УДК 624.014.072

ПОЛНОМАСШТАБНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СОСТОЯНИЯ МЕТАЛЛОКОНСТРУКЦИЙ В УСЛОВИЯХ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Ю. В. РАДЫШ, А. С. КИРЕЕВ

Проанализированы недостатки существующих версий разрушения материалов - теории предельного состояния и кинетической теории разрушения. Предложена математическая модель поведения конструкционного материала с расширенным пространством термодинамических состояний, которая нашла практическое применение при создании аппаратно-программного комплекса диагностики состояния и прогнозирования надежности конструкций, а также анализа поведения конструкций при длительной эксплуатации.

The disadvantages of the existing versions of material destruction have been analyzed, namely of the theory of the limit state and kinetic theory of fracture. A mathematical model of the structural material behaviour with an expanded space of thermodynamic states has been proposed that has found practical application in development of a hardware-software complex for diagnostics of the condition and forecasting the reliability of structures, as well as analysis of structure behaviour at long-term load.

Новая методология диагностики состояния и прогнозирования надежности конструкций, изложенная в [1], содержит три базовых элемента:

полномасштабную эволюционную модель, наиболее полно описывающую поведение конструкции в условиях эксплуатации;

результаты инструментального (непрерывного, периодического или эпизодического) контроля состояния конструкции, используемые для идентификации ее математической модели;

процедуру диагностики и прогнозирования поведения конструкции, основанную на анализе ее математической модели (математическом моделировании) с использованием фундаментальных критериев качества; к последним относятся критерии прочности, устойчивости, поврежденности, осадки и подвижки основания конструкции.

В контексте решаемых при этом задач важнейшей является построение полномасштабной эволюционной модели состояния конструкционного материала и конструкции в целом в условиях эксплуатации. Как уже отмечалось [1], состояние конструкции описывается полной совокупностью (тензорных) полей различной физической природы, определенных на конструкции во время эксплуатации. К последним относятся поля термодинамических и механических переменных состояния (температура, напряжение, деформация, перемещение и скорость его изменения), которые при необходимости дополняются поврежденностью материала. Такая модель должна описывать как обратимые, так и необратимые процессы, протекающие в различных масштабах времени и приводящие в конечном счете к разрушению конструкции. Основанием для построения модели должны служить фундаментальные законы сохранения вещества, количества движения и энергии (1-й закон термодинамики) вместе с законом возрастания энтропии (2-й закон термодинамики) и термодинамически непротиворечивыми определяющими соотношениями для конструкционного материала.

Условные обозначения используемых физических величин. В работе используются следующие условные обозначения:

t — текущее время;

y^i — эйлеровы координаты (декартовы прямоугольные координаты наблюдателя);

x^i — лагранжевы координаты (материальные);

g_{ij} — метрический тензор материала;

δ_{ij} — начальный (или остаточный) метрический тензор материала канонического вида;

$g^{0,5}$ — мера объема материала, $g \equiv + \det[g_{ij}]$;

ρ — плотность материала;

ε_{1ij}, ε_{2ij} — соответственно упругая и пластическая (остаточная) деформация материала;

σ^{ij} — полные напряжения материала;

σ^{*ij} — девиатор напряжений, обладающий свойством $\sigma^{*ij} g_{ij} = 0$;

$\sigma^{ij}_{\text{н}}$ — начальные (или остаточные) напряжения материала;

f^i — массовые силы;

ω — поврежденность материала;

E^{ijkl} — модуль упругости материала;

L_{ijkl} — модуль податливости материала, обратный по отношению к модулю упругости: $E^{klij} L_{pqkl} = E^{ijkl} L_{klpq} = \delta^i_p \delta^j_q$;

k — коэффициент линейной связи вида $\|\dot{\varepsilon}_{2ij}\| = k\dot{\omega}$;

ν — коэффициент положительно определенной диссипативной функции пластического деформирования $(n+1)/n$-го порядка, вида $\nu \|\dot{\varepsilon}_{2ij}\|^{(n+1)/n}$;

μ^{ijkl} — коэффициент положительно определенной диссипативной функции упругого деформирования 1-го порядка, вида $(\mu^{ijkl}\, \dot{\varepsilon}_{1ij}\, \dot{\varepsilon}_{1kl})^{0,5}$;

σ_0 — пороговая величина напряжений материала;

$\xi \equiv k^{-1}$.

