УДК 621.039.586+ 519.7

Джамшид Гараханлу, И. В. Казачков

Национальный технический университет Украины «КПИ», г. Киев, Украина

Математическое моделирование потенциально опасных ядерных объектов со сдвиговыми аргументами

Представлены результаты математического моделирования и вычислительного эксперимента на ЭВМ на основе ранее разработанных агрегированных математических моделей потенциально опасных ядерных объектов со сдвиговыми аргументами — запаздываниями и опережениями во времени. Дан анализ влияния запаздываний и опережений, показаны особенности системы нелинейных дифференциальных уравнений, вызываемые наличием отклоняющихся аргументов. По результатам вычислительного эксперимента установлены закономерности исследуемых потенциально опасных ядерных объектов.

Ключевые слова: потенциально опасный объект, модель, запаздывание, опережение, вычислительный эксперимент.

Джамшид Гараханлу, І. В. Казачков

Математичне моделювання потенційно небезпечних ядерних об'єктів із зсувними аргументами

Наведено результати математичного моделювання та обчислювального експерименту на ЕОМ на основі раніше розроблених агрегованих математичних моделей потенційно небезпечних ядерних об'єктів із зсувними аргументами — запізнюваннями і випередженнями в часі. Проаналізовано вплив запізнювань і випереджень, розглянуто особливості системи нелінійних диференціальних рівнянь, що спричиняються наявністю зсувних аргументів. За результатами обчислювального експерименту встановлено закономірності досліджуваних потенційно небезпечних ядерних об'єктів.

Ключові слова: потенційно небезпечний об'єкт, модель, запізнювання, випередження, обчислювальний експеримент.

© Джамшид Гараханлу, И. В. Казачков, 2012

Математическое моделирование и вычислительные эксперименты имеют большое значение для потенциально опасных объектов (ПОО) любой природы, в том числе ядерных, так как позволяют установить общие закономерности их функционирования, на основе которых можно осуществлять анализ критических и катастрофических ситуаций и параметров, которые могут их вызвать. Разработка агрегированных динамических моделей и исследование режимов работы объектов на основе таких моделей могут быть эффективным инструментом выявления различных особых и критических режимов и поиска возможностей оптимального управления такими системами. Этим объясняется актуальность данной темы исследований, начатой в [1], которая имеет также и некоторое чисто теоретическое значение, поскольку динамические системы с отклоняющимися аргументами — интересный новый раздел современной науки.

Обоснование и детальное исследование построенных агрегированных динамических моделей ПОО не только позволяет понять основные особенности функционирования таких систем, но и помогает осуществлять стратегическое и тактическое планирования развития объекта любого уровня (АЭС, отрасль и т. д.) на основе результатов моделирования на ЭВМ в широком диапазоне варьируемых параметров для всевозможных сценариев развития. Созданные алгоритмы и программы составляют аппарат для использования другими исследователями при изучении различных ПОО и принятии решений по их разработке и модернизации, а также по разработке алгоритмов оптимального управления. В частности, возможные критические режимы должны быть изучены с целью их недопущения в работе.

Дифференциальные уравнения модели с отклоняющимися аргументами. Во многих случаях можно в качестве первого приближения для простоты рассмотреть постоянные временные задержки τ (по крайней мере, на коротких временных интервалах это будет справедливо), тогда агрегированная модель ПОО будет следующей [2, 3]:

$$\frac{dz_1}{dt} = \left[b_{10} + b_{11}z_1(t-\tau_{11}) + b_{12}z_2(t-\tau_{12}) + b_{13}z_3(t-\tau_{13})\right]z_1(t-\tau_{10}),$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \left[b_{20} + b_{21}z_1(t-\tau_{21}) + b_{22}z_2(t-\tau_{22}) + b_{23}z_3(t-\tau_{23})\right]z_2(t-\tau_{20}),$$

$$\frac{dz_3}{dt} = \left[b_{30} + b_{31}z_1(t-\tau_{31}) + b_{32}z_2(t-\tau_{32}) + b_{33}z_3(t-\tau_{33}) + b_{34}z_4(t-\tau_{34}) + b_{35}z_5(t-\tau_{35}) + b_{36}z_6(t-\tau_{36})\right]z_3(t-\tau_{30}), \quad (1)$$

$$\frac{dz_4}{dt} = \left[b_{40} + b_{43}z_3(t-\tau_{43}) + b_{44}z_4(t-\tau_{44}) + b_{45}z_5(t-\tau_{45}) + b_{46}z_6(t-\tau_{46})\right]z_4(t-\tau_{40}),$$

$$\frac{dz_5}{dt} = \left[b_{50} + b_{53}z_3(t-\tau_{53}) + b_{54}z_4(t-\tau_{54}) + b_{55}z_5(t-\tau_{55}) + b_{56}z_6(t-\tau_{56})\right]z_5(t-\tau_{50}),$$

$$\frac{dz_6}{dt} = \left[b_{60} + b_{61}z_1\left(t-\tau_{61}\right)+ \right.$$
$$\left. +b_{62}z_2\left(t-\tau_{62}\right)+b_{63}z_3\left(t-\tau_{63}\right)\right]z_6\left(t-\tau_{60}\right),$$

где τ_{ij} — константы.

