



ДИАГНОСТИКА СИГНАЛОВ: СРАВНЕНИЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОБЕИХ КОМПОНЕНТ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ МОЩНОСТИ

Л. М. ГЕЛЬМАН

Обобщен новый подход к формированию диагностических признаков, который использован для диагностики гауссовских сигналов и заключается в одновременном использовании двух новых диагностических признаков: действительной и мнимой составляющих преобразования Фурье с учетом статистических зависимостей между признаками. Доказано, что спектральная плотность мощности сигналов представляет только частный случай обобщенного подхода. Установлено, что предложенный подход обеспечивает существенный выигрыш в эффективности диагностики по сравнению с подходом, основанным на спектральной плотности мощности.

A new approach has been generalized to form diagnostic parameters that was used for diagnostics of Gaussian signals and consists in a simultaneous use of two new diagnostic parameters, namely actual and imaginary components of Fourier transform, taking into account the statistical dependencies between the parameters. The suggested generalization improves the effectiveness of diagnostics. A fast Fourier transform is considered that represents the frequency-time method. It is shown that the spectral power density of the signals is not a diagnostic parameter and is just a particular case of the generalized approach.

Новый подход к формированию диагностических признаков был предложен для случаев, когда одно- или многомерные преобразования Фурье применяют для технической диагностики и распознавания образов. Он состоит в использовании одновременно двух новых диагностических признаков: действительной и мнимой компонент преобразования Фурье. Показано [1], что такой подход является более общим, чем подходы, основанные на спектральной плотности мощности и фазовом спектре, и обеспечивает более высокую эффективность диагностики, чем подход, основанный на спектральной плотности мощности.

Учет статистических зависимостей между диагностическими признаками может повысить [3–5] эффективность диагностики. Поэтому для реализации предложенного подхода необходим учет статистических зависимостей между действительной и мнимой компонентами преобразования Фурье.

Однако в известной литературе [1] сравнение эффективности новых признаков и спектральной плотности мощности произведено без учета статистических зависимостей между новыми признаками. Цель настоящей статьи — использование указанного подхода [1] для диагностики гауссовских сигналов с учетом статистических зависимостей между предложенными признаками, а также сравнение диагностической эффективности этого подхода и основанного на спектральной плотности мощности.

Теоретический анализ. Рассмотрим двухклассовую диагностику стационарных гауссовских центрированных сигналов $X(t)$ с различными дисперсиями $\sigma_x^2 = \sigma_{x_j}^2$ и идентичными нормированными автокорреляционными функциями $R_{X0} = R_{X1} = R_X$ для гипотез H_j при $j = 0, 1$. Диагностическая информация содержится в коротком преобразовании Фурье на частоте ω . Предлагаемый подход заключается в одновременном использовании действительной X_R и мнимой X_I компонент короткого преобразования Фурье на частоте ω_X как диагностических признаков:

$$X_R = \int_0^T x(t) \cos \omega_x t dt, \quad (1)$$

$$X_I = \int_0^T x(t) \sin \omega_x t dt, \quad (2)$$

где T — длительность сигналов, $T \neq \infty$.

Коэффициент взаимной корреляции между признаками, определяемыми соотношениями (1), (2), учитывая стационарность сигналов, может быть представлен следующим образом:

$$K_{RI} = \int_0^T \int_0^T K_x(t_2 - t_1) \cos \omega t_1 \sin \omega t_2 dt_1 dt_2. \quad (3)$$

Используя новую переменную $\sigma = t_2 - t_1$, после изменения порядка интегрирования между переменными σ и t_1 и интегрирования по t_1 найдем окончательное выражение

$$K_{RI} = \frac{\int_0^T r_x(\tau) [\cos \omega \tau - \cos \omega(2T - \tau)] d\tau}{2\omega}. \quad (4)$$

С учетом этой формулы, а также выражения [6] для среднеквадратичных отклонений σ_R и σ_I соответственно компонент X_R и X_I запишем после преобразования нормированный коэффициент взаимной корреляции между диагностическими признаками X_R и X_I в виде

$$r_{RI} = \frac{\int_0^T r_x(\tau) [\cos \omega \tau - \cos \omega(2T - \tau)] d\tau}{2 \sqrt{\int_0^T r_x(\tau) (A - B) d\tau \int_0^T r_x(\tau) (A + B) d\tau}} \quad (5)$$

где $A = \omega(T - \tau) \cos \omega \tau$, $B = \sin \omega \tau$.