Все физические величины в работе рассматриваются как тензоры относительно непрерывной группы преобразований пространственной области материала, которые сохраняют ее ориентацию (движение и деформация). Тензоры определяются своими компонентами в лагранжевой (материальной) системе отсчета как функции лагранжевых пространственных координат и времени. Поскольку в лагранжевой системе отсчета векторный и ковекторный базисы не совпадают, в работе используются как нижние (ковекторные), так и верхние (векторные) индексы компонент тензора, пробегающие значения $i, j, k, l = 1, 2, 3$. Принимается соглашение о суммировании по одинаковым верхним и нижним индексам, при этом символ суммирования не указывается. Подъем и опускание индексов осуществляется с помощью метрического тензора соответственно в векторном g^{ij} и ковекторном g_{ij} представлениях, которые связаны условием

$$g^{kj}g_{ji} = g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k.$$

Все экстенсивные физические величины отнесены к единице массы материала. Поэтому соответствующие тензоры приобретают свойства тензорной плотности веса +1 только после умножения на меру массы $\rho g^{0,5}$.

Индекс после запятой у компоненты тензора обозначает операцию частного дифференцирования этой компоненты по лагранжевой координате, соответствующей индексу. Точкой сверху над компонентом тензора обозначается операция дифференцирования этой компоненты по явно содержащемуся времени при постоянных лагранжевых координатах. Символом $\| \ \|$ обозначается эвклидова норма, которая для тензора σ^{ij} определяется в виде $\|\sigma^{ij}\| \equiv + (\sigma^{ij}\sigma_{ij})^{0,5}$.

Принятые условные обозначения и сокращения обеспечивают возможность записи символьных выражений в наиболее простой форме, сохраняющей необходимые пояснения процедуры используемых операций и преобразований.

Введение в проблему. В настоящее время сформировались две точки зрения (версии) на разрушение конструкционных материалов. По одной версии, более ранней, существует ограниченная область термодинамических состояний материала, при которых сохраняется его прочность. Разрушение происходит при достижении материалом предельных состояний на границе этой области в результате воздействия окружающей среды. Эта точка зрения получила отражение в различных теориях предельного состояния (теориях прочности). В них в качестве переменных состояния обычно рассматриваются компоненты тензора напряжений и температура материала. Существенным недостатком этой версии является невозможность объяснения факта необратимости разрушения конструкционных материалов, состояние которых не достигает предельных значений при длительной эксплуатации в составе конструкций.

По другой, более поздней кинетической версии разрушения, существование границы предельных состояний материала вообще исключается. При этом предполагается, что разрушение происходит вследствие критического накопления в конструкционном материале необратимых структурных изменений, при которых изменяются его физические свойства, приводящие к потере прочности. Кинетика накопления изменений в структуре материала зависит от интенсивности воздействия на материал окружающей среды и достигнутого уровня структурных изменений. Эта точка зрения нашла отражение в различных теориях накопления как рассеянных, так и сосредоточенных (теория трещин) повреждений материала. Существенным недостатком этой версии является неспособность обнаружить фундаментальные связи между различными физическими явлениями, которые сопровождают разрушение материала вследствие ограниченого опытом восприятия факта накопления в материале необратимых структурных изменений. Обзор различных представлений и теорий разрушений конструкционных материалов в рамках обеих версий представлен в [2].

При внешнем различии эти точки зрения (версии) не являются альтернативными. В работе [3] они объединяются наиболее естественным образом посредством расширения пространства состояний материала. При этом в рассмотрение вводится дополнительная термодинамическая переменная, характеризующая изменение состояния материала при разрушении. Эта гипотетическая переменная состояния сохраняет заимствованное название поврежденности материала.