Математическая модель (1) описывает эволюцию ПОО во времени с учетом его конкретной предыстории. Положительные временные сдвиги в системе (1) могут быть введены относительно планируемых уровней параметров, которые должны быть достигнуты. Запаздывания имеют смысл конечного времени распространения управляющих воздействий в системе управления.

Система (1) нелинейных дифуравнений с запаздываниями в представленном виде является сложной для компьютерного моделирования из-за множества различных запаздываний (опережений). Однако она может быть преобразована в более простую и удобную для вычислительных экспериментов в малой окрестности значения текущего времени t с использованием разложений в ряды Тейлора для функций $z_i(t-\tau_{ij})$ на основе теоремы Эльсгольца [4], согласно которой можно ограничиться линейными членами

$$z_i(t-\tau_{ij}) \approx z_i(t) - \tau_{ij}\dot{z}_i\,, \qquad (2)$$

поскольку отбрасываемые нелинейные члены более высоких порядков ухудшают точность (здесь $\dot{z} \equiv dz/dt$). Тогда с учетом (2) все переменные в системе (1) будут аппроксимированы функциями только одной временной переменной t, а временные сдвиги войдут в виде параметров. Анализ данной модели и ее развитие для использования в вычислительных экспериментах на ЭВМ — тема данной статьи.

Применяя теорему Эльсгольца к системе дифференциальных уравнений (1), получим

$$\dot{z}_1 = \left[b_{10} + b_{11}\left(z_1(t)-\tau_{11}\dot{z}_1\right)+b_{12}\left(z_2(t)-\tau_{12}\dot{z}_2\right)+ \right.$$
$$\left. +b_{13}\left(z_3(t)-\tau_{13}\dot{z}_3\right)\right]\left(z_1(t)-\tau_{10}\dot{z}_1\right),$$

$$\dot{z}_2 = \left[b_{20} + b_{21}\left(z_1(t)-\tau_{21}\dot{z}_1\right)+b_{22}\left(z_2(t)-\tau_{22}\dot{z}_2\right)+ \right.$$
$$\left. +b_{23}\left(z_3(t)-\tau_{23}\dot{z}_3\right)\right]\left(z_2(t)-\tau_{20}\dot{z}_2\right),$$

$$\dot{z}_3 = \left[b_{30} + b_{31}\left(z_1(t)-\tau_{31}\dot{z}_1\right)+b_{32}\left(z_2(t)-\tau_{32}\dot{z}_2\right)+ \right.$$
$$+b_{33}\left(z_3(t)-\tau_{33}\dot{z}_3\right)+b_{34}\left(z_4(t)-\tau_{34}\dot{z}_4\right)+b_{35}\left(z_5(t)-\tau_{35}\dot{z}_5\right)+$$
$$\left. +b_{36}\left(z_6(t)-\tau_{36}\dot{z}_6\right)\right]\left(z_3(t)-\tau_{30}\dot{z}_3\right), \qquad (3)$$

$$\dot{z}_4 = \left[b_{40} + b_{43}\left(z_3(t)-\tau_{43}\dot{z}_3\right)+b_{44}\left(z_4(t)-\tau_{44}\dot{z}_4\right)+ \right.$$
$$\left. +b_{45}\left(z_5(t)-\tau_{45}\dot{z}_5\right)+b_{46}\left(z_6(t)-\tau_{46}\dot{z}_6\right)\right]\left(z_4(t)-\tau_{40}\dot{z}_4\right),$$

$$\dot{z}_5 = \left[b_{50} + b_{53}\left(z_3(t)-\tau_{53}\dot{z}_3\right)+b_{54}\left(z_4(t)-\tau_{54}\dot{z}_4\right)+ \right.$$
$$\left. +b_{55}\left(z_5(t)-\tau_{55}\dot{z}_5\right)+b_{56}\left(z_6(t)-\tau_{56}\dot{z}_6\right)\right]\left(z_5(t)-\tau_{50}\dot{z}_5\right),$$

$$\dot{z}_6 = \left[b_{60} + b_{61}\left(z_1(t)-\tau_{61}\dot{z}_1\right)+b_{62}\left(z_2(t)-\tau_{62}\dot{z}_2\right)+ \right.$$
$$\left. +b_{63}\left(z_3(t)-\tau_{63}\dot{z}_3\right)\right]\left(z_6(t)-\tau_{60}\dot{z}_6\right).$$

Система (3) показывает, что в общем случае временные сдвиги значительно усложняют дифференциальные уравнения, внося дополнительную, более сильную нелинейность. Если до того система (1) была разрешенной относительно производных и содержала только произведения функций в правых частях уравнений, то теперь система (3) уже не является разрешенной относительно производных и содержит нелинейные члены с произведениями производных функций. Это свидетельствует о том, что решение кардинально изменяется и поведение ПОО может также драматически измениться.

