

Пространственно-временная динамика событий в детерминированных моделях типа БТВ

© В. Б. Спиртус, 2012

Институт геофизики НАН Украины, Киев, Украина

Поступила 9 марта 2011 г.

Представлено членом редколлегии Б. Г. Пустовитенко

Розглянуто ґратчасті моделі типу БТВ з довільним розташуванням комірки підтоку енергії, зокрема ті, що мають можливість додаткової дисипації у повільному часі. Встановлено якісну подібність модельних подій та реальної сейсмічності в таких аспектах: фрактальна динаміка мігруючої активності, логлінійний взаємозв'язок максимуму часової компоненти та магнітуди, стягування подій низького рангу до місця майбутньої великої.

The latticed models of the BTV type with the arbitrary arrangement of cell of underrun of energy are considered, including possibility of additional dissipation in slow time. Qualitative similarity of model events and real seismicity in the following relations is set: fractal dynamics of migration activity, loglinear relationship of maximum of temporal components with magnitude, gathering of events of low grade to the place of future strong ones.

Введение. Интенсивно развивающимся в последние годы направлением является модель самоорганизованной критичности, введенная Баком, Таном и Висенфельдом (БТВ) [Bak, 1987]. Решеточная модель, имитирующая обрушение кучи песка, реализованная с использованием клеточно-автоматной идеологии, оказалась достаточно простой и в то же время универсальной [Шаповал, Шнирман, 2009 а, б]. В силу этого она нашла применение не только в моделировании сейсмичности [Manna, 1991; Olami et al., 1992; Bak, 1996; Шаповал, Шнирман, 2002], но и солнечной активности [Bershadskii et al., Sreenivasan, 2003], физики плазмы [March et al., 2004], финансовых рынков [Johansen et al., 2000].

Имитируемые свойства сейсмичности в моделях типа БТВ — это наличие двух масштабов времени и локальность взаимодействия при распространении землетрясений [Шаповал, Шнирман, 2009 б]. "Медленное" время можно связать с движением тектонических плит с характерной скоростью порядка нескольких сантиметров в год. На фоне этого процесса землетрясения, вызывающие иногда на один-два порядка большие смещения, — события почти мгновенные. Локальность взаимодействия, присущая клеточным автоматам, физически соответ-

ствует перераспределению посредством диффузии накапливаемой величины (будем говорить далее не о песке, а об энергии) по соседним областям. Перераспределение происходит при достижении определенного порога энергии. При этом может возникнуть лавина — несколько актов "пересыпания", относящихся к одному моменту медленного времени.

В стандартных моделях энергия внутри области сохраняется, а диссипация происходит на границе. Через некоторый промежуток времени в БТВ-моделях устанавливается состояние динамического равновесия, характерное для самоорганизованной критичности (SOC) [Olami et al., 1992]. В последнее критическое состояние описывается степенным законом [Dhar, 1990], что соответствует известному в сейсмологии закону повторяемости землетрясений Гутенберга — Рихтера [Gutenberg, Richter, 1956].

В большинстве работ при исследовании моделей БТВ рассматриваются законы повторяемости лавин и предсказуемость крупных событий на основе прогностических алгоритмов [Repke, Carlson, 1994; Blanter et al., 1999; Шаповал, Шнирман, 2009 а]. В настоящей статье в центре внимания находится пространственно-временная миграция геометрических центров

возникающих лавин. Исследуются максимальные промежутки времен между последовательными событиями одного энергетического уровня τ_m [Пустовитенко и др., 1997]. Изучается также стягивание событий низкого ранга к месту будущего крупного, что ныне достоверно установлено как *фундаментальное свойство* сейсмичности [Пустовитенко, Поречнова, 2008].

Описание модели. Рассматривается квадратная решетка со стороной L клеток. Энергетическое состояние каждой ячейки h_{ij} может меняться со временем. Совокупность чисел h_{ij} образует текущую *конфигурацию*. Целое число h_{ij} находится в интервале $(0, H)$, где $H \geq 2$ — некоторое пороговое значение. В каждый момент времени в фиксированную ячейку (i^*, j^*) добавляется "квант" энергии:

$$h_{i^*, j^*} \rightarrow h_{i^*, j^*} + 1. \quad (1)$$

Если для какой-либо ячейки достигается порог H , то она считается *перегруженной* и начинается процесс в *быстром времени*. Этот процесс может состоять из ряда актов перераспределения энергии, сбрасываемой перегруженными ячейками своим соседям. (Две ячейки решетки считаются *соседними*, если они имеют общую сторону. Внутренние ячейки имеют четырех соседей, неугловые граничные ячейки — трех, а угловые — двух.)

Если перегруженная ячейка является *диссипативной*, то ее энергия изменяется следующим образом:

$$h_{ij} \rightarrow h_{ij} - 4 - D_{ij}. \quad (2)$$

При этом соседи $c(i, j)$ перегруженной ячейки (i, j) получают приращение энергии

$$h_{c(i, j)} \rightarrow h_{c(i, j)} + 1. \quad (3)$$

Дополнительная диссипация (ДД) определяется счетчиками z_{ij} перегруженности ячеек:

$$D_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } z_{ij} < z^*, \\ d^* & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4)$$

Эта диссипация отсутствует до тех пор, пока ячейка (i, j) достаточно много раз не будет перегружена. Критическое значение z^* и фиксированная величина d^* — параметры модели. В отличие от работы [Шаповал, Шнирман, 2009б] (подобная диссипация в их статье называется *внутренней*) ДД рассматривается здесь не в быстром, а в медленном времени, и, следовательно, имеет иное физическое содержание. Соответственно этому замечанию,

счетчики z_{ij} обнуляются в используемом алгоритме только один раз: первоначально.

