УДК 519.216

ВЕКТОРНОЕ ПОЛИНОМИНАЛЬНОЕ КАНОНИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

И. П. АТАМАНЮК

Получено векторное полиноминальное каноническое разложение случайного процесса, которое не накладывает никаких существенных ограничений на класс исследуемых процессов.

A vector polynomial canonic expansion of a random process has been derived, which does not impose any significant limitations on the class of the studied processes

Каноническое разложение случайного процесса является универсальным инструментом для решения многих прикладных задач управления [1], таких, как моделирование функционирования объекта контроля, диагностика состояния, фильтрация и экстраполяция параметров объекта управления и т. д. Такое разложение для некоторого случайного процесса $X(t)$, заданного дискретизированными моментными функциями $M[X(i)]$, $M[X(i)X(j)]$, $i, j = \overline{1, I}$, в исследуемом ряде точек t_i, $i = \overline{1, I}$, имеет вид [1, 2]:

$$X(i) = M[X(i)] + \sum_{\nu=1}^{i} V_\nu \varphi_\nu(i),\ i = \overline{1, I}, \tag{1}$$

где V_ν, $\nu = \overline{1, I}$ — случайный коэффициент, $M[V_\nu] = 0$, $M[V_\nu V_\mu] = 0$, $\nu \neq \mu$; $M[V_\nu^2] = D_\nu$; $\varphi_\nu(i)$, ν, $i = \overline{1, I}$ — неслучайная координатная функция, $\varphi_\nu(\nu) = 1$, $\varphi_\nu(i) = 0$ при $\nu > \text{i}$.

Элементы канонического разложения определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$V_i = X(i) - M[X(i)] - \sum_{\nu=1}^{i-1} V_\nu \varphi_\nu(i),\ i = \overline{1, I}, \tag{2}$$

$$D_i = M[X^2(i)] - \{M[X(i)]\}^2 - \sum_{\nu=1}^{i-1} D_\nu \varphi_\nu^2(i),\ i = \overline{1, I}, \tag{3}$$

$$\varphi_\nu(i) = \frac{1}{D_\nu}\{M[X(\nu)X(i)] - M[X(\nu)]M[X(i)] - \sum_{j=1}^{\nu-1} D_j \varphi_j(\nu)\varphi_j(i)\},\ \ \nu = \overline{1, I},\ \ i = \overline{\nu, I}. \tag{4}$$

Разложение (1) точно представляет случайный процесс $X(t)$ в точках дискретизации и обеспечивает в рамках линейных связей минимум среднего квадрата ошибки приближения.

Если $X(t)$ обладает полиномиальными вероятностными связями: $M[X^\nu(i)X^\mu(j)]$, $i, j = \overline{1, I}$, ν, $\mu = \overline{1, N-1}$, $\nu + \mu \le N$, то каноническое представление процесса [3] записывается как

$$X(i) = M[X(i)] + \sum_{\nu=1}^{i} \sum_{\lambda=1}^{N-1} W_\nu^{(\lambda)} \beta_{1\nu}^{(\lambda)}(i),\ i = \overline{1, I}, \tag{5}$$

где

$$W_\nu^{(\lambda)} = X^\lambda(\nu) - M[X^\lambda(\nu)] - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \sum_{j=1}^{N-1} W_\nu^{(j)} \beta_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu) - \sum_{j=1}^{\lambda-1} W_\nu^{(j)} \beta_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu),\ \ \nu = \overline{1, I}; \tag{6}$$

$$D_\lambda(\nu) = M[\{W_\nu^{(\lambda)}\}^2] = M[X^{2\lambda}(\nu)] - M^2[X^\lambda(\nu)] - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \sum_{j=1}^{N-1} D_j(\mu)\{\beta_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu)\}^2 - \sum_{j=1}^{\lambda-1} D_j(\nu)\{\beta_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu)\}^2,\ \nu = \overline{1, I}; \tag{7}$$

$$\beta_{h\nu}^{(\lambda)}(i) = \frac{M[W_\nu^{(\lambda)}(X^h(i) - M[X^h(i)])]}{M[\{W_\nu^{(\lambda)}\}^2]} = \frac{1}{D_\lambda(\nu)}(M[X^\lambda(\nu)X^h(i)] - M[X^\lambda(\nu)]M[X^h(i)] - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \sum_{j=1}^{N-1} D_j(\mu)\beta_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu)\beta_{h\mu}^{(j)}(i) - \sum_{j=1}^{\lambda-1} D_j(\nu)\beta_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu)\beta_{h\nu}^{(j)}(i),\ \ \lambda = \overline{1, h},\ \nu = \overline{1, i}. \tag{8}$$

