

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ В ПЛАСТИНАХ ОТ ДЕЙСТВИЯ ЛОКАЛЬНОГО ИСТОЧНИКА ИЗЛУЧЕНИЯ

А. Я. НЕДОСЕКА, С. А. НЕДОСЕКА, Р. А. ОЛЕЙНИК

Создание и совершенствование современных технологий акустико-эмиссионной диагностики невозможно без точного знания законов распространения упругих волн в материалах. В последнее время этому вопросу посвящен ряд публикаций [1–17]. Теория упругости дает возможность получить аналитическое решение волновых задач. Затем, используя вычислительную технику, можно провести его всесторонний анализ с различными входными данными и представить результаты в графическом виде.

Как правило, при решении волновых задач такого рода ограничиваются случаем толстых пластин без учета влияния второй поверхности. На практике сигналы, зарегистрированные датчиками акустической эмиссии (АЭ) в тонкой пластине, существенно отличаются от полученных при прочих равных условиях для толстой пластины, а влияние второй поверхности на движение волны тем сильнее, чем меньше толщина пластины. Естественно, при расчете тонких пластин такое влияние необходимо учитывать, поскольку наличие еще одной поверхности приводит к появлению новых составляющих волны, ее многократному переотражению и значительно усложняет общую картину ее распространения. К сожалению, расчет поля перемещений в этом случае более сложен, и формулы получаются более громоздкими и менее удобными для использования.

Рассмотрим пластину толщиной δ , в которой на глубине z_0 возник сигнал АЭ (рис. 1). Предположим, что дефект возник в виде микровзрыва V_0^* с симметричным во всех направлениях движением АЭ волны. Величину и характер распределения источника АЭ представим в виде произведения δ_+ -функций. Тогда уравнения, описывающие распространение упругих волн в пластине, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{\varphi} - \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} &= -\frac{1+\nu}{1-\nu} V_0^* \frac{\delta_+(r)}{2\pi r} \delta_+(z-z_0) \delta_+(t) \delta_+(\omega_0 - \alpha C); \\ \nabla^2 \bar{\psi} - \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$; C_1, C_2 — скорость распространения соответственно продольной и поперечной волны; ν — коэффициент Пуассона.

Следует обратить внимание на то, что в первом уравнении системы (1) в правой части присутствует составляющая связи между частотой волны ω_0 , скоростью ее распространения C и волновым числом α , как это было в случае полупространства. Однако

в случае тонких пластин в связи с множеством скоростей распространения волн значение величины C не постоянно, а изменяется непрерывно в пределах от C_3 (скорость распространения волн Рэлея) до C_1 .

Решим систему (1), предполагая, что тело ограничено с двух сторон, и на границе выполнены условия

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0 \text{ при } z = 0; \delta.$$

При этом начальные условия задачи определяются $\delta_+(t)$, что указывает на то, что при $t = +0$ возник и исчез источник излучения.

Применив сос-преобразование Фурье по времени t (с параметром ω_0) и преобразование Ханкеля по координате r (с параметром α), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} - \left(\alpha^2 - \frac{\omega_0^2}{C_1^2} \right) \bar{\varphi} &= -\frac{1+\nu}{1-\nu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{V_0^*}{2\pi} \delta_+(z-z_0) \delta_+(\omega_0 - \alpha C); \\ \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial z^2} - \left(\alpha^2 - \frac{\omega_0^2}{C_2^2} \right) \bar{\psi} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Граничные условия примут вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{G} \bar{\tau}_{rz} &= 2 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial z^2} + \alpha^2 \bar{\psi} = 0; \\ \frac{1}{G} \bar{\sigma}_z &= \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2 \right) \bar{\varphi} - \alpha \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0; \delta. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение граничной задачи (2), (3) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= C \exp(z\beta_1) + \frac{P_1}{\beta_1} \exp(-|z-z_0|\beta_1); \\ \bar{\psi} &= A \exp(-z\beta_2) + B \exp(z\beta_2), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{V_0^*}{2\pi\sqrt{2\pi}} \delta_+(\omega_0 - \alpha C), \\ \beta_1 &= \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2/C_1^2}; \quad \beta_2 = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2/C_2^2}. \end{aligned}$$

Подставив выражения (4) в (3), приходим к системе уравнений для определения неизвестных постоянных A, B, C и соотношения между ω_0, α и C_α :

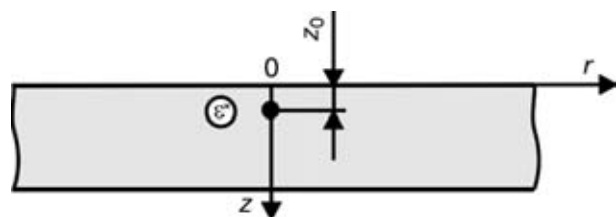


Рис. 1. Образование сигнала АЭ в пластине (обозначения см. в тексте).