На границе решетки, когда число соседей перегруженной ячейки меньше четырех, происходит *граничная* диссипация энергии. Нетрудно видеть, что внутри решетки при $H = 4$ пока не включается ДД, энергия сохраняется.

Одновременно с процессом моделирования, начинающимся с некоторой начальной конфигурации h_{ij}^0 , создается каталог событий — возникающих кластеров перегруженных ячеек. Каждая запись каталога содержит время возникновения лавины t , число перегруженных ячеек s — *размер* лавины и координаты геометрического центра кластера. В настоящей статье расчеты проводились для нулевой начальной конфигурации $h_{ij}^0 = 0$ и фиксированных параметров $H = 4, d^* = 1$. Всего рассчитано 6 каталогов модельных событий, из них 2 — для случая с ДД.

На основе сформированного каталога проводилось сканирование по времени миграции геометрических центров лавин. При этом для каждой ячейки в заданном временном интервале определялся максимальный размер связанного с ней события. Он использовался в дальнейшем для наглядного представления пространственно-временной динамики событий.

Для расчета эволюции общей энергии в решетке $W(t)$ и размера лавин $s(t)$ применялся алгоритм `sandpile.m` (автор Wolfgang Schwanghart).

Исследование стягивания событий низкого ранга к месту будущего крупного основано на расчете функции $r(t)$ [Пустовитенко, Поречнова, 2008]. Эта функция строится по набору дискретных значений: расстояний между эпицентром сильного (главного) землетрясения и каждым эпицентром последовательно произошедших слабых толчков. В приложении к модельному каталогу для этой цели необходимо задание испытываемой ячейки (i_c, j_c) — центра крупного события и интервала размеров лавин (s_{\min}, s_{\max}) , в пределах которого вычисляется упомянутая функция. Как и в методике Б. Г. Пустовитенко, оказалось необходимым предварительное сглаживание функции $r(t)$.

Одна из эффективных процедур фильтрации высокочастотных шумов типа возникающих в гравиметрической аппаратуре связана с использованием ядерного сглаживания [Хардле, 1993]. Новые сглаженные значения для момента времени t вычисляются как средние арифметические $2N$ взвешенных значений, взятых

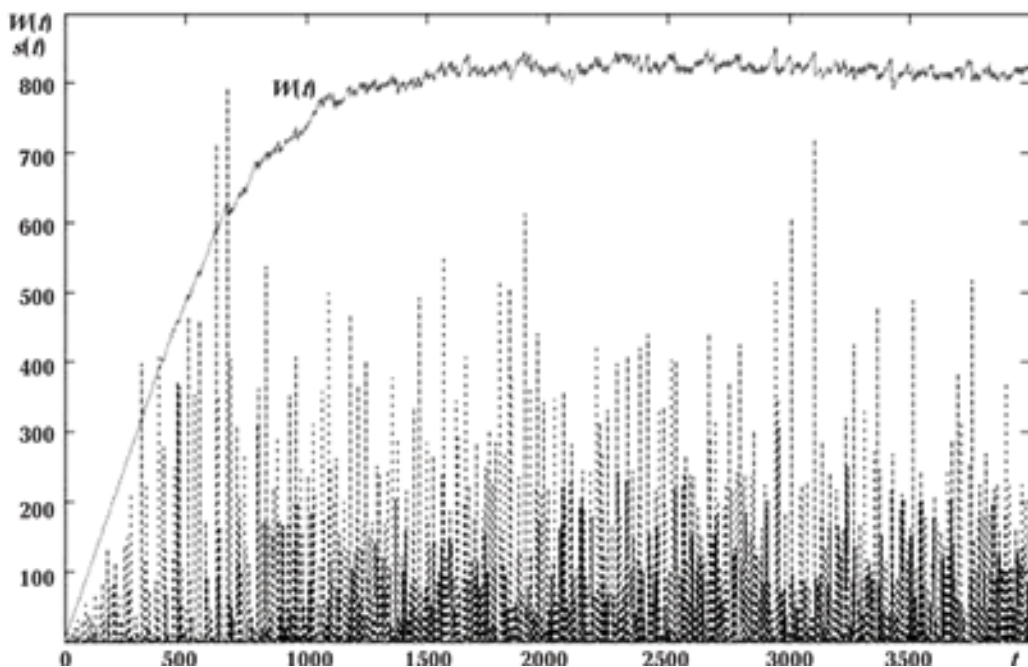


Рис. 1. Изменение во времени общей энергии в решетке $W(t)$ и размера лавин $s(t)$ в случае без ДД: $L = 20$, $i_* = 10$, $j_* = 8$.

на интервале времени $[t - N \cdot \delta t, t + N \cdot \delta t]$, где δt — величина шага. Весовые коэффициенты выбирались с использованием окна фон Ханна (функция "hanning" из TOOLBOX пакета MATLAB).