Таким образом, наличие временных сдвигов может вызвать кардинальные изменения в системе, приводящие к критическим режимам, которые ведут к потере устойчивости или другим особым состояниям системы. Можно сказать, что это — источник наиболее сильных изменений типа решений, т. е. поведения системы, который вызывает рассогласование параметров, ведущее к катастрофам.

Решение систем (1) или (3) численными методами затруднено. Для системы (1) необходимо так выбирать численную схему и сетку по времени, чтобы все моменты времени τ_{ij} попадали в точки сетки, а сетка по требованию достижимости заданной точности в большинстве алгоритмов решения дифференциальных уравнений с автоматическим выбором шага изменяется по требованию достижения заданной точности интегрирования уравнений. Разрешить эту трудность можно, применив аппроксимации или какими-то иные методы. Для системы (3) это затруднение снимается, но уравнения становятся значительно сложнее. Поэтому численные методы решения систем уравнений (1) и (3) принципиально различны. Далее методы решения и алгоритмы для различных случаев систем (1), (3) рассматриваются на частных, более простых примерах.

В общем случае один из алгоритмов решения системы (3) может быть следующим. Вначале сдвиги по времени учитываются только для основной переменной в каждом уравнении, т. е. той, относительно которой уравнение в (1) разрешено относительно производной. Затем, считая известными найденные функции, решается задача относительно следующего сдвига с получением уравнения, разрешенного относительно другой переменной. Тогда (3) на первом шаге итерационного процесса приближенного решения принимает вид

$$\left[1+\tau_{10}\left(b_{10}+b_{11}z_1(t)+b_{12}z_2(t)+b_{13}z_3(t)\right)\right]\dot{z}_1 =$$
$$= \left[b_{10}+b_{11}z_1(t)+b_{12}z_2(t)+b_{13}z_3(t)\right]z_1(t),$$

$$\left[1+\tau_{20}\left(b_{20}+b_{21}z_1(t)+b_{22}z_2(t)+b_{23}z_3(t)\right)\right]\dot{z}_2 =$$
$$= \left[b_{20}+b_{21}z_1(t)+b_{22}z_2(t)+b_{23}z_3(t)\right]z_2(t),$$

$$\left[1+\tau_{30}\left(b_{30}+b_{31}z_1(t)+b_{32}z_2(t)+b_{33}z_3(t)+b_{34}z_4(t)+ \right.\right.$$
$$\left.\left. +b_{35}z_5(t)+b_{36}z_6(t)\right)\right]\dot{z}_3 = \left[b_{30}+b_{31}z_1(t)+b_{32}z_2(t)+ \right.$$
$$\left. +b_{33}z_3(t)+b_{34}z_4(t)+b_{35}z_5(t)+b_{36}z_6(t)\right]z_3(t),$$

$$\left[1+\tau_{40}\left(b_{40}+b_{43}z_3(t)+b_{44}z_4(t)+b_{45}z_5(t)+b_{46}z_6(t)\right)\right]\dot{z}_4 =$$
$$= \left[b_{40}+b_{43}z_3(t)+b_{44}z_4(t)+b_{45}z_5(t)+b_{46}z_6(t)\right]z_4(t),$$

$$\left[1+\tau_{50}\left(b_{50}+b_{53}z_3(t)+b_{54}z_4(t)+b_{55}z_5(t)+b_{56}z_6(t)\right)\right]\dot{z}_5 = \\ = \left[b_{50}+b_{53}z_3(t)+b_{54}z_4(t)+b_{55}z_5(t)+b_{56}z_6(t)\right]z_5(t),$$

$$\left[1+\tau_{60}\left(b_{60}+b_{61}z_1(t)+b_{62}z_2(t)+b_{63}z_3(t)\right)\right]\dot{z}_6 = \\ = \left[b_{60}+b_{61}z_1(t)+b_{62}z_2(t)+b_{63}z_3(t)\right]z_6(t). \qquad (4)$$

После нахождения решения системы (4), считая вычисленные функции известными в уже рассмотренных членах уравнений (3) с запаздываниями, аналогично уточняются решения по другим отклоняющимся аргументам.

