3) выразим так:

$$E = g^{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta}; \quad \Xi = G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta}. \quad (10)$$

Ограничимся рассмотрением ортотропного тела. Главные направления примем совпадающими с направлениями осей x^1, x^2, x^3 .

Остановимся на случае обобщенного плоского напряженного состояния, полагая, что

$$S^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta}(x^1, x^2) \quad (\alpha = 1, 2, \beta = 1, 2); \quad (11)$$

$$S^{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \beta = 3; \alpha = 3, \beta = 1, 2; \alpha = 3, \beta = 3). \quad (12)$$

В соответствии с равенствами (7) первый из инвариантов (10) примет вид

$$E = \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial u_3}{\partial x^3}. \quad (13)$$

Так как $\tilde{\varphi}(\Omega) \neq 1$, то, в силу равенств (12) и (7), из уравнений (9) следует, что

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} + \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\gamma} = 0 \quad (\gamma = 1, 2, \delta = 3; \gamma = 3, \delta = 1, 2). \quad (14)$$

Используем обозначения

$$\begin{aligned} G^{1111} &\equiv \mu_{AA}, & G^{1212} &\equiv \mu_{BB}, & G^{1122} &\equiv \mu_{AD}, & G^{2222} &\equiv \mu_{DD}, \\ G^{1133} &\equiv \mu_{AF}, & G^{2233} &\equiv \mu_{DF}, & G^{3333} &\equiv \mu_{FF}. \end{aligned} \quad (15)$$

Согласно равенствам (14) и обозначениям (15), второй из инвариантов (10) примет вид

$$\begin{aligned} \Xi = & \mu_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + 2\mu_{AD} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + 2\mu_{AF} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} + \\ & + \mu_{BB} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) + \\ & + \mu_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + 2\mu_{DF} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} + \mu_{FF} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \frac{\partial u_3}{\partial x^3}. \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая равенства (12) и (7) на основании уравнений (9) найдем

$$\frac{\partial u_3}{\partial x^3} = \frac{1}{G^{3333}} \left[\tilde{\varphi}(\Omega) \left(G^{3311} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + G^{3322} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + G^{3333} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} - \frac{E}{Z} \right) - G^{3311} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - G^{3322} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right]. \quad (17)$$

Опираясь на равенства (7) и выражение (17), в соответствии с уравнениями (9) будем иметь

$$\begin{aligned} S^{\alpha\beta} = & \left(G^{\alpha\beta 11} - \frac{G^{\alpha\beta 33}}{G^{3333}} G^{3311} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(G^{\alpha\beta 22} - \frac{G^{\alpha\beta 33}}{G^{3333}} G^{3322} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \\ & - \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(G^{\alpha\beta 11} - \frac{G^{\alpha\beta 33}}{G^{3333}} G^{3311} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left(G^{\alpha\beta 22} - \frac{G^{\alpha\beta 33}}{G^{3333}} G^{3322} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \right. \\ & \left. - \left(1 - \frac{G^{\alpha\beta 33}}{G^{3333}} \right) \frac{E}{Z} \right] \quad (\alpha, \beta = 1, 2; \alpha = \beta); \end{aligned} \quad (18)$$

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta 12} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + G^{\alpha\beta 21} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left(G^{\alpha\beta 12} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + G^{\alpha\beta 21} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \quad (\alpha, \beta = 1, 2; \alpha \neq \beta). \quad (19)$$

Введем обозначения

$$\frac{G^{1133}}{G^{3333}} \equiv \xi_{AF}, \quad \frac{G^{2233}}{G^{3333}} \equiv \xi_{DF}; \quad (20)$$

$$\begin{aligned} G^{1111} - \frac{G^{1133}}{G^{3333}} G^{3311} & \equiv \check{\mu}_{AA}, & G^{1122} - \frac{G^{1133}}{G^{3333}} G^{3322} & \equiv \check{\mu}_{AD}, \\ G^{2211} - \frac{G^{2233}}{G^{3333}} G^{3311} & \equiv \check{\mu}_{DA}, & G^{2222} - \frac{G^{2233}}{G^{3333}} G^{3322} & \equiv \check{\mu}_{DD}. \end{aligned} \quad (21)$$