Результаты расчетов. На рис. 1—3 представлены результаты расчетов общей энергии в решетке и размера лавин как функции времени для двух случаев: без ДД (рис. 1—2) и с ее включением (рис. 3). Во всех примерах величина энергии после переходного процесса (накопления достаточного количества "песка") выходит на средний уровень $W_a(t)$ и далее колеблется вокруг него. Таким образом, в решетке устанавливается состояние SOC. Нетрудно видеть, что величина W_a и максимальный размер событий определяются размером решетки L (см. рис. 1—2). Здесь прямая аналогия с сейсмичностью, где существует связь величины предельной энергии землетрясения E_{\max} с размерами блоков, аккумулирующих эту энергию. Например, для максимального реализованного в каждом блоке Черноморского региона землетрясения получена зависимость $\lg S = (0,44 \pm 0,04) \lg E_{\max} - 1,99 \pm 0,45$ (S — в км², E — в Дж) [Пустовитенко, 2003].

Для решетки большего размера также длиннее продолжительность переходного процесса, который включает интервал постепенного нарастания до максимума размера событий (см. рис. 1).

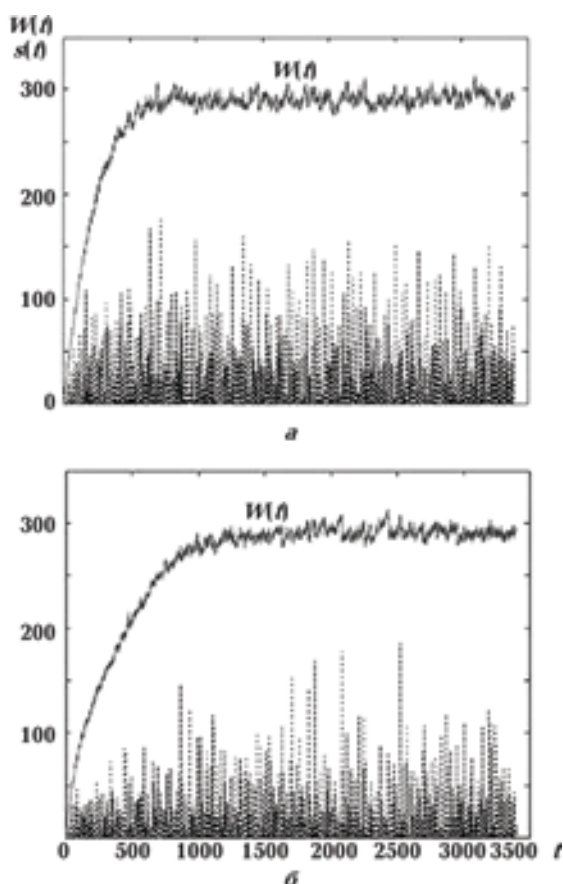


Рис. 2. Изменение во времени общей энергии в решетке $W(t)$ и размера лавин $s(t)$ в случае без ДД: $L = 12$, а — $i_* = 7$, $j_* = 4$; б — $i_* = 4$, $j_* = 10$.

Кроме размера решетки на длительность переходного процесса, временной ход и частоту лавин существенно влияет выбор ячейки (i_*, j_*) . Инверсии этой ячейки относительно осей симметрии квадратной решетки все эти вещи оставляют неизменными: играет роль только расстояние от центра решетки. При большей близости к центру короче время выхода на состояние SOC, больше крупных событий и выше частота их повторения (см. рис. 2).

Случай с имеющейся ДД (см. рис. 3) можно сравнить с рис. 2, б, расчеты для которого проведены без включения ДД, причем использована та же ячейка (i_*, j_*) . На уровень W_a и его дисперсию включение ДД не оказывает заметного влияния. Наиболее характерный эффект — уменьшение числа крупных событий.

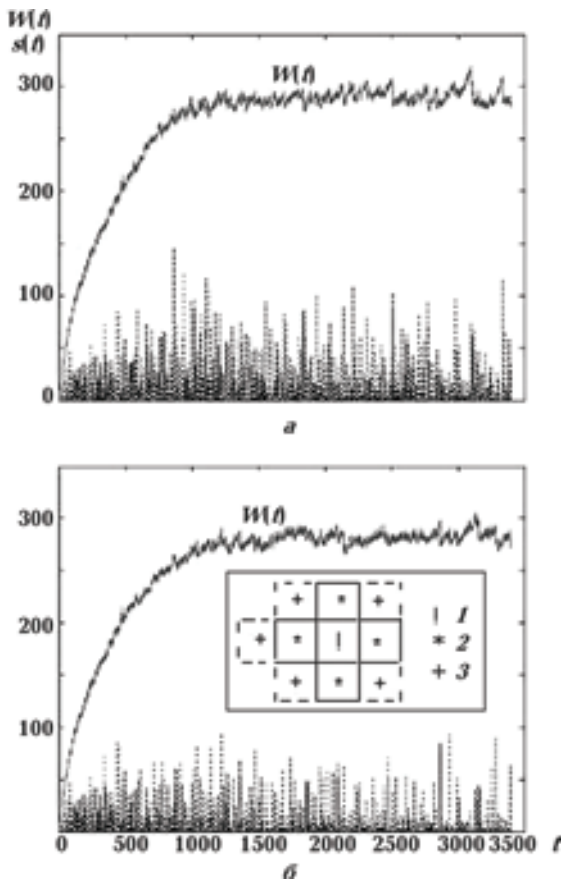


Рис. 3. Изменение во времени общей энергии в решетке и размера лавин в случае с ДД: $L = 12$, $i_* = 4$, $j_* = 10$ ($a - z^* = 600$; $b - z^* = 250$). На врезке: рост кластера клеток ДД (1 — ячейка поступления энергии; 2 — клетки кластера на момент времени $t = 1455$; 3 — новые клетки кластера на момент времени $t = 3158$).

