УДК 517.9

Г. М. Скляр, В. А. Марченко

Нерівність Харді та конструкція генератора C_0-групи з власними векторами, що не утворюють базис

(Представлено академіком НАН України Є. Я. Хрусловим)

Наведено конструкцію генератора лінійно зростаючої C_0-групи із простими чисто уявними власними числами, що згущуються на нескінченності, та власними векторами, що не утворюють базис.

Ключові слова: C_0-група, базис Ріса, власні вектори, спектр.

Нехай H — сепарабельний гільбертів простір над полем $\mathbb{C}$ з нормою $\|\cdot\|$ та скалярним добутком $\langle\cdot,\cdot\rangle$. C_0-напівгрупи лінійних обмежених операторів є фундаментальним поняттям цього повідомлення. Вивчення C_0-напівгруп перш за все вмотивоване тим, що велика кількість проблем математичної фізики, механіки, біології та інших наук може бути сформульована у вигляді задачі Коші для абстрактного диференціального рівняння

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \qquad t \geqslant 0, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

у просторі H (див., наприклад, [1, 2]). Оператор A генерує C_0-напівгрупу в просторі H тоді і тільки тоді, коли задача Коші (1) є коректною і резольвентна множина оператора A є непустою (див. [3]). А коректність задачі (1), у свою чергу, означає, що для будь-якого початкового стану системи $x_0 \in D(A)$ існує єдиний класичний розв'язок задачі (1). Зокрема, це характерно для системи диференціальних рівнянь електродинаміки Максвелла в мікроскопічній формі, системи з запізненням нейтрального типу [4–6], регулярних систем Штурма–Ліувілля [7], для рівнянь, що описують процеси теплопровідності, дифузії та хвильові процеси різної природи [1]. Якщо ж оператор A генерує C_0-групу, то це означає, додатково, що задача (1) може бути розглянута на всій осі $t \in \mathbb{R}$ та має єдиний розв'язок.

В останнє десятиріччя виникло декілька неочікуваних результатів у спектральній теорії C_0-напівгруп (див. [8, 9]). Ці результати стосуються достатніх умов того, щоб власні вектори (підпростори) інфінітезимального оператора утворювали базис Ріса (базис Ріса із підпросторів) простору H. Виявляється, що ці умови мають достатньо загальний характер. Основний результат робіт [8, 9] у випадку простого спектра формулюється таким чином.

Теорема 1 [8, 9]. *Нехай A-генератор C_0-групи в просторі H з простими власними числами $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ та відповідними (нормованими) власними векторами $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Якщо мають місце такі дві умови:*

1) $\overline{\mathrm{Lin}}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = H$;

2) спектр задовольняє умову

$$\inf_{n\neq m} |\lambda_n - \lambda_m| > 0, \tag{2}$$

то $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ утворює базис Ріса простору H.

Основною метою нашої роботи є вияв того факту, що умова (2) є дуже суттєвою. Тобто якщо ми опустимо умову (2) або навіть трохи послабимо її, то твердження теореми 1 перестане бути вірним. Випадок, коли спектр $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ може бути поданий у вигляді $K < \infty$ множин, кожна з яких задовольняє умову (2), був розглянутий у роботі [9]. Тому ми розглядаємо випадок, коли спектр $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ не задовольняє умову (2) та, більше того, не може бути поданим у вигляді K множин, кожна з яких задовольняє умову (2). Ми пропонуємо конструкцію генератора C_0-групи з власними числами $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset i\mathbb{R}$ та відповідними власними векторами, що не утворюють базис Шаудера. Більш точно, числа $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ підкорюються умовам

$$\lim_{n\to\infty} i\lambda_n = -\infty \qquad \text{та} \qquad \lim_{n\to\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| = 0, \tag{3}$$

а відповідне сімейство власних векторів є повним, мінімальним, але не рівномірно мінімальним. Крім того, виявляється, що генератор сконструйованої групи має лінійний характер зростання при $t \to \pm\infty$. Важливим моментом у доведенні основного результату (теорема 2) є застосування класичної дискретної нерівності Харді для $p = 2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant 4\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

1. Простір $H_1(\{e_n\})$. Розглянемо будь-який бизис Ріса $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ простору H. Введемо у розгляд простір

$$H_1^0(\{e_n\}) = \{x \in H \colon \|x\|_1 = \|(I-T)x\|\},$$

де T — визначений усюди в H оператор, такий, що $Te_n = e_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $0 \in \sigma(I-T)$, то $H_1^0(\{e_n\})$ є лінійним нормованим простором, але неповним. Позначимо через $H_1(\{e_n\})$ поповнення простору $H_1^0(\{e_n\})$ за нормою $\|\cdot\|_1$.