Анализ стационарного состояния агрегированной модели ПОО. Согласно уравнению ПОО без отклоняющихся аргументов стационарное состояние определяется системой линейных алгебраических уравнений вида [2]

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}N_j . \qquad (5)$$

Решение системы (5) записывается в виде $x_j = \det\left\{a_{ij}^*\right\}/\det\left\{a_{ij}\right\}$, где $\det\left\{a_{ij}\right\}$, $\det\left\{a_{ij}^*\right\}$ — основной и вспомогательный детерминанты, соответственно. Вспомогательная матрица получается заменой j-го столбца основной матрицы столбцом свободных членов $a_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}N_j$. Система уравнений (5) линейная, а стационарное решение — нелинейная функция параметров системы (определители содержат произведения всех параметров a_{ij} и a_{ij}^*). Основная матрица a_{ij} имеет вид

$$\left\{a_{ij}\right\} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Для дальнейшего решения системы (5) удобнее переставить третью и шестую строки матрицы, получив следующий блочный вид:

$$\left\{a_{ij}\right\} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

после чего главный определитель системы (5) вычисляется как произведение двух определителей третьего порядка:

$$\det\left\{a_{ij}\right\} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{vmatrix} = A_{126} \cdot A_{453}. \qquad (8)$$

Здесь и далее для удобства записи определители третьего порядка обозначают по строкам матрицы (7).

Для дополнительных же определителей формулы разные для первых трех переменных (x_1, x_2, x_6) и вторых трех переменных (x_4, x_5, x_3), соответственно:

$$\det\left\{a_{ij}^*\right\} = A_j^* \cdot A_{453}, \; j = 1,\ 2,\ 6;$$

$$\det\left\{a_{i4}^*\right\} = A_{126}\left[a_{36}\left(a_{55}a_4^* - a_{45}a_5^*\right) + a_{35}\left(a_{46}a_5^* - a_{56}a_4^*\right)\right] + \\ + A_4^*\left(a_{45}a_{56} - a_{55}a_{46}\right) + A_3^*\left[a_{36}\left(a_{45}a_{53} - a_{55}a_{43}\right) + \\ + a_{35}\left(a_{56}a_{43} - a_{53}a_{46}\right)\right],$$

$$\det\left\{a_{i5}^*\right\} = A_{126}\left[a_{35}\left(a_{44}a_5^* - a_{54}a_4^*\right) + a_{34}\left(a_{56}a_4^* - a_{46}a_5^*\right)\right] + \\ + A_4^*\left(a_{46}a_{54} - a_{56}a_{44}\right) + A_3^*\left[a_{36}\left(a_{54}a_{43} - a_{53}a_{44}\right) + \\ + a_{34}\left(a_{53}a_{46} - a_{56}a_{43}\right)\right],$$

$$\det\left\{a_{i6}^*\right\} = A_{126}\left[a_{34}\left(a_{45}a_5^* - a_{55}a_4^*\right) + a_{35}\left(a_{54}a_4^* - a_{44}a_5^*\right)\right] + \\ + A_4^*\left(a_{44}a_{55} - a_{54}a_{45}\right) + A_3^*\left[a_{34}\left(a_{55}a_{43} - a_{53}a_{45}\right) + \\ + a_{35}\left(a_{53}a_{44} - a_{54}a_{43}\right)\right], \qquad (9)$$

где $A_1^* = \begin{vmatrix} a_1^* & a_{12} & a_{13} \\ a_2^* & a_{22} & a_{23} \\ a_6^* & a_{62} & a_{63} \end{vmatrix}$, $A_2^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1^* & a_{13} \\ a_{21} & a_2^* & a_{23} \\ a_{61} & a_6^* & a_{63} \end{vmatrix}$,

$A_3^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1^* \\ a_{21} & a_{22} & a_2^* \\ a_{61} & a_{62} & a_6^* \end{vmatrix}$, $A_4^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1^* \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2^* \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_6^* \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3^* \end{vmatrix}$.

Таким образом, решение (5) принимает вид

$$x_j = A_j^* / A_{126}, \; j = 1,\ 2,\ 6;$$

$$x_4 = \Big\{\left[a_{36}\left(a_{55}a_4^* - a_{45}a_5^*\right) + a_{35}\left(a_{46}a_5^* - a_{56}a_4^*\right)\right] + \\ + A_4^*\left(a_{45}a_{56} - a_{55}a_{46}\right)/A_{126} + \\ + A_3^*\left[a_{36}\left(a_{45}a_{53} - a_{55}a_{43}\right) + \\ + a_{35}\left(a_{56}a_{43} - a_{53}a_{46}\right)\right]/A_{126}\Big\}/A_{453},$$