Координатные функции $\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i)$, $h, \lambda = \overline{1, H}$, ν, $i = \overline{1, I}$, обладают следующим свойством:

$$\varphi_{h\nu}^{(\lambda)} = \begin{cases} 1,\ h = \lambda \text{ и } \nu = i; \\ 0,\ i < \nu. \end{cases} \tag{9}$$

Предположим, что исследуемый процесс обладает указанными выше нелинейными связями и включает H зависимых скалярных составляющих:

$$X(t) = \{X_1(t),\ \dots\ ,X_h(t),\ \dots\ ,X_H(t)\},$$

$$M[X_l^\nu(i)\, X_h^\mu(j)],\ \ i, j = \overline{1, I};\ \ h = \overline{1, H},$$

$$\nu, \mu = \overline{1, N-,1}\, \nu, \quad \nu + \mu \le N.$$

Применение выражения (5) к каждой составляющей $X_h(t), h = \overline{1, H}$, не дает исчерпывающего представления процесса $X(t)$, так как в данном случае не учитываются взаимные связи между составляющими. Классическое линейное разложения для векторных процессов [1, 2] ограничивает объем используемой априорной информации авто- и взаимокорреляционными функциями составляющих:

$$X_h(i) = M[X_h(i)] + \sum_{\nu=1}^{i} \sum_{\lambda=1}^{H} V_\nu^{(\lambda)} \varphi_{h\nu}^{(j)}(i), \quad i = \overline{1, I}, \tag{10}$$

где $V_\nu^{(\lambda)} = X_\lambda(\nu) - M[X_\lambda(\nu)] - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \sum_{j=1}^{H} V_\nu^{(j)} \varphi_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu) -$

$$- \sum_{\mu=1}^{\lambda-1} V_\nu^{(j)} \varphi_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu), \ \nu = \overline{1, I}; \tag{11}$$

$$D_\lambda(\nu) = M[\{V_\nu^{(\lambda)}\}^2] = M[\{X_\lambda(\nu)\}^2] - M^2[X_\lambda(\nu)] - \sum_{\mu=1}^{\nu=1} \sum_{j=1}^{H} D_j(\mu) \{\varphi_{\lambda\,\mu}^{(j)}(\nu)\}^2 - \sum_{j=1}^{\lambda-1} D_j(\nu) \{\varphi_{\lambda\,\mu}^{(j)}(\nu)\}^2, \ \nu = \overline{1, I}; \tag{12}$$

$$\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i) = \frac{M[V_\nu^{(\lambda)}(X_h(i) - M[X_h(i)])]}{M[\{V_\nu^{(\lambda)}\}^2]} = \frac{1}{D_\lambda(\nu)} (M[X_\lambda(\nu) X_h(i)] - M[X_\lambda(\nu)]\, M[X_h(i)]) - \sum_{\mu=1}^{\nu=1} \sum_{j=1}^{H} D_j(\mu)\, \varphi_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu)\, \varphi_{h\mu}^{(j)}(i) - \sum_{j=1}^{\lambda-1} D_j(\nu)\, \varphi_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu)\, \varphi_{h\nu}^{(j)}(i), \ \lambda = \overline{1, h}, \nu = \overline{1, i}. \tag{13}$$

В этой связи естественно возникает задача получения разложения, сочетающего в себе достоинства представления (5) (исчерпывающее описание каждой составляющей) и выражения (10) (учет взаимного влияния составляющих, но уже с использованием моментных функций порядка ≥ 2).

Для получения такого разложения введем в рассмотрение массив случайных величин

$$\begin{vmatrix} X_1(1) & X_1(2) & \ldots & X_1(I-1) & X_1(I) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_1^{N-1}(1) & X_1^{N-1}(2) & \ldots & X_1^{N-1}(I-1) & X_1^{N-1}(I) \\ X_2(1) & X_2(2) & \ldots & X_2(I-1) & X_2(I) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_2^{N-1}(1) & X_2^{N-1}(2) & \ldots & X_2^{N-1}(I-1) & X_2^{N-1}(I) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_H(1) & X_H(2) & \ldots & X_H(I-1) & X_H(I) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_H^{N-1}(1) & X_H^{N-1}(2) & \ldots & X_H^{N-1}(I-1) & X_H^{N-1}(I) \end{vmatrix} \tag{14}$$