Воспользуемся уравнениями Навье [3]:

$$\frac{\partial S^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0. \quad (22)$$

Допустим, что тело является однородным. Принимая во внимание формулы (11) и равенства (12), используя уравнения (18), (19) и учитывая второе из обозначений (15), а также обозначения (20) и (21), на основании уравнений (22) установим

$$\begin{aligned} \check{\mu}_{AA} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^1} + (\check{\mu}_{AD} + \mu_{BB}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} + \mu_{BB} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^2} & = Q^1; \\ \mu_{BB} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} + (\mu_{BB} + \check{\mu}_{DA}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} & = Q^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
Q^1 &= \frac{\partial \tilde{\varphi}(\Omega)}{\partial x^1} \left(\check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{1 - \xi_{AF}}{Z} \mathbf{E} \right) + \frac{\partial \tilde{\varphi}(\Omega)}{\partial x^2} \mu_{BB} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) + \\
&\quad + \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\check{\mu}_{AA} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^1} + (\check{\mu}_{AD} + \mu_{BB}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} + \mu_{BB} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{1 - \xi_{AF}}{Z} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^1} \right]; \\
Q^2 &= \frac{\partial \tilde{\varphi}(\Omega)}{\partial x^1} \mu_{BB} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial \tilde{\varphi}(\Omega)}{\partial x^2} \left(\check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{1 - \xi_{DF}}{Z} \mathbf{E} \right) + \\
&\quad + \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\mu_{BB} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} + (\mu_{BB} + \check{\mu}_{DA}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{1 - \xi_{DF}}{Z} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^2} \right].
\end{aligned} \tag{24}$$

На поверхностях тела и трещины зададим вектор напряжений \mathbf{P} с компонентами P^α . Воспользуемся граничными условиями [3]

$$S^{\alpha\beta} n_\beta = P^\alpha, \tag{25}$$

где n_β — компоненты единичного вектора внешней нормали \mathbf{n} .

Принимая во внимание равенства (12), используя уравнения (18), (19) и учитывая второе из обозначений (15), а также обозначения (20) и (21), на основании условий (25) получим

$$\begin{aligned}
\left(\check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) n_1 + \mu_{BB} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_2 &= P^1 + R^1; \\
\mu_{BB} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right) n_1 + \left(\check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) n_2 &= P^2 + R^2.
\end{aligned} \tag{26}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
R^1 &= \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\left(\check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{1 - \xi_{AF}}{Z} \mathbf{E} \right) n_1 + \mu_{BB} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_2 \right]; \\
R^2 &= \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\mu_{BB} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right) n_1 + \left(\check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{1 - \xi_{DF}}{Z} \mathbf{E} \right) n_2 \right].
\end{aligned} \tag{27}$$

Коснемся вопроса моделирования зоны предразрушения.

При нагружении тела у вершины трещины образуется зона предразрушения — узкая область на продолжении трещины, в которой начинается разрушение. Заменим эту зону разрезом, к поверхностям которого приложены некоторые напряжения, подлежащие определению в ходе решения соответствующей краевой задачи.

Разумеется, компоненты P^α , действующие по поверхностям разреза, должны зависеть от координат x^1 , x^2 , x^3 .

Предположим, что зависимости компонент P^α от координат x^1 , x^2 , x^3 могут быть представлены так:

$$P^\alpha = C^\alpha + C_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot} x^\beta + C_{\cdot\beta\gamma}^{\alpha\cdot\cdot} x^\beta x^\gamma + C_{\cdot\beta\gamma\delta}^{\alpha\cdot\cdot\cdot} x^\beta x^\gamma x^\delta, \tag{28}$$

где C^α , $C_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}$, $C_{\cdot\beta\gamma}^{\alpha\cdot\cdot}$, $C_{\cdot\beta\gamma\delta}^{\alpha\cdot\cdot\cdot}$ — компоненты некоторых тензоров с первого по четвертый ранг.

Рассмотрим прямоугольное тело малой толщины с трещиной по центру. С осями симметрии тела совместим оси x^1 , x^2 .