Необратимость разрушения материала накладывает на возможные изменения поврежденности односторонние ограничения, выраженные в постулате необратимости. В работе [3] показано, что из постулата необратимости накопления повреждений следует существование поверхности нагружения материала в пространстве его состояний. При этом отвергается необходимость существования нормального диссипативного механизма 1-го порядка (типа сухого трения) при пластическом деформировании материала, который по установившимся воззрениям [4] связывается с существованием поверхности нагружения материала. В пределах этой поверхности материал может находиться неограниченно долго в неразрушенном состоянии, а за ее пределами разрушается. При этом скорость повреждения материала зависит только от достигнутого им состояния. Последнее обстоятельство определяет поврежденность как скрытую переменную состояния, в отличие от напряжений и температуры материала, которые изменяются непосредственно под воздействием окружающей среды.

Отличительная особенность поврежденности (как скрытой переменной термодинамического состояния материала) позволяет построить эволюционную полномасштабную модель поведения материала в составе эксплуатируемых конструкций, как это выполнено в [3]. Такая феноменологическая модель поведения материала описывает термоупругое и пластическое деформирование вместе с разрушением материала под действием силовых и термических нагрузок с общих аксиоматических позиций термодинамики. Условия термодинамической непротиворечивости определяющих соотношений приводят к необходимости существования механизма гистерезисного трения при упругом деформировании материала и различному характеру накопления повреждений при наличии и отсутствии его циклирования. В рассмотренных ниже частных случаях эта модель сводится к описанию явлений деформационной ползучести и релаксации внутренних напряжений в материале. Параметры этой модели достаточно просто устанавливаются по результатам типовых испытаний образцов материалов.

Изотермическая модель. Наиболее просто модель представляется в изотермическом случае, когда температура материала является параметром, в отличие от напряжений и поврежденности материала, которые остаются термодинамическими переменными состояния. При этом разрушение материала рассматривается как термодинамический процесс перехода от состояния устойчивого равновесия цельного материала к состоянию устойчивого равновесия разрушеного материала, каждое из которых принадлежит границе области равновесных состояний. На пути этого перехода поврежденность материала возрастает от начального до конечного значения, которые устанавливают границы шкалы значений поврежденности.

Удовлетворяющая законам сохранения количества движения и энергии (первый закон термодинамики) вместе с законом возрастания энтропии (второй закон термодинамики) полная (замкнутая) система эволюционных уравнений механического и термодинамического движения материала в составе конструкции имеет вид:

$$g_{ij} = (dy^k/dx^i)\,(dy^l/dx^j)\delta_{kl}; \tag{1}$$

$$\sigma^{ij} = \sigma_{\text{н}}^{ij} + E^{ijkl}\,\varepsilon_{1kl} + \mu^{ijkl}\dot{\varepsilon}_{1kl}/(\mu^{ijkl}\dot{\varepsilon}_{1ij}\,\dot{\varepsilon}_{1kl})^{0,5}; \tag{2}$$

$$0{,}5(g_{ij} - \delta_{ij}) = \varepsilon_{1ij} + \varepsilon_{2ij}; \tag{3}$$

$$\dot{\varepsilon}_{2ij} = \dot{\omega}\, k\sigma^{*}_{ij}/\|\sigma^{*ij}\|; \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \xi((\|\sigma^{*ij}\| - \sigma_0)/\nu)^n \quad \text{при } \|\sigma^{*ij}\| \ge \sigma_0; \\ \dot{\omega} &= 0 \quad \text{при } \|\sigma^{*ij}\| < \sigma_0; \end{aligned} \tag{5}$$

$$\rho g^{0,5}\,\ddot{y}^i - (\rho g^{0,5}(dy^i/dx^k)\sigma^{kj})_{,j} = \rho g^{0,5}(dy^i/dx^k)f^{\,k}. \tag{6}$$

Эта система уравнений решается относительно неизвестных искомых функций лагранжевых координат и времени $g_{ij}(x^i,\ t)$, $\sigma^{ij}(x^i,\ t)$, $\varepsilon_{1ij}(x^i,\ t)$, $\varepsilon_{2ij}(x^i,\ t)$, $\omega(x^i,\ t)$, $y^i(x^i,\ \mathrm{t})$ при заданных либо определенных в условиях эксперимента внешних воздействий на материал и характеристик материала $f^{\,i}$, $E^{\,ijkl}$, $\sigma_{\text{н}}^{ij}$, κ, σ_0, μ^{ijkl}, ν, n, а также при соответствующих начальных и краевых (граничных) условиях, зависящих от постановки конкретной задачи.