$$x_5 = \Big\{\left[a_{35}\left(a_{44}a_5^* - a_{54}a_4^*\right) + a_{34}\left(a_{56}a_4^* - a_{46}a_5^*\right)\right] + \\ + A_4^*\left(a_{46}a_{54} - a_{56}a_{44}\right)/A_{126} + \\ + A_3^*\left[a_{36}\left(a_{54}a_{43} - a_{53}a_{44}\right) + \\ + a_{34}\left(a_{53}a_{46} - a_{56}a_{43}\right)\right]/A_{126}\Big\}/A_{453}, \qquad (10)$$

$$x_3 = \Big\{\Big[a_{34}\left(a_{45}a_5^* - a_{55}a_4^*\right) + a_{35}\left(a_{54}a_4^* - a_{44}a_5^*\right)\Big] + A_4^*\left(a_{44}a_{55} - a_{54}a_{45}\right)/A_{126} + A_3^*\Big[a_{34}\left(a_{55}a_{43} - a_{53}a_{45}\right) + a_{35}\left(a_{53}a_{44} - a_{54}a_{43}\right)\Big]/A_{126}\Big\}/A_{453}.$$

Полученное решение (10) для стационарного состояния нелинейной динамической системы показывает, что x_1, x_2, x_6 (количество работников и управленцев и уровень культуры безопасности) не зависят от параметров x_4, x_5, x_3 (отчисления на экологию, ремонт и восстановление, а также количество производимой продукции, соответственно), что соответствует (6), тогда как x_4, x_5, x_3 зависят от всех переменных, хотя согласно (6) x_4, x_5 от x_1, x_2 не зависят. Следовательно, зависимость x_4, x_5 от x_1, x_2 появляется опосредованно, через другие переменные, которые зависят от x_1, x_2. Используя (10), можно выявить нежелательные стационарные состояния системы, например такие, при которых имеет место низкий выход производимого продукта, высокие затраты на ремонт и восстановление, на ликвидацию загрязнений экологии, низкий уровень культуры безопасности и т. д. Для лица, принимающего решение (ЛПР), важны также различные комбинации этих критических параметров.

Задача Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений ПОО. Для системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику ПОО без отклоняющихся аргументов, необходимо задать начальные значения всех функций, в результате чего получается задача Коши вида [1—3]:

$$\frac{dz_1}{dt} = \left(b_{10} + b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + b_{13}z_3\right)z_1,$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \left(b_{20} + b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + b_{23}z_3\right)z_2,$$

$$\frac{dz_3}{dt} = \left(b_{30} + b_{36} + b_{31}z_1 + b_{32}z_2 + b_{33}z_3 + b_{34}z_4 + b_{35}z_5 - b_{36}z_6\right)z_3,$$

$$\frac{dz_4}{dt} = \left(b_{40} + b_{46} + b_{43}z_3 + b_{44}z_4 + b_{45}z_5 - b_{46}z_6\right)z_4,$$

$$\frac{dz_5}{dt} = \left(b_{50} + b_{56} + b_{53}z_3 + b_{54}z_4 + b_{55}z_5 - b_{56}z_6\right)z_5,$$

$$\frac{dz_6}{dt} = \left(b_{60} + b_{61}z_1 + b_{62}z_2 + b_{63}z_3\right)z_6; \qquad (11)$$

$$t = 0,\ z_i = z_{i0}. \qquad (12)$$

Здесь $z_i = z_{i0}$ — заданные начальные значения функций, описывающих систему; $z_i = 1 - y_i$, где все функции y_i изменяются в диапазоне от 0 до 1. Уровень безопасности ПОО определяется на основе решения задачи Коши (11), (12) согласно предложенному критерию [1—3].

Задача Коши (11), (12) решается численно на ЭВМ для определения эволюции ПОО во времени. Заметим, что к системе (11) можно также свести частный случай ПОО с отклоняющимися аргументами вида

$$\frac{dz_1}{dt} = \left(b_{10} + b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + b_{13}z_3\right)z_1\left(t \pm \tau_1\right),$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \left(b_{20} + b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + b_{23}z_3\right)z_2\left(t \pm \tau_2\right),$$

$$\frac{dz_3}{dt} = \left(b_{30} + b_{36} + b_{31}z_1 + b_{32}z_2 + b_{33}z_3 + b_{34}z_4 + b_{35}z_5 - b_{36}z_6\right)z_3\left(t \pm \tau_3\right),$$

$$\frac{dz_4}{dt} = \left(b_{40} + b_{46} + b_{43}z_3 + b_{44}z_4 + b_{45}z_5 - b_{46}z_6\right)z_4\left(t \pm \tau_4\right),$$

$$\frac{dz_5}{dt} = \left(b_{50} + b_{56} + b_{53}z_3 + b_{54}z_4 + b_{55}z_5 - b_{56}z_6\right)z_5\left(t \pm \tau_5\right),$$

$$\frac{dz_6}{dt} = \left(b_{60} + b_{61}z_1 + b_{62}z_2 + b_{63}z_3\right)z_6\left(t \pm \tau_6\right). \qquad (13)$$

В системе (13) зависимость функций от отклоняющихся аргументов учитывается только в главном множителе, который наиболее сильно влияет на соответствующую функцию.