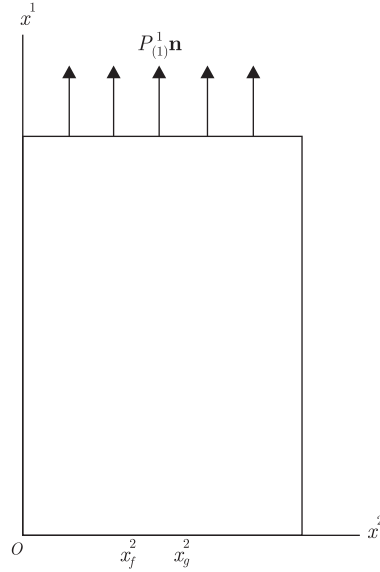


Рис. 1

На поверхностях тела и трещины зададим компоненты P^1, P^2 . Сделаем это симметрично относительно осей x^1, x^2 . Поэтому будет достаточно рассмотреть лишь четвертую часть тела, например, располагающуюся в первом квадранте (рис. 1).

Очевидно, что в конце разреза

$$u_1 = 0. \quad (29)$$

Выделим около конца разреза точку с координатами a^1, a^2 . Будем полагать, что в этой точке существуют все частные производные (до второго порядка включительно) от компоненты u_2 по координатам x^1, x^2 .

Координаты конца разреза запишем следующим образом: $a^1 + \varepsilon^1, a^2 + \varepsilon^2$.

Составляя кратный ряд Тейлора, расположенный по степеням $\varepsilon^1, \varepsilon^2$, установим

$$\begin{aligned}
 & -u_2 + u_2(a^1, a^2) + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 \varepsilon^1 + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 \varepsilon^2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^2 \varepsilon^2 \right) = 0. \quad (30)
 \end{aligned}$$

Ввиду симметрии относительно оси x^2 из компонент вектора P , действующих по верхней поверхности разреза, отличной от нуля будет только компонента P^1 .

Пусть координата x^2 начала разреза (точки A) будет x_f^2 , а конца разреза (точки B) — x_g^2 . Согласно формулам (28), зависимость компоненты P^1 от координаты x^2 имеет вид

$$P^1 = C^1 + C_{.2}^1 x^2 + C_{.22}^1 x^2 x^2 + C_{.222}^1 x^2 x^2 x^2. \quad (31)$$

Примем, что

$$P^1|_{x^2=x_f^2} = P_A^1; \quad P^1|_{x^2=x_g^2} = P_B^1. \quad (32)$$

Дифференцируя формулу (31) по x^2 , получим

$$\frac{\partial P^1}{\partial x^2} = C_{\cdot 2}^1 + 2C_{\cdot 22}^1 x^2 + 3C_{\cdot 222}^1 x^2 x^2. \quad (33)$$

Положим, что

$$\frac{\partial P^1}{\partial x^2} \Big|_{x^2=x_f^2} = 0; \quad \frac{\partial P^1}{\partial x^2} \Big|_{x^2=x_g^2} = 0. \quad (34)$$

Используя формулу (31) и условия (32), а также формулу (33) и условия (34), найдем

$$C^1 = \frac{P_A^1(3x_f^2 - x_g^2)(x_g^2)^2 - P_B^1(3x_g^2 - x_f^2)(x_f^2)^2}{(x_f^2 - x_g^2)^3}, \quad (35)$$

$$C_{\cdot 2}^1 = \frac{6(P_B^1 - P_A^1)x_f^2 x_g^2}{(x_f^2 - x_g^2)^3}, \quad C_{\cdot 22}^1 = -\frac{3(P_B^1 - P_A^1)(x_g^2 + x_f^2)}{(x_f^2 - x_g^2)^3}, \quad C_{\cdot 222}^1 = \frac{2(P_B^1 - P_A^1)}{(x_f^2 - x_g^2)^3}.$$

Ниже сосредоточимся на состоянии предельного равновесия, приравнявая P_A^1 нулю.

Числовой пример. Исследовано влияние длины трещины на ее раскрытие в вершине, а также на деформации в конце зоны предразрушения.