Выражения (4), (5) новые и носят общий характер. Они получены для произвольных стационарных сигналов и учитывают следующие важные параметры сигналов и короткого преобразования Фурье: нормированную автокорреляционную функцию сигналов, дисперсию и длительность сигналов, частоту преобразования Фурье. Из этих выражений следует, что в общем случае для короткого преобразования Фурье коэффициент взаимной корреляции между новыми признаками, описываемыми соотношениями (1), (2), не равен 0. Поэтому следует учитывать корреляцию между указанными диагностическими признаками при принятии решений о состоянии объектов диагностики. Из выражения (5) найдем, что для идентичных нормированных автокорреляционных функций сигналов для гипотез H_j нормированный коэффициент взаимной корреляции между диагностическими признаками, определяемыми соотношениями (1), (2), также идентичен для гипотез H_j , т. е. $r_{R_I} = r_{I_1} = r$. Так как сигналы $X(t)$ гауссовские, то ввиду линейности преобразований по формулам (1), (2) получим, что двумерная условная функция распределения указанных признаков также гауссовская. Воспользовавшись этой функцией распределения, получим после преобразований отношение правдоподобия предложенных признаков в форме

$$S_0 = AX_R^2 + BX_I^2 + CX_RX_I + D, \quad (6)$$

где

$$S_0 = \ln \frac{W(X_R, X_I | H_1)}{W(X_R, X_I | H_0)}, \quad (7)$$

$$A = \frac{\sigma_{R1}^2 - \sigma_{R0}^2}{2(1-r^2)\sigma_{R0}^2\sigma_{R1}^2}, \quad B = \frac{\sigma_{I1}^2 - \sigma_{I0}^2}{2(1-r^2)\sigma_{I0}^2\sigma_{I1}^2}, \quad (8)$$

$$C = \frac{r(\sigma_{R0}\sigma_{I0} - \sigma_{R1}\sigma_{I1})}{(1-r)\sigma_{R0}\sigma_{R1}\sigma_{I0}\sigma_{I1}}, \quad D = \ln \frac{\sigma_{R0}\sigma_{I0}}{\sigma_{R1}\sigma_{I1}}.$$

Воспользовавшись данными [6], получим

$$\sigma_{R1}/\sigma_{R0} = \sigma_{I1}/\sigma_{I0} = \sigma_{x1}/\sigma_{x0}.$$

Из выражения (6) видно, что в общем случае для рассматриваемой диагностики отношение правдоподобия предложенных признаков не является спектральной плотностью мощности, которая может быть представлена [7] (без учета постоянных сомножителей, которые несущественны для диагностики) в виде

$$S_1 = X_R^2 + X_I^2. \quad (9)$$

Из выражений (6), (8), (9) получим, что если одновременно выполняются следующие условия: 1) диагностические признаки, описываемые соотношениями (1), (2), некоррелированы, т. е. $r = 0$; 2) среднеквадратические отклонения действительной и мнимой компонент одинаковы при обеих гипотезах, т. е. $\sigma_{R_j} = \sigma_{I_j} = \sigma_j$, то отношение правдоподобия и спектральная плотность мощности, определяемые соответственно выражениями (6) и (9), отличаются только постоянным сомножителем, который несущественен для диагностики.

Далее оценим и сравним диагностическую эффективность признаков, представленных соотношениями (1), (2), и признака согласно выражению (9), используя при этом критерий Фишера [8]

$$F_0 = \frac{[m(S_0/H_1) - m(S_0/H_0)]^2}{\sigma^2(S_0/H_1) + \sigma^2(S_0/H_0)}, \quad (10)$$

$$F_1 = \frac{[m(S_1/H_1) - m(S_1/H_0)]^2}{\sigma^2(S_1/H_1) + \sigma^2(S_1/H_0)}, \quad (11)$$

где σ^2 , m — операторы соответственно дисперсии и математического ожидания.