Следуя теореме Эльсгольца (2), можно преобразовать (13) к виду

$$\left(1 \mp \tau_1\right)\frac{dz_1}{dt} = \left(b_{10} + b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + b_{13}z_3\right)z_1(t),$$

$$\left(1 \mp \tau_2\right)\frac{dz_2}{dt} = \left(b_{20} + b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + b_{23}z_3\right)z_2(t),$$

$$\left(1 \mp \tau_3\right)\frac{dz_3}{dt} = \left(b_{30} + b_{36} + b_{31}z_1 + b_{32}z_2 + b_{33}z_3 + b_{34}z_4 + b_{35}z_5 - b_{36}z_6\right)z_3(t),$$

$$\left(1 \mp \tau_4\right)\frac{dz_4}{dt} = \left(b_{40} + b_{46} + b_{43}z_3 + b_{44}z_4 + b_{45}z_5 - b_{46}z_6\right)z_4(t),$$

$$\left(1 \mp \tau_5\right)\frac{dz_5}{dt} = \left(b_{50} + b_{56} + b_{53}z_3 + b_{54}z_4 + b_{55}z_5 - b_{56}z_6\right)z_5(t),$$

$$\left(1 \mp \tau_6\right)\frac{dz_6}{dt} = \left(b_{60} + b_{61}z_1 + b_{62}z_2 + b_{63}z_3\right)z_6(t). \qquad (14)$$

Таким образом, отклоняющиеся аргументы в этом случае влияют только на коэффициенты при производных в левой части системы (14), что равносильно изменению производной соответствующей функции (интенсивности изменения функции) на величину $(1 \mp \tau_i)$.

Наличие в (13) запаздывания во времени по i-й функции на величину τ_i равносильно падению скорости изменения этой функции в $(1 + \tau_i)$ раз, что можно учесть деформацией времени вида $t/(1 + \tau_i)$. Аналогично, наличие опережения во времени по i-й функции на величину τ_i равносильно возрастанию скорости изменения этой функции в $(1 + \tau_i)$ раз, что можно учесть деформацией времени вида $t/(1 - \tau_i)$. Иными словами, в первом случае «время в системе замедляется», а во втором — «время в системе ускоряется».