Единственное решение задачи вполне определяется заданием в начальный момент времени полей положения (конфигурации), скорости изменения положения, напряжений и поврежденности конструкции

$$y^i(x^i),\ \dot{y}^{\,i}(x^i),\ \sigma^{ij}(x^i),\ \omega(x^i). \tag{7}$$

Эти независимые полевые переменные определяют состояние конструкции (механическое и термодинамическое) в изотермических условиях. В неизотермическом случае они при необходимости дополняются полем температуры конструкции. Оценка эксплуатационной надежности конструкции устанавливается по упомянутым выше фундаментальным критериям качества, которые рассчитываются на основании найденого по выражениям (7) состояния конструкции в текущий момент времени и прогноза его изменения в будущем.

Отметим зависимость пороговой величины напряжений от поврежденности $\sigma_0(\omega)$ в уравнении (5). Поскольку ω, согласно соотношению (4), является параметром на пути пластического деформирования, указанная зависимость отождествляется с идеализированной полной диаграммой деформирования материала в координатах $\|\sigma^{*ij}\|$ и ω, полученной в условиях статического приближения. Эти условия требуют принадлежности термодинамического состояния материала в процессе его разрушения к границе области равновесных состояний

$$\|\sigma^{*ij}\| - \sigma_0(\omega) = 0. \tag{8}$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости (в малом) состояния равновесия σ^{ij}, ω на границе области равновесных термостатических состояний материала, согласно уравнению (8), при заданных постоянных напряжениях

$$\sigma^{ij} = C^{ij}. \tag{9}$$

При этом условии устойчивость равновесия по переменной σ^{ij} выполняется очевидно, а по переменной ω исследуется ниже на основе 2-го метода Ляпунова.

Функция от переменной ω в левой части равенства (8) является функцией Ляпунова. Действительно, она положительно определена, поскольку принимает положительные значения при всех ω, которые не принадлежат области равновесных состояний

$$\|\sigma^{*ij}\| - \sigma_0(\omega) > 0,$$

а на границе этой области по уравнению (8) принимает нулевое значение. Вычисляя производную этой функции по времени, в силу дифференциального уравнения (5) получим

$$\xi((\|\sigma^{*ij}\| - \sigma_0)/\nu)^n d\sigma_0/d\omega. \tag{10}$$

Отсюда следует, что на интервалах монотонного возрастания функции $\sigma_0(\omega)$ выполняется условие устойчивости равновесных состояний, поскольку по выражению (10) знак производной функции Ляпунова противоположен знаку самой функции и, наоборот, на интервалах монотонного убывания функции $\sigma_0(\omega)$ выполняется условие неустойчивости. Поэтому у идеализированной полной диаграммы деформирования материала восходящая ветвь устойчива, а нисходящая — неустойчива.

Устойчивость равновесия в точке сопряжения этих двух ветвей указанной диаграммы является неопределенной.

Рассмотрим явление ползучести и релаксации напряжений разрушающегося материала. Ползучесть материала происходит под действием постоянных по значению напряжений согласно равенству (9). В силу дифференциального уравнения (5) скорость пластического деформирования из соотношения (4) при ползучести определяется равенством

$$\dot{\varepsilon}_{2ij} = k\xi((\|\sigma^{*ij}\| - \sigma_0)/\nu)^n \sigma^*_{ij}/\|\sigma^{*ij}\|. \tag{11}$$

Скорость упругого деформирования материала при ползучести, согласно выражению (2), равна 0. Следовательно, полная скорость деформирования при ползучести является функцией поврежденности материала в текущий момент времени, которая выражается правой частью равенства (11). Накопленная при ползучести полная деформация материала, описываемая формулой (3), вполне определяется приращением его поврежденности

$$0{,}5(g_{ij} - \delta_{ij}) = \sigma^*_{ij}/\|\sigma^{*ij}\| \int_{\omega_0}^{\omega_t} d\omega, \tag{12}$$

где $\omega_0 = \omega(0)$, $\omega_t = \omega(t)$ — поврежденность материала в начальный и текущий моменты времени.