Виявляється, що $H_1(\{e_n\})$ є простором Гільберта, що складається з усіх формальних рядів $x = (\mathfrak{f}) \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ таких, що

$$\{c_n - c_{n-1}\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2,$$

де $c_0 = 0$. Норма елемента $x \in H_1(\{e_n\})$ обчислюється за формулою

$$\|x\|_1 = \left\|(\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n\right\|_1 = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}(c_n - c_{n-1})e_n\right\|,$$

а скалярний добуток двох елементів x, $y \in H_1(\{e_n\})$ — за формулою

$$\langle x, y\rangle_1 = \langle (I-T)x, (I-T)y\rangle.$$

Наприклад, $(\mathfrak{f}) \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} e_n \in H_1(\{e_n\})$ для будь-якого $\alpha \in [0, 1/2)$. Дійсно, для $\alpha = 0$ цей факт є очевидним. Коли ж $\alpha \in (0, 1/2)$, матимемо

$$n^{\alpha} - (n-1)^{\alpha} \sim n^{\alpha-1},$$

якщо $n \to \infty$. Звідси випливає, що $\{n^{\alpha} - (n-1)^{\alpha}\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$.

Зауважимо, що в тому випадку, коли $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ є ортонормованим базисом простору H, скалярний добуток двох елементів $x = (\mathfrak{f})\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n$, $y = (\mathfrak{f})\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n e_n \in H_1(\{e_n\})$ обчислюється за значно простішою формулою, а саме

$$\langle x, y\rangle_1 = \sum_{n=1}^{\infty}(c_n - c_{n-1})(\overline{d}_n - \overline{d}_{n-1}).$$

Також відзначимо, що в окремому випадку, коли $H = \ell_2$ і $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — канонічний базис простору ℓ_2,

$$H_1(\{e_n\}) = \ell_2(\Delta).$$

Простір $\ell_2(\Delta)$ складається з усіх послідовностей, чиї різниці є 2-абсолютно сумовні, з нормою $\|x\|_{\ell_2(\Delta)} = \|\Delta x\|_{\ell_2}$, де Δ — різницевий оператор, тобто

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

(див. [10]). Іншими словами, $\ell_2(\Delta) = \{x = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \colon \Delta x \in \ell_2\}$. Звідси випливає, що

$$H_1(\{e_n\}) = \left\{x = (\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \colon \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2(\Delta)\right\}.$$

Отже, наш простір $H_1(\{e_n\})$ є аналогічним простору $\ell_2(\Delta)$, вперше введеному та дослідженому в роботі [10]. Також зазначимо, що простір $\ell_2(\Delta)$ виникає достатньо природно, а саме як поповнення простору $(\ell_2)_1^0(\{e_n\})$, де $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — канонічний базис простору ℓ_2. Серед властивостей простору $H_1(\{e_n\})$ ми маємо відмітити такі.

Твердження 1. *Простір $H_1(\{e_n\})$ має такі властивості:*

1) $\overline{\mathrm{Lin}}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = H_1(\{e_n\})$;

2) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ не утворює базис Шаудера простору $H_1(\{e_n\})$;

3) послідовність $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ є мінімальною, але не рівномірно мінімальною в просторі $H_1(\{e_n\})$.

2. Генератор C_0-групи з власними векторами, що не утворюють базис. Визначимо оператор $A\colon H_1(\{e_n\}) \supset D(A) \mapsto H_1(\{e_n\})$ формулою

$$Ax = A(\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n = (\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n e_n, \tag{4}$$

де $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — необмежена послідовність точок на комплексній площині, а

$$D(A) = \left\{x = (\mathfrak{f})\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in H_1(\{e_n\}) \colon \{\lambda_n c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2(\Delta)\right\}. \tag{5}$$

Ми підійшли до центрального результату роботи.

Теорема 2. *Нехай* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— базис Ріса простору* H. *Тоді* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *не утворює базис простору* $H_1(\{e_n\})$ *і оператор* A, *заданий формулою* (4), *з областю визначення* (5), *де*

$$\lambda_n = i \ln n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

генерує C_0*-групу в просторі* $H_1(\{e_n\})$.

Зауважимо, що спектр $\{\lambda_n = i \ln n\}_{n=1}^{\infty}$ не задовольняє умову (2) та, більш того, не може бути поданим у вигляді K множин, кожна з яких задовольняє умову (2), бо

$$\lim_{n\to\infty} |\ln(n+1) - \ln n| = 0.$$

Підкреслимо, що, навіть якщо ми розглянемо спектр $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора A, сконструйованого за правилами (4), (5), тієї ж самої геометричної природи, тобто такий, що задовольняє умови (3), то A не обов'язково буде породжувати C_0-групу в $H_1(\{e_n\})$. Це спостереження підкріплюється таким твердженням.

Твердження 2. *Нехай* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— базис Ріса простору* H. *Тоді оператор* A, *заданий формулою* (4), *з областю визначення* (5), *де* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *задовольняє умови* (3), *та* $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n|/\sqrt{n} > 0$, *не породжує навіть* C_0*-напівгрупу в просторі* $H_1(\{e_n\})$.