Особенно это проявляется при снижении величины z^* (см. рис. 3, б). Когда барьер начала ДД сравнительно высок (см. рис. 3, а), на тех временах, пока он не достигнут, временной ход $s(t)$ идентичен рис. 2, б. При относительно низком значении z^* быстрее начинается рост кластера диссипативных ячеек. Зарождается кластер в ячейке (i_*, j_*) , а затем постепенно распространяется на соседние клетки (врезка на рис. 3, б).

Пространственно-временная миграция геометрических центров возникающих лавин исследовалась путем сканирования по времени (рис. 4). Рассмотрение ограничено пределами решетки. Оценивалось влияние размера решетки, выбора ячейки (i_*, j_*) , включения ДД. Расчеты без включения ДД (рис. 4, а—в) показывают, что кластер максимальных размеров событий со временем смещается к центру квадрата. Размеры этого кластера, его связность, конфигурация обрамляющих областей наиболее варьируют при выборе ячейки поступления энергии вблизи границы квадрата (см. рис. 4, а). Вероятно, в этом конкретном случае немаловажно и то обстоятельство, что на анализируемом интервале времени не успевает установиться состояние SOC.

Влияние выбора ячейки (i_*, j_*) наиболее проявляется для первого интервала сканирования по времени (рис. 4, б, в). Окрестность этой клетки еще отличается повышенными значениями s по отношению к фону. Различия в размерах лавин и частоте событий (см. рис. 2) находят отражение в пространственно-временной динамике на рис. 4, б и 4, в. Для случая более близкой к центру квадрата ячейки (i_*, j_*) (см. рис. 4, б) в целом шире размер смещающегося кластера, максимальная активность проявляется здесь не в третьем временном интервале (см. рис. 4, в), а в первом в согласии с рис. 2.

Влияние ДД на миграцию центров лавин можно проследить на рис. 4, в, г.

Последние рисунки удобно анализировать, сопоставляя с рис. 2, б и рис. 3, б, отражающими соответственный временной ход лавин $s(t)$. Уменьшение числа крупных событий в случае с ДД приводит к большей раздробленности упомянутого кластера: растет число вкраплений, усложняется форма граничных контуров. Особенно это видно на третьем слайде рис. 4, г. Кроме того, случай с ДД отличаются более значительные перестройки кластера активных ячеек в смежные интервалы времени (см. третий и четвертый слайд рис. 4, г). К по-

хожим результатам: фрактализации, сложной пространственно-временной динамике и т. п. может приводить даже без ДД увеличение размера решетки.

В сейсмологии экстремальный временной параметр τ_m отражает интервал энергонасыщения блоков среды, способных породить землетрясения магнитуды M [Кульчицкий, Пустовитенко, 1995; Пустовитенко и др., 1997; Пустовитенко, 2003]. Для пояснения приведем небольшую цитату: "В данном объеме среды накопление упругой энергии для реализации землетрясений магнитуды M не может продолжаться более времени τ_m от момента возникновения предыдущего землетрясения той же магнитуды. Этот временной порог определяется двумя факторами: скоростью потока поступающей в среду энергии и скоростью диссипативных процессов" [Пустовитенко и др., 1997]. Данная характеристика экстремального параметра τ_m идеально соответствует "парадигме" рассматриваемых моделей типа БТВ. На рис. 5, а представлены два графика зависимости $\lg(\tau_m)$ от модельной "магнитуды" $m = \lg s$. В обоих случаях расчеты проводились без подключения ДД. При большей близости к центру ячейки (i_*, j_*), когда больше крупных событий и выше частота их повторения (см. рис. 2), временной порог τ_m оказывается ниже во всем диапазоне значений m . Для регионов бассейна Черного моря и его окружения выявлена аналогичная логлинейная взаимосвязь параметров τ_m и M (рис. 5, б).

В рассматриваемых моделях типа БТВ, как правило, имеет место стягивание событий низкого ранга к месту будущего крупного. Этот эффект иллюстрирует рис. 6. Вычисления проведены для ранее рассмотренного случая (без учета ДД), когда наблюдается высокая частота повторения сильных событий $s(t)$ (см. рис. 2, а). Разный выбор испытываемых ячеек (i_c, j_c), взятых вблизи центра квадрата, где сосредоточены события максимальных размеров (см. рис. 4, б), приводит к заметно различающимся картинам поведения сглаженной функции $r_{han}(t)$ (см. рис. 6). Естественно, конечный результат зависит также и от правильного выбора интервала (s_{\min}, s_{\max}).

На рис. 6, б имеется ряд глубоких минимумов функции $r_{han}(t)$. Для $t > 2000$ отмеченные особенности, видимо, связаны с крупными событиями, относящимися к моментам времени 2349, 2679, 2997, 3215, 3300 (таблица). На рис. 6, в также выделяются лавины на временах 2349, 2997, 3215, имеющие свои

ми центрами ячейки, смежные с испытываемыми. Но, кроме того, появляются и глубокие минимумы функции $r_{han}(t)$, ассоциируемые с событиями на временах 994, 1362 и 1414, 1781 и 1844, 2506. Центры данных событий либо совпадают с ячейкой (7,6), либо являются ее соседями, во всяком случае, эти клетки не смежны с ячейкой (6,7). Приведенный пример представляется убедительным аргументом в пользу наличия в данной модели БТВ эффекта стягивания событий низкого ранга к месту будущего крупного.