Используя выражения (1)–(3), (6), (8)–(11), получаем

$$F_0 = 1 - \frac{2}{b + 1/b}, \quad (12) \quad F_1 = F_0/G, \quad (13)$$

$$G = \frac{2(a^2 + 2r^2a + 1)}{(a + 1)^2}, \quad (14)$$

где $b = \sigma_{x1}^2/\sigma_{x0}^2$ — параметр, характеризующий различие дисперсий сигналов для гипотез H_j ; G — выигрыш в эффективности диагностики; a — параметр, характеризующий различие дисперсий диагностических признаков согласно выражениям (1), (2).

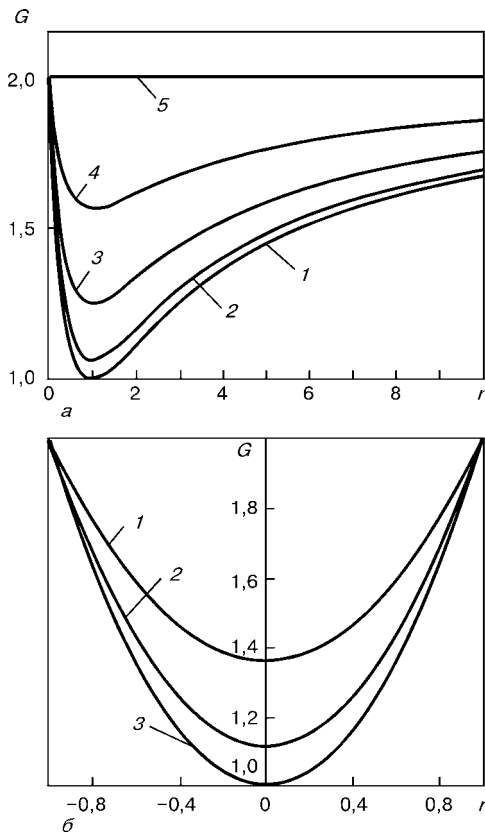
В случае идентичных нормированных автокорреляционных функций сигналов для диагностируемых гипотез H_j , воспользовавшись данными [6], получим $a = \sigma_{R0}/\sigma_{I0} = \sigma_{R1}/\sigma_{I1}$.

Из выражений (12)–(14) находим: 1) диагностическая эффективность новых признаков зависит только от различия дисперсий сигналов для диагностируемых гипотез H_j и не зависит от коэффициента взаимной корреляции между признаками и параметра a , так как предлагаемый подход учитывает взаимную корреляцию между признаками и различие дисперсий признаков; 2) диагностическая эффективность признака, основанного на спектральной плотности мощности, зависит как от различия дисперсий сигналов для диагностируемых гипотез H_j , так и от коэффициента взаимной корреляции между признаками из выражений (1), (2) и параметра a . Диагностическая эффективность этого признака уменьшается при увеличении модуля коэффициента взаимной корреляции между признаками из выражений (1), (2) и увеличении значения параметра a от 1, так как подход, основанный на спектральной плотности мощности, не учитывает взаимную корреляцию между признаками и различие дисперсий признаков.

Согласно формуле (14) выигрыш G в эффективности диагностики возрастает при движении параметра a от 1 (см. рисунок) для любых значений нормированных коэффициентов взаимной корреляции признаков. Оценим, как влияет учет статистических зависимостей между признаками, определяемыми соотношениями (1), (2), на эффективность диагностики, используя следующий критерий:

$$f = F_0/F_2, \quad (15)$$

где F_2 — критерий Фишера для отношения правдоподобия S_2 , полученного без учета статистичес-



Зависимость выигрыша G : a — от параметра a при $r = 0$ (1); 0,25 (2); 0,5 (3); 0,75 (4); b — от параметра r при $a = 0,25$; 4 (1); 0,5; 2 (2); 1 (3)