Корреляционные моменты элементов массива (14) полностью описывают вероятностные связи процесса $\bar{X}(t)$ в исследуемом ряде точек t_i, $i = \overline{1, I}$, поэтому применение векторного линейного канонического разложения (10) к строкам $X_h(i)$, $i = \overline{1, I}$, $h = \overline{1, H}$, позволяет получить каноническое разложение с полным учетом априорной информации:

$$X_h(i) = M[X_h(i)] + \sum_{\nu=1}^{i} \sum_{l=1}^{h-1} \sum_{\lambda=1}^{N-1} W_{\nu l}^{\lambda}\, \beta_{l\,\lambda}^{(h,\,1)}(\nu, i), \ i = \overline{1, I}, \tag{15}$$

$$W_{\nu\,l}^{(\lambda)} = X_l^{(\lambda)}(\nu) - M[X_l^{\lambda}(\nu)] - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \sum_{m=1}^{H} \sum_{j=1}^{N-1} W_{\mu m}^{(j)}\, \beta_{mj}^{(l,\,\lambda)}(\mu, \nu) - \sum_{m=1}^{l-1} \sum_{j=1}^{N-1} W_{\nu m}^{(j)}\, \beta_{mj}^{(l,\,\lambda)}(\nu, \nu) - \sum_{j=1}^{\lambda-1} W_{\nu l}^{(j)}\, \beta_{lj}^{(l,\,\lambda)}(\nu, \nu), \ \nu = \overline{1, I}; \tag{16}$$

$$D_{l,\,\lambda}(\nu) = M[\{W_{\nu l}^{\lambda}\}] = M[X_l^{2\lambda}(\nu)] - M^2[X_l^{\lambda}(\nu)] - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \sum_{m=1}^{H} \sum_{j=1}^{N-1} D_{mj}(\nu) \{\beta_{mj}^{(l,\,\lambda)}(\mu, \nu)\}^2 - \sum_{m=1}^{l-1} \sum_{j=1}^{N-1} D_{mj}(\nu) \{\beta_{mj}^{(l,\,\lambda)}(\nu, \nu)\}^2 - \sum_{j=1}^{\lambda-1} D_{lj}(\nu) \{\beta_{lj}^{(l,\,\lambda)}(\nu, \nu)\}^2, \ \nu = \overline{1, I}; \tag{17}$$

$$\beta_{l\lambda}^{(h,\,s)}(\nu, i) = \frac{M[W_{\nu l}^{(\lambda)}(X_h^s(i) - M[X_h^s(i)])]}{M[\{W_{\nu l}^{(\lambda)}\}^2]} =$$

$$= \frac{1}{D_{l\lambda}(\nu)} (M[X_l^{\lambda}(\nu) X_h^s(i)] - M[X_l^{\lambda}(\nu)]\, M[X_h^s(i)] -$$

$$- \sum_{\mu=1}^{\nu=1} \sum_{m=1}^{H} \sum_{j=1}^{N-1} D_{mj}(\mu)\, \beta_{mj}^{(l,\,\lambda)}(\mu, \nu)\, \beta_{mj}^{(h,\,s)}(\mu, i) -$$

$$- \sum_{m=1}^{l-1} \sum_{j=1}^{N-1} D_{mj}(\nu)\, \beta_{mj}^{(l,\,\lambda)}(\nu, \nu)\, \beta_{mj}^{(h,\,s)}(\nu, i) -$$

$$-\sum_{j=1}^{\lambda-1} D_{ij}(\nu)\beta_{lj}^{(l,\,\lambda)}(\nu,\,\nu)\,\beta_{lj}^{(h,\,s)}(\nu,\,i),\ \lambda=\overline{1,\,h},\ \nu=\overline{1,\,i}.$$

$$\lambda=\overline{1,\,h},\quad \nu=\overline{1,i}.$$

Случайный процесс $\overline{X}(t)$ представлен с помощью $H\times(N-1)$ массивов $\left\{W_l^{(\lambda)}\right\}$, $\lambda=\overline{1,\,N-1}$, $l=\overline{1,\,H}$, некоррелированных центрированных случайных коэффициентов $W_{\nu l}^{(\lambda)}$, $\nu=\overline{1,\,I}$. Каждый из этих коэффициентов содержит информацию о соответствующих значениях $X_l^{(\lambda)}(\nu)$, а координатные функции $\beta_{l\lambda}^{(h,\,s)}(\nu,\,i)$ описывают вероятностные связи порядка $\lambda+s$ между составляющими $X_l(t)$ и $X_h(t)$ в моменты времени t_ν и t_i.

Разложение (15) не накладывает никаких существенных ограничений на класс исследуемых случайных процессов (линейность, марковость, стационарность, монотонность и т. д.) и, учитывая рекуррентный характер определения его элементов, достаточно простое в вычислительном отношении.

1. *Кудрицкий В. Д.* Прогнозирование надежности радиоэлектронных устройств. — Киев: Техника, 1982. — 168 с.
2. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение. — М.: Физматгиз, 1962. — 720 с.
3. *Атаманюк І. П.* Поліноміальний канонічний розклад скалярного випадкового процесу зміни параметрів радіоелектронних пристроїв // Вісн. ЖІТІ. Техн. науки. — 2000. — № 13. — С. 99–101.

Ин-т предпринимательства и соврем. технологий, Житомир

Поступила в редакцию 22.05.2002