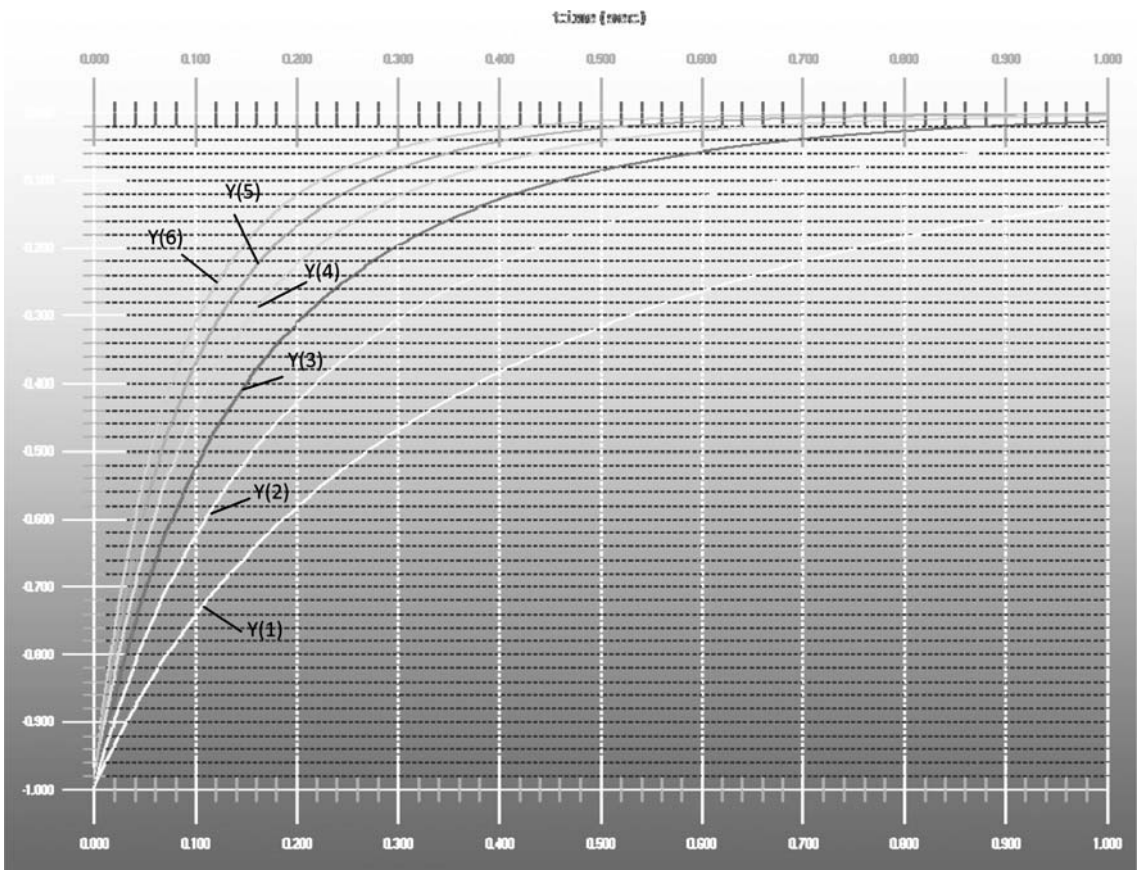

Рис. 1. Изменение параметров потенциально опасного объекта во времени для случая без запаздываний

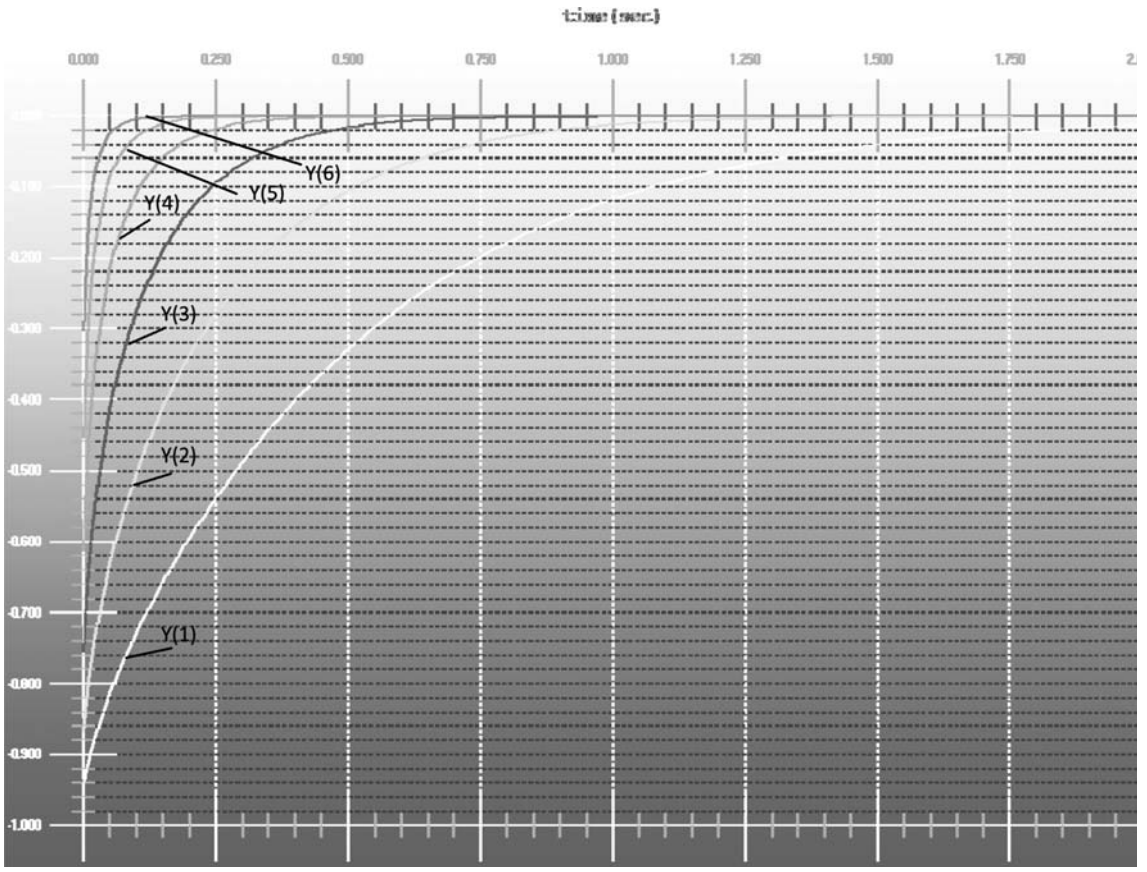

Рис. 2. Изменение параметров потенциально опасного объекта во времени с учетом запаздываний

Решение задачи (11), (12) или (13), (14) позволяет находить режимы выхода ПОО на стационар, появление при определенном сочетании параметров критических и катастрофических режимов, оптимальные в заданном смысле режимы и т. п. [5—9]. Поэтому математическое моделирование ПОО на основе данной агрегированной модели может быть полезным для системного анализа закономерностей поведения ПОО.