ких зависимостей между признаками, описываемых выражениями (1), (2):

$$F_2 = \frac{[m(S_2/H_1) - m(S_2/H_0)]^2}{\sigma^2(S_2/H_1) + \sigma^2(S_2/H_0)},$$

$$S_2 = \ln \frac{W(X_R | H_1)W(X_I | H_1)}{W(X_R | H_0)W(X_I | H_0)},$$

$$S_2 = A_1 X_R^2 + B_1 X_I^2 + D,$$

$$A_1 = A(r = 0), B_1 = B(r = 0).$$

Используя соотношения (1), (2), (8), (12), (15), (16), после преобразований получим

$$f = r^2 + 1. \tag{17}$$

Отсюда следует, что учет статистических зависимостей между предложенными диагностическими признаками повышает эффективность диагностики. Критерий (17), характеризующий это повышение, обусловленное учетом статистических зависимостей признаков, возрастает с ростом модуля коэффициента взаимной корреляции между признаками, определяемыми выражениями (1), (2).

ВЫВОДЫ

1. Рассмотрена диагностика стационарных гауссовских сигналов на основе одновременного использования новых обобщенных признаков: действительной и мнимой

составляющих преобразования Фурье; при этом учитывались статистические зависимости между указанными диагностическими признаками.

2. Коэффициент взаимной корреляции и нормированный коэффициент взаимной корреляции между предложенными диагностическими признаками получены впервые для произвольных стационарных сигналов.

3. Показано, что учет статистических зависимостей между предложенными признаками повышает эффективность диагностирования. Критерий, характеризующий повышение эффективности, обусловленное учетом статистических зависимостей признаков, увеличивается с ростом модуля коэффициента взаимной корреляции между признаками.

4. В общем случае для рассматриваемой диагностики спектральная плотность мощности не является оптимальным диагностическим признаком и представляет частный случай отношения правдоподобия предлагаемых новых признаков. Использование спектральной плотности мощности оптимально, если одновременно коэффициент взаимной корреляции между новыми признаками равен 0, а дисперсии этих признаков одинаковы.

5. Применение предлагаемых признаков обеспечивает выигрыш в эффективности диагностики по сравнению с использованием спектральной плотности мощности при произвольных значениях коэффициента взаимной корреляции между предлагаемыми признаками и параметра, характеризующего различие дисперсий признаков (за исключением случая, упомянутого в п. 4). Выигрыш возрастает при увеличении модуля коэффициента взаимной корреляции между признаками, а также при движении значения параметра a , характеризующего различие дисперсий признаков, от 1.

Поэтому мы рекомендуем использовать одновременно действительную и мнимую компоненты преобразования Фурье как наиболее базисные диагностические признаки, особенно если коэффициент взаимной корреляции между признаками не равен 0, а дисперсии компонент преобразования Фурье не равны между собой.

1. *Gelman L. M., Braun S. G.* The optimal usage of the Fourier transform for pattern recognition // *Mech. Syst. and Signal Processing.* — 2001. — **15**, № 3. — P. 641-645.
2. *Gelman, L. M., Braun S. G., Petrunin I. V.* The optimal usage of the Fourier transform for condition monitoring and diagnostics // *Proc. of the Internat. conf. on condition monitoring, Swansea, UK, 2001.* — P. 350-357.
3. *Bilmes J. A.* Maximum mutual information based reduction strategies for cross-correlation based joint distributional modeling // *Proc. of the Internat. conf. on acoustics, speech and signal processing, Seattle, 1998.* — P. 469-472.
4. *Fukunaga K.* Introduction to statistical pattern recognition. — New York: Academic Press, 1990.
5. *Devijver P. A., Kittler J.* Pattern recognition: a statistical approach. — Prentice Hall, 1982.
6. *Gelman L. M., Sadovaya V. G.* Optimization of the resolving power of a spectrum analyzer when detecting narrowband signals // *Telecommunications and Radio Engineering.* — 1980. — **35**, № 11. — P. 94-96.
7. *Kammler D. W.* A first course in Fourier analysis. — New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 2000.
8. *Young T. Y., Fu K.-S.* Handbook of pattern recognition and image processing. — Academic Press, Inc., 1986.