Естественно, настоящий подход, как и другие алгоритмы прогноза, не дает стопроцентных гарантий успеха: возможны пропуски цели и ложные тревоги. Так, в нашем примере, на рис. 6, б пропущено событие на времени 1695, на рис. 6, в не выявлены сильнейшая лавина на времени 740 ($s = 176$), крупные события на временах 1897, 1964. Впрочем, что касается расчетов $r_{han}(t)$ для времен до установления состояния SOC, то этим результатам, видимо, не следует придавать большое значение.

Заключение. Особенностью рассмотренных в статье моделей типа БТВ является произвольное расположение ячейки, куда втекают порции энергии, возможность ДД в медленном времени. Оказалось, что расстояние от места подтока энергии до центра решетки влияет не только на время выхода на SOC, размеры лавин и частоту событий. Это расстояние во многом определяет также картину пространственно-временной динамики характерного кластера максимальной активности. Последний с течением времени мигрирует к центру решетки и подобно наблюдаемой сейсмической активности [Пустовитенко и др., 1997] может иметь сложную фрактальную структуру. Для отслеживания происходящих с этим кластером "метаморфоз" использована подходящая техника сканирования по времени [Спиртус, 2010].

Включение ДД приводит к уменьшению числа крупных лавин, при этом к усложнению формы и большей раздробленности кластера максимальной активности. Для моделей БТВ этого типа после определенного числа событий в некоторой ячейке она приобретает свойство поглощать энергию. Начиная с клетки (i_*, j_*), постепенно захватывая ее соседей и расширяясь, растет кластер диссипативных ячеек.

Последние расчеты, по нашему мнению, допускают следующую геофизическую интерпретацию. Сейсмически активная среда вбли-

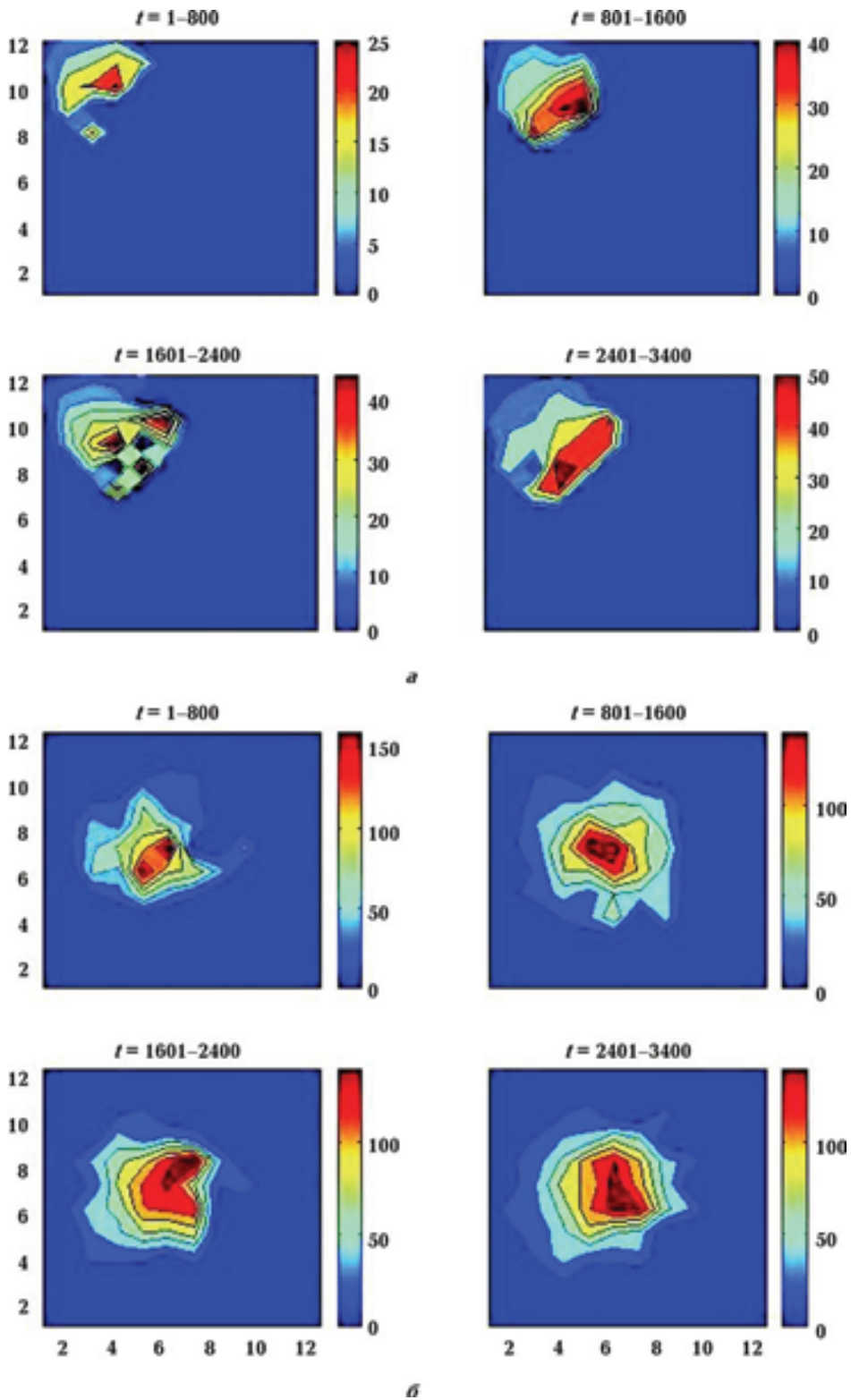


Рис. 4. Сканирование по времени расположения геометрических центров событий Па: *a* — $L = 12$, $z^* = \infty$, $i_* = 12$, $j_* = 2$; *б* — $L = 12$, $z^* = \infty$, $i_* = 7$, $j_* = 4$; *в* — $L = 12$, $z^* = \infty$, $i_* = 4$, $j_* = 10$; *г* — $L = 12$, $z^* = 250$, $i_* = 4$, $j_* = 10$.