Вычислительный эксперимент на ЭВМ с использованием агрегированной модели. Вычислительные эксперименты на ЭВМ проводились по разработанной методике для заданного диапазона варьируемых параметров. В частности, количество расчётных точек было выбрано равным 999, диапазон времени — от 0 до 9,399. Для случая без запаздываний по времени решение системы (11), (12) представлено на рис. 1 при следующих параметрах:

Коэффициенты матрицы	Значения правых частей уравнений (11)
1.01, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6	-1.7
2.1, 2.02, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6	-2.7
3.1, 3.2, 3.03, 3.4, 3.5, 3.6	-3.7
4.1, 4.2, 4.3, 4.04, 4.5, 4.6	-4.7
5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.05, 5.6	-5.7
6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.06	-6.7

В качестве начального значения здесь берётся стационарная точка системы уравнений (5) и умножается на −1.

Решение выводится относительно рассчитанного модельного стационарного состояния. Функции z_i (для значений i от 1 до 6) на графике идут слева направо.

Аналогично, для случая с запаздываниями по времени решение системы (3) представлено на рис. 2 при тех же начальных данных со следующей матрицей запаздываний:

0.11, 0.12, 0.13, 0.14, 0.15, 0.16, 0.17
0.21, 0.22, 0.23, 0.24, 0.25, 0.26, 0.27
0.31, 0.32, 0.33, 0.34, 0.35, 0.36, 0.37
0.41, 0.42, 0.43, 0.44, 0.45, 0.46, 0.47
0.51, 0.52, 0.53, 0.54, 0.55, 0.56, 0.57
0.61, 0.62, 0.63, 0.64, 0.65, 0.66, 0.67

Решение выводится относительно рассчитанного модельного стационарного состояния. Функции z_i (для значений i от 1 до 6) на графике идут слева направо.

Выводы

В разработанной агрегированной математической модели потенциально опасного ядерного объекта учтены возможные негативные воздействия объекта на окружающую среду, их ослабление и ликвидация за счет принимаемых мер. Динамика развития объекта, изменение культуры безопасности на нем и ее влияние на показатели, включая уровень безопасности ПОО [5], моделируются на ЭВМ в желаемом диапазоне изменения параметров, что позволяет понять особенности системы и взаимного влияния разных параметров. Построенная динамическая модель, созданные алгоритмы и программное обеспечение для ЭВМ могут быть полезными для тактического и стратегического планирования развития объекта любого уровня (АЭС, отрасль и т. д.) на основе ситуационного моделирования в широком диапазоне варьируемых параметров для всевозможных сценариев.

Список использованной литературы

1. *Гараханлу Джамшид.* Разработка и исследование агрегированных математических моделей ядерных объектов со сдвиговыми аргументами / Джамшид Гараханлу, И. В. Казачков // Ядерная физика и энергетика. — 2012. — Т. 13. — № 1. — С. 37—42.
2. *Kazachkov I. V.* Modelling of Potentially Hazardous Objects with Time Shifts / Kazachkov I. V., Chesnokov Ye. V. and Kazachkova O. M. // WSEAS Trans. on Business & Economics. — 2004. — Issue 3, № 1. — P. 37—43.
3. *Kazachkov I. V.* Modelling of Potentially Hazardous Objects with Time Shifts / Kazachkov I. V., Chesnokov Ye. V. and Kazachkova O. M. // Abstr. Of WSEAS Conf. on Business & Economics. — 2004. — Venice, Nov. 18—20, Italy.
4. *Эльсгольц Л. Э.* Введение в теорию уравнений с отклоняющимися аргументами / Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. — М.: Наука, 1971. — 296 с.
5. Культура безопасности на ядерных объектах Украины: Навч. посібник / Бегун В. В., Бегун С. В., Широков С. В., Казачков И. В., Литвинов В. В., Письменный Е. Н. — К.: НТУУ «КПИ», 2009. — 386 с.
6. *Allen P. M.* Evolution, Population Dynamics and Stability / Allen P. M. // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. — 1976, March. — Vol. 73, No. 3. — P. 665—668.
7. Математическая теория оптимальных процессов / Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. — М.: Наука, 1976. — 367 с.
8. *Жирмунский А В.* Критические уровни в развитии природных систем / Жирмунский А. В., Кузьмин В. И. — Л.: Наука, 1990. — 224 с.
9. *Lee S. M.* Delay-dependent criteria for absolute stability of uncertain time-delayed Lur'e dynamical systems / S. M. Lee, Ju H. Park // Journal of the Franklin Institute. — 2010. — N 347. — P. 146—153.

Получено 05.03.2012.