Сконструйована в теоремі 2 C_0-група має такі чудові властивості.

Твердження 3. *Нехай* $\{e^{At}\}_{t\in\mathbb{R}}$ *—* C_0*-група, сконструйована в теоремі 2. Тоді справедливі такі твердження:*

1) C_0*-група* $\{e^{At}\}_{t\in\mathbb{R}}$ *зростає, як* $|t|$, *при* $t \to \pm\infty$;

2) логарифмічний показник ω_0 *зростання* C_0*-групи* $\{e^{At}\}_{t\in\mathbb{R}}$ *дорівнює нулю.*

Роботу виконано за часткової підтримки НАН України. Проект “Лінійні еволюційні рівняння у гілбертовому просторі та рівняння Больцмана.”

Цитована література

1. *Curtain R. F., Zwart H. J.* An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory. – New York: Springer, 1995. – 698 p. – (Texts in Applied Mathematics, Vol. 21.).
2. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Т. 1: Общая теория. – Москва: Изд-во иностр. лит. 1962. – 896 с.
3. *van Neerven J.* The Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators. – Basel: Birkhäuser, 1996. – 235 p. – (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 88).
4. *Rabah R., Sklyar G. M., Rezounenko A. V.* Generalized Riesz basis property in the analysis of neutral type systems // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. – 2003. – **337**, No 1. – P. 19–24.
5. *Rabah R., Sklyar G. M., Rezounenko A. V.* Stability analysis of neutral type systems in Hilbert space // J. Differential Equations. – 2005. – **214**, Iss. 2 – P. 391–428.
6. *Rabah R., Sklyar G. M.* The analysis of exact controllability of neutral-type systems by the moment problem approach // SIAM J. Control Optim. – 2007. – **46**, No 6. – P. 2148–2181.
7. *Delattre C., Dochain D., Winkin J.* Sturm-Liouville systems are Riesz-spectral systems // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. – 2003. – **13**, No 4. – P. 481–484.
8. *Xu G. Q., Yung S. P.* The expansion of a semigroup and a Riesz basis criterion // J. Differential Equations. – 2005. – **210**, Iss. 1. – P. 1–24.
9. *Zwart H.* Riesz basis for strongly continuous groups // J. Differential Equations. – 2010. – **249**, Iss. 10. – P. 2397–2408.
10. *Başar F., Altay B.* On the space of sequences of p-bounded variation and related matrix mappings // Ukrainian Math. J. – 2003. – **55**, No 1. – P. 136–147.

References

1. *Curtain R. F., Zwart H. J.* An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory, Texts in Applied Mathematics, Vol. 21, New York: Springer, 1995.
2. *Dunford N., Schwartz J. T.* Linear Operators, Vol. 1, General Theory, Moscow: Foreign literature publishing house, 1962 (in Russian).
3. *van Neerven J.* The Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators, Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 88, Basel: Birkhäuser, 1996.
4. *Rabah R., Sklyar G. M., Rezounenko A. V.* C.R. Math. Acad. Sci. Paris, 2003, **337**, No 1: 19–24.
5. *Rabah R., Sklyar G.M., Rezounenko A. V.* J. Differential Equations, 2005, **214**, Iss. 2: 391–428.
6. *Rabah R., Sklyar G. M.* SIAM J. Control Optim., 2007, **46**, No 6: 2148–2181.
7. *Delattre C., Dochain D., Winkin J.* Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2003, **13**, No 4: 481–484.
8. *Xu G. Q., Yung S. P.* J. Differential Equations, 2005, **210**, Iss. 1: 1–24.
9. *Zwart H.* J. Differential Equations, 2010, **249**, Iss. 10: 2397–2408.
10. *Başar F., Altay B.* Ukrainian Math. J., 2003, **55**, No 1: 136–147.

Інститут математики Щецинського університету, Польща
Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна, Харків
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, Харків

Надійшло до редакції 21.04.2015

Г. М. Скляр, В. А. Марченко

Неравенство Харди и конструкция генератора C_0-группы с собственными векторами, не образующими базис

Институт математики Щецинского университета, Польша
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина, Харьков

Представлена конструкция генератора линейно растущей C_0-группы с простыми чисто мнимыми собственными числами, которые сгущаются на бесконечности, и собственными векторами, не образующими базис.

Ключевые слова: C_0-группа, базис Рисса, собственные векторы, спектр.

G. M. Sklyar, V. A. Marchenko

Hardy inequality and the construction of the generator of a C_0-group with eigenvectors not forming a basis

Institute of Mathematics, University of Szczecin, Poland
V. N. Karazin Kharkiv National University
B. I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the NAS of Ukraine, Kharkiv

The construction of the generator of linearly growing C_0-group with simple purely imaginary eigenvalues, which cluster at infinity, and eigenvectors not forming a basis, is presented.

Keywords: C_0-group, Riesz basis, eigenvectors, spectrum.