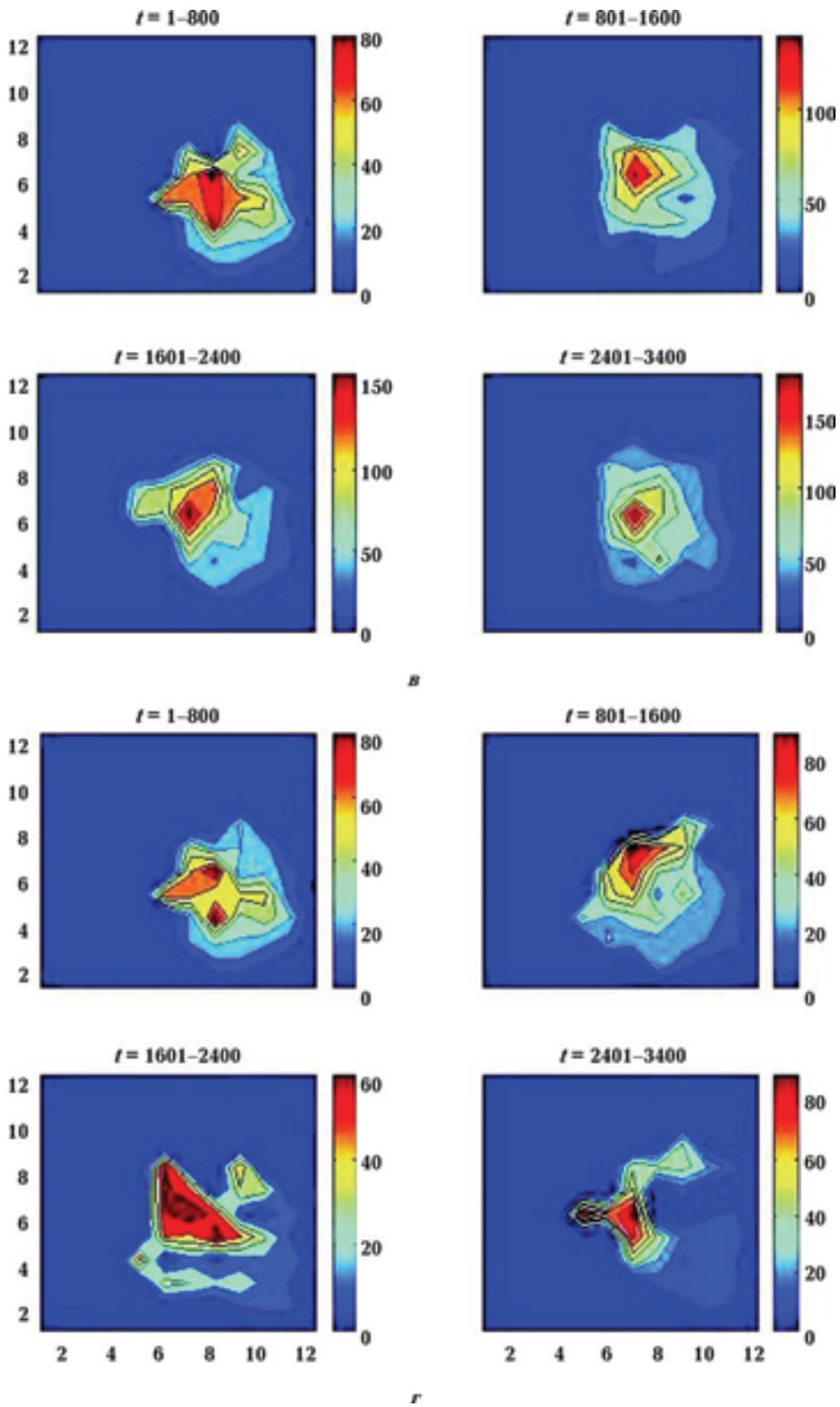


Рис. 4 (окончание).