Заданы существенные компоненты тензора F :

$$F_{1111} = 0,193 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad -F_{1122} = 0,045 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad -F_{1133} = 0,049 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1},$$

$$F_{1212} = 0,107 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad F_{1313} = 0,121 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad F_{2222} = 0,142 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1},$$

$$-F_{2233} = 0,045 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad F_{2323} = 0,107 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad F_{3333} = 0,193 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}.$$

На основе этих значений получены существенные компоненты тензора G :

$$G^{1111} = 6,395 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad G^{1122} = 2,744 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad G^{1133} = 2,263 \cdot 10^{10} \text{ Па},$$

$$G^{1212} = 2,336 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad G^{1313} = 2,066 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad G^{2222} = 8,781 \cdot 10^{10} \text{ Па},$$

$$G^{2233} = 2,744 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad G^{2323} = 2,336 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad G^{3333} = 6,395 \cdot 10^{10} \text{ Па}.$$

Кроме того, заданы постоянные v и ψ , а также коэффициент a :

$$v = 3,25 \cdot 10^2 \text{ Па}^{1/2}, \quad \psi = 93,50 \cdot 10^2 \text{ Па}^{1/2}; \quad a = 1,1112866 \cdot 10^2 \text{ Па}^{1/2}.$$

По формуле (6) вычислено Ψ : $\Psi = 645,97 \cdot 10^4 \text{ Па}$.

Наконец, заданы

$$x_f^2 = 1,00 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad 1,10 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad \dots, \quad 1,50 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad -\varepsilon^1 = \varepsilon^2 = 0,02 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Для длин трещины, l_R , и разреза, l_S , имеем

$$l_R = x_f^2; \quad l_S = x_g^2 - x_f^2.$$

Подчеркнем, что длина разреза оставалась неизменной, равной $0,16 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

Из компонент вектора напряжений отличной от нуля была исключительно компонента P^1 на верхней поверхности тела (см. рис. 1).

При решении краевой задачи, следовало определить $P_{(1)}^1$, требуя, чтобы в точке B соблюдался критерий (5), а Ψ составляло $645,97 \cdot 10^4$ Па.

В общей сложности решение краевой задачи найдено для шести вариантов, различающихся длиной трещины. В каждом из этих вариантов $P_{(1)}^1$ варьировалась.

При решении краевой задачи (для каждого из значений $P_{(1)}^1$) учитывалось, что в точке B компонента S^{11} должна удовлетворять равенству

$$S_B^{11} = |P_B^1|. \quad (36)$$

Не известная заранее P_B^1 определялась за несколько итераций. Изначально она задавалась.

Компонента P^1 на верхней поверхности разреза вычислялась по формулам (35) и (31).

Затем по уравнениям (29), (30) и (23), а также (26) численно отыскивались компоненты u_1, u_2 . При этом применялся метод последовательных приближений Ильюшина [4]. В первом приближении величины Q^1, Q^2 и R^1, R^2 полагались равными нулю, а в каждом последующем приближении рассчитывались (с учетом формул (24) и (27), а также формул (4), (2), инвариантов (13) и (16), выражения (17)) на основе значений компонент u_1, u_2 , полученных в предыдущем приближении. После этого по первому из уравнений (18) вычислялась компонента S^{11} в точке B . Если она не удовлетворяла равенству (36), то значение P_B^1 корректировалось, и вся процедура повторялась.

Итак, для каждой длины трещины найдены компоненты u_1, u_2 .

Наиболее интересны значения компонент u_1, u_2 в точке A (табл. 1).

Прежде всего констатируем, что увеличение длины трещины с $1,00 \cdot 10^{-2}$ м до $1,50 \cdot 10^{-2}$ м повлекло за собой уменьшение $P_{(1)}^1$ с $7,7791 \cdot 10^7$ Па до $5,8014 \cdot 10^7$ Па. К тому же, оно вызвало уменьшение u_1^A с $2,5072 \cdot 10^{-5}$ м до $2,4409 \cdot 10^{-5}$ м. При этом u_2^A изменилась более значительно, уменьшившись с $-1,7271 \cdot 10^{-5}$ м до $-2,1527 \cdot 10^{-5}$ м.

Заслуживает внимания то обстоятельство, что, несмотря на существенное изменение длины трещины, u_1^A изменилась мало. Таким образом, вне зависимости от длины трещины ее раскрытие в вершине, равно $2u_1^A$, оставалось приблизительно одним и тем же.

Далее для каждой длины трещины по соотношениям (8) вычислены компоненты D_{11}, D_{22}, D_{33} .