Релаксация напряжений материала протекает при постоянных во времени полных деформациях материала:

$$0{,}5(g_{ij} - \delta_{ij}) = C_{ij}. \tag{13}$$

Отсюда, согласно формуле (3), следует выполнение равенства

$$\dot{\varepsilon}_{1ij} + \dot{\varepsilon}_{2ij} = o_{ij}. \tag{14}$$

Пренебрегая значениями ускорений упругого деформирования при релаксации напряжений, из соотношения (2) получим следующие выражения для скорости упругого деформирования:

$$\dot{\varepsilon}_{1ij} = L_{ijkl}\,\dot{\sigma}^{kl}. \tag{15}$$

В силу дифференциального уравнения (5) скорость пластического деформирования, описываемая соотношением (4), при релаксации напряжений определяется выражением (11). С учетом формул (11), (15) равенство (14) принимает вид дифференциального уравнения относительно $\sigma^{ij}(t)$:

$$L_{ijkl}\,\dot{\sigma}^{kl} + k\xi((\|\sigma^{*ij}\| - \sigma_0)/\nu)^n \sigma^*_{ij}/\|\sigma^{*ij}\| = 0_{ij}. \tag{16}$$

Решение системы дифференциальных уравнений (16), (5) относительно $\omega(t)$, $\sigma^{ij}(t)$ при заданных начальных условиях

$$\sigma^{ij}(0) = \sigma^{ij}_{\text{н}} + E^{ijkl}\varepsilon_{1kl}(0),\ \omega(0) = \omega_0 \tag{17}$$

определяет изменения поврежденности и напряжений материала при релаксации последних.

Практические приложения. Математическая модель поведения конструкционных материалов, представленная в форме граничной задачи для системы уравнений (1)–(5) состояния конструкции (при расширении на неизотермический случай), нашла практическое применение при реализации упомянутой методологии диагностики и прогнозирования состояния металлоконструкций. На этой методологической основе:

выполнена разработка аппаратно-программного комплекса диагностики текущего состояния и прогнозирования надежности сложных металлических конструкций различного назначения;

проводится анализ поведения конструкций при длительной эксплуатации с использованием результатов инструментального обследования.

Численное моделирование поведения конструкций при решении задач диагностики и прогнозирования выполняется на основе конечномерной дискретной модели. К последней исходная граничная задача сводится при применении синтеза различных численных методов решения этой задачи: по времени эксплуатации конструкции — методом конечных разностей, по пространственной области конструкции — методом конечных элементов.

1. *Радыш Ю. В., Киреев А. С.* Совершенствование базы диагностики технического состояния и прогнозирования надежности резервуаров для хранения нефти и нефтепродуктов // Технич. диагностика и неразруш. контроль. — 2000. — № 4. — С. 38–47.
2. *Справочное* пособие по расчету машиностроительных конструкций на прочность / А. А. Лебедев, Б. И. Ковальчук, С. Э. Уманский и др. — Киев: Техника, 1990. — 240 с.
3. *Радыш К. В., Радыш Ю. В., Киреев А. С.* Термодинамика разрушения / Технич. комитет «Спецмонтаж». — Киев, 2001. — 31 с. — Машинопись. — Деп. в ГНТБ Украины 16.05.2001, № 71–Ук2001.
4. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1984. — Т. II. — 560 с.

Корпорация «Укрмонтажспецстрой», Технич. комитет «Спецмонтаж», Киев

Поступила в редакцию 18.12.2001