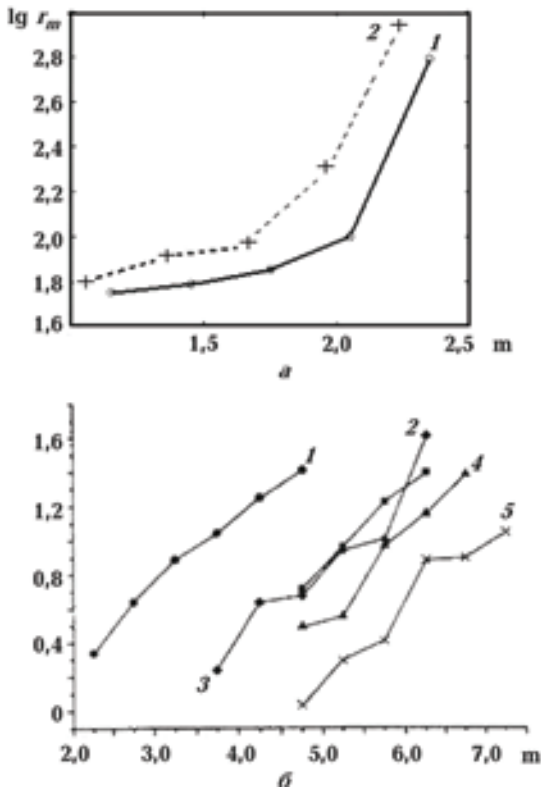
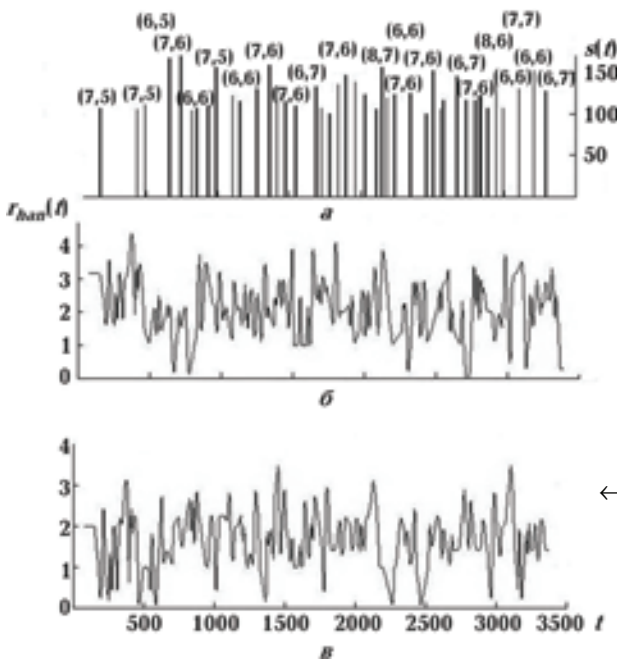


Рис. 5. Зависимость от магнитуды максимального промежутка времени между последовательными событиями одного энергетического уровня τ_m : а — модельные расчеты для фиксированного интервала условных магнитуд $\delta m = 0,3$: 1 — $L = 12, z^* = \infty, i_* = 7, j_* = 4$; 2 — $L = 12, z^* = \infty, i_* = 4, j_* = 10$; б — по данным наблюдений регионов бассейна Черного моря и его окружения с интервалом $M \pm 0,5$: 1 — Крым, 2 — Карпаты, 3 — Болгария, 4 — Кавказ, 5 — Турция [Пустовитенко и др., 1997].

Расчетный каталог событий с размером $s \geq 100$ (параметры модели см. в подписи к рис. 5)

Время, t	Размер лавины, s	Средние координаты	
		X	Y
176	108	7	5
441	105	6	6
495	111	7	5
659	167	6	5
740	176	7	6
819	104	6	6
854	107	6	6
934	109	8	5
994	156	7	5
1110	122	7	6
1159	115	7	6
1275	131	6	6
1362	159	7	6
1414	133	7	6
1474	118	7	6
1546	109	7	6
1695	133	6	7
1729	107	6	6
1781	100	6	6
1844	136	8	6
1893	147	7	6
1964	138	7	6
2032	124	7	5
2114	105	8	7
2152	156	8	7
2190	119	6	5
2244	124	7	6
2349	125	6	6
2459	100	8	7
2506	153	7	6
2559	105	7	5
2583	116	7	6
2679	146	6	7
2744	117	8	5
2806	117	6	5
2839	122	7	6
2886	107	8	6
2947	143	8	6
2997	107	7	7
3108	130	6	6
3215	152	6	6
3300	130	6	7



← Рис. 6. Изменение во времени размера лавин $s(t)$ с указанием геометрических центров событий (а). Сглаженная функция $r_{han}(t)$ расстояний от этих центров до определенной ячейки (i_c, j_c) (б, в). Использован интервал размеров лавин (s_{min}, s_{max}) . Параметры: $L = 12, i_* = 7, j_* = 4; s_{min} = 40, s_{max} = 80$; б — $i_c = 6, j_c = 7$; в — $i_c = 7, j_c = 6$.

зи "горячей точки" после ряда землетрясений становится поврежденной, трещиноватой, в ней возникают значительные пластические деформации. В свете этого кластер поглощающих (упругую) энергию ячеек естественно ассоциировать с разрастающейся в плане разломной зоной, поскольку разломы являются местом сброса энергии, накопленной в упругих деформациях блоков земной коры [Ребецкий, 2007]. Конечно, развитие сейсмогенных зон Земли связано с большим числом разнообразных воздействий и намного сложнее используемых модельных представлений. В природе приток энергии, например термической, в определенную область среды, как правило, непостоянен во времени и не локализован. Вряд ли двумерная модель может использоваться при исследовании геотектонических процессов, в которых необходимо учитывать глубинные факторы. С большим основанием, вероятно, ее можно пытаться применить при моделировании развития вулканотектонических структур: в этом случае прогрев является локальным за счет высокой плотности теплового потока в проводящих магму каналах.