Особый интерес вызывают значения компонент D_{11}, D_{22}, D_{33} в точке B (табл. 2).

Как видим, увеличение длины трещины с $1,00 \cdot 10^{-2}$ м до $1,50 \cdot 10^{-2}$ м привело к уменьшению D_{11}^B с $20,751 \cdot 10^{-3}$ до $20,437 \cdot 10^{-3}$ и увеличению D_{22}^B с $17,756 \cdot 10^{-3}$ до $18,047 \cdot 10^{-3}$. При этом D_{33}^B изменилась гораздо менее заметно, увеличившись с $-35,388 \cdot 10^{-3}$ до $-35,370 \cdot 10^{-3}$.

Таблица 1

$l_R \cdot 10^2, \text{ м}$	$P_{(1)}^1 \cdot 10^{-7}, \text{ Па}$	$u_1^A \cdot 10^5, \text{ м}$	$u_2^A \cdot 10^5, \text{ м}$
1,00	7,7791	2,5072	-1,7271
1,10	7,3535	2,4876	-1,8182
1,20	6,9451	2,4712	-1,9061
1,30	6,5518	2,4579	-1,9911
1,40	6,1713	2,4478	-2,0732
1,50	5,8014	2,4409	-2,1527

Таблиця 2

$l_R \cdot 10^2, \text{ м}$	$D_{11}^B \cdot 10^3$	$D_{22}^B \cdot 10^3$	$D_{33}^B \cdot 10^3$
1,00	20,751	17,756	-35,388
1,10	20,650	17,850	-35,382
1,20	20,569	17,925	-35,378
1,30	20,506	17,983	-35,374
1,40	20,463	18,023	-35,371
1,50	20,437	18,047	-35,370

Представляется важным тот факт, что, невзирая на существенное изменение длины трещины, D_{33}^B не претерпела ощутимых изменений.

Заметим, что компонента D_{33} принимает в точке B минимальное значение. Следовательно, зная из эксперимента компоненту D_{33} в различных точках перед трещиной, можно обнаружить точку B , установив, тем самым, длину зоны предразрушения.

Цитированная литература

1. Kaminsky A. A., Kurchakov E. E. Modeling the fracture process zone near a crack tip in a nonlinear elastic body // Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, No 6. – P. 735–744.
2. Курчаков Е. Е. Термодинамическое обоснование определяющих уравнений для нелинейного анизотропного тела // Доп. НАН України. – 2015. – № 9. – С. 46–53.
3. Love A. Treatise on the mathematical theory of elasticity. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927. – 674 p.
4. Ильюшин А. А. Пластичность. – Москва; Ленинград: ОГИЗ, 1948. – 376 с.

References

1. Kaminsky A. A., Kurchakov E. E. Int. Appl. Mech., 2011, 47, No 6: 735–744.
2. Kurchakov E. E. Dop. NAN Ukraine, 2015, No 9: 46–53 (in Russian).
3. Love A. Treatise on the mathematical theory of elasticity; Cambridge: Univ. Press, 1927.
4. Il'yushin A. A. Plasticity, Moscow; Leningrad: OGIZ, 1948 (in Russian).

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 21.05.2015

А. О. Камінський, Є. Є. Курчаков

Про стан граничної рівноваги нелінійного анізотропного тіла з тріщиною

Институт механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

Вивчено стан граничної рівноваги нелінійного анізотропного тіла з тріщиною нормального відриву за наявності зони передруйнування. В результаті чисельного розв'язання відповідної крайової задачі встановлено вплив довжини тріщини на поля переміщень і деформацій. Виявлено особливості цих полів в околі тріщини та зони передруйнування.

Ключові слова: нелінійне анізотропне тіло, тріщина нормального відриву, зона передруйнування, критерій міцності.

A. A. Kaminsky, E. E. Kurchakov

On the limiting equilibrium state of a nonlinear anisotropic body with a crack

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

The limiting equilibrium state of a nonlinear anisotropic body with a mode I crack in the presence of a prefracture zone is studied. By the numerical solving of the associated boundary-value problem, it is established how the crack length influences the displacement and deformation fields. Features of these fields in vicinities of the crack and the prefracture zone are revealed.

Keywords: nonlinear anisotropic body, mode I crack, prefracture zone, strength criterion.