Кроме степенного закона повторяемости лавин в моделях SOC [Dhar, 1990], аналогичного известному в сейсмологии закону, оказалось, что модели типа БТВ скрывают и дру-

гие присущие сейсмическому процессу недавно открытые закономерности. Рассчитанные по модельному каталогу максимальные промежутки времен между последовательными событиями одного энергетического уровня обнаруживают ту же логлинейную взаимосвязь параметров τ_m и M , что и для наблюдаемой сейсмичности Черноморского региона и его окружения [Кульчицкий, Пустовитенко, 1995; Пустовитенко и др. 1997]. Ранее для одномерной диффузионной модели сейсмичности, использующей клеточно-автоматную идеологию, аналогичный вывод был получен в работе [Кульчицкий, 2006].

Наиболее значимым результатом, по нашему мнению, является нахождение в модели типа БТВ эффекта стягивания событий низкого ранга к месту будущего крупного. Ныне достоверно показано, что такой сценарий типичен для всех сейсмоактивных районов мира и на этой основе разработан среднесрочный предвестник землетрясений [Пустовитенко, 2003; Пустовитенко, Поречнова, 2008]. Представляет интерес в дальнейшем детальнее исследовать этот предвестник для разных модификаций моделей БТВ, а также применительно к клеточно-автоматным моделям с различающейся скоростью подтока энергии для разных ячеек [Кузнецов, 2000].

Список литературы

- Кузнецов И. В. Прогноз сильных событий в моделях клеточных автоматов на основе решения обратной задачи // Вычисл. сейсмология. — 2000. — Вып. 31. — С. 212—220.
- Кульчицкий В. Е. Диффузионная клеточно-автоматная модель сейсмичности: результаты численного эксперимента. Сопоставление с наблюдениями // Геофиз. журн. — 2006. — **28**, № 1. — С. 82—96.
- Кульчицкий В. Е., Пустовитенко Б. Г. Об оценке магнитуд максимально возможных землетрясений по временной компоненте сейсмичности // Докл. АН Украины. — 1995. — № 5. — С. 37—41.
- Пустовитенко Б. Г. Сейсмические процессы в Черноморском регионе и сейсмическая опасность Крыма: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Киев, 2003. — 41 с.
- Пустовитенко Б. Г., Поречнова Е. И. О процессах формирования очаговых зон сильных землетрясений // Геофиз. журн. — 2008. — **30**, № 5. — С. 73—90.
- Пустовитенко Б. Г., Щербина С. В., Кульчицкий В. Е. Пространственно-временные свойства сейсмичности бассейна Черного моря и его обрамления // Геофиз. журн. — 1997. — **19**, № 6. — С. 58—69.
- Ребецкий Ю. Л. Состояние и проблемы прогноза землетрясений. Анализ основ с позиции детерминированного подхода // Геофиз. журн. — 2007. — **29**, № 4. — С. 102—120.
- Спиртус В. Б. Возможности биофизических моделей типа Фитц Хью-Нагумо в отображении двумерной миграции сейсмичности // Геофиз. журн. — 2010. — **32**, № 1. — С. 134—143.
- Харгле В. Прикладная непараметрическая регрессия. — Москва: Мир, 1993. — 349 с.
- Шаповал А. Б., Шнирман М. Г. Диссипативная

- детерминированная модель БТВ с активизационным сценарием сильных событий // Физика Земли. — 2009а. — № 5. — С. 47—56.
- Шаповал А.Б., Шнирман М.Г.* Сценарий сильных событий в модели накопления песка // Вычисл. сейсмология. — 2002. — **33**. — С. 267—277.
- Шаповал А.Б., Шнирман М.Г.* Прогноз крупнейших событий в модели образования лавин с помощью предвестников землетрясений // Физика Земли. — 2009б. — № 5. — С. 39—46.
- Bak P.* How nature works: the science of self-organized criticality. — New York: Springer-Verlag, Inc., 1996. — 205 p.
- Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality: an explanation of $1/f$ noise // Phys. Rev. Lett. — 1987. — **59**. — P. 381—384.
- Blanter E.M., Shnirman M.G., Le Mouel J.L.* Temporal variation of predictability in a hierarchical model of dynamical self-organized criticality // Phys. Earth. Plan. Int. — 1999. — **111**. — P. 317—327.
- Bershadskii A., Sreenivasan K.R.* Multiscale self-organized criticality and powerful X-ray flares // Eur. Phys. J. B. — 2003. — **35**. — P. 513—515.
- Dhar D.* Self-organized critical state of sandpile automaton models // Phys. Rev. Lett. — 1990. — **64**. — P. 1613—1616.
- Gutenberg G., Richter C.F.* Magnitude and energy of earthquakes // Ann. Geophys. — 1956. — **9**. — P. 1—15.
- Johansen A., Ledoit O., Sornette D.* Crashes as critical points // J. Theor. Appl. Finance. — 2000. — **3**. — P. 219—255.
- Manna S.S.* Two-state model of self-organized criticality // J. Phys. A. — 1991. — **24**. — P. 1363—1369.
- March T.K., Chapman S.C., Dendy R.O., Merrifield J.A.* Off-axis electron cyclotron heating and the sandpile paradigm for transport in tokamak plasmas // Phys. Plasmas. — 2004. — **11**. — P. 659—665.
- Olami Z., Feder H., Christensen K.* Self-organized criticality in a continuous, non-conservative cellular automaton modeling earthquakes // Phys. Rev. Lett. — 1992. — **68**. — P. 1244—1247.
- Repke S.L., Carlson J.M.* Predictability of self-organizing systems // Phys. Rev. Earth. — 1994. — **50**. — P. 236—242.