$$\begin{aligned}
 & 2C\beta_1 + (A + B)(\alpha^2 + \beta_2^2) - 2P_1 \exp(-z_0\beta_1) = 0; \\
 & 2C\beta_1 \exp(\delta\beta_1) + [A \exp(-\delta\beta_2) + B \exp(\delta\beta_2)](\alpha^2 + \beta_2^2) - \\
 & \quad - 2P_1 \exp[-(\delta - z_0)\beta_1] = 0; \\
 & \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2 \right) C + (A - B)\alpha^2\beta_2^2 = -\frac{P_1}{\beta_1} \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2 \right) \exp(-z_0\beta_1); \quad (5) \\
 & \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2 \right) C \exp(\delta\beta_1) + \alpha^2\beta_2 [A \exp(-\delta\beta_2) - B \exp(\delta\beta_2)] + \\
 & \quad + \frac{P_1}{\beta_1} \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2 \right) \exp[-(\delta - z_0)\beta_1] = 0.
 \end{aligned}$$

Решив систему (5) для трех первых уравнений относительно A, B, C , получим

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{4P_1}{\Delta} \left[-2\alpha^2\beta_1\beta_2 \operatorname{ch}[(\delta - z_0)\beta_1] + \operatorname{sh}[(\delta - z_0)\beta_1](\alpha^2 + \right. \\
 & \left. + \beta_2^2) \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2 \right) + \exp(-z_0\beta_1) \exp(\delta\beta_2)(\alpha^2 + \beta_2^2) \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2 \right) \right]; \\
 B &= \frac{4P_1}{\Delta} \left[2\alpha^2\beta_1\beta_2 \operatorname{sh}[(\delta - z_0)\beta_1] + \operatorname{ch}[(\delta - z_0)\beta_1](\alpha^2 + \beta_2^2) \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2 \right) - \right. \\
 & \quad \left. - \exp(-z_0\beta_1) \exp(\delta\beta_2)(\alpha^2 + \beta_2^2) \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2 \right) \right]; \\
 C &= \frac{P_1}{\Delta\beta_1} (\alpha^2 + \beta_2^2) \left\{ 4\alpha^2\beta_1\beta_2 \exp[-(\delta - z_0)\beta_1] - \right. \\
 & \quad - \exp(-z_0\beta_1) \exp(\delta\beta_2) \left[2\alpha^2\beta_1\beta_2 + (\alpha^2 + \beta_2^2) \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2 \right) \right] - \\
 & \quad \left. - \exp(-z_0\beta_1) \exp(-\delta\beta_2) \left[2\alpha^2\beta_1\beta_2 - (\alpha^2 + \beta_2^2) \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2 \right) \right] \right\},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta &= 2(\alpha^2 + \beta_2^2) \left\{ 2\alpha^2\beta_1\beta_2 [\exp(\delta\beta_1) - \operatorname{ch}(\delta\beta_2)] + \right. \\
 & \quad \left. + \operatorname{sh}(\delta\beta_2)(\alpha^2 + \beta_2^2) \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2 \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Подставляя полученные значения A, B, C в систему (4), для Φ и Ψ получим:

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi} &= \frac{P_1}{\Delta\beta_1} (\alpha^2 + \beta_2^2) \left\{ 4\alpha^2\beta_1\beta_2 \exp[-(\delta - z_0)\beta_1] - \exp(\delta\beta_2) \exp(-z_0\beta_1) \times \right. \\
 & \quad \times \left[2\alpha^2\beta_1\beta_2 + (\alpha^2 + \beta_2^2) \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2 \right) \right] - \exp(-\delta\beta_2) \exp(-z_0\beta_1) \times \\
 & \quad \times \left[2\alpha^2\beta_1\beta_2 - (\alpha^2 + \beta_2^2) \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2 \right) \right] \left. \right\} \exp(z\beta_1) + \frac{P_1}{\beta_1} \exp(-|z - z_0|\beta_1); \\
 \bar{\Psi} &= \frac{4P_1}{\Delta} \left\{ \left[-2\alpha^2\beta_1\beta_2 \operatorname{ch}[(\delta - z_0)\beta_1] + \operatorname{sh}[(\delta - z_0)\beta_1](\alpha^2 + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \beta_2^2) \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2 \right) + \exp(-z_0\beta_1) \exp(\delta\beta_2)(\alpha^2 + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \beta_2^2) \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2 \right) \right] \exp(-z\beta_2) + \left[\operatorname{ch}[(\delta - z_0)\beta_1](\alpha^2 + \beta_2^2) \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2 \right) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + 2\alpha^2\beta_1\beta_2 \operatorname{sh}[(\delta - z_0)\beta_1] - \exp(-z_0\beta_1) \exp(-\delta\beta_2)(\alpha^2 + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \beta_2^2) \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2 \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Подставляя значения Φ и Ψ во второе из условий (3) при $z = \delta$, получим уравнение, обеспечивающее четвертое граничное условие и определяющее отношение между волновыми числами α , скоростями движения элементарных волн C и их частотными характеристиками ω_0 . Это так называемое **спектральное уравнение** пластины.

Итак, после подстановки Φ и Ψ в граничные условия (3) и выполнения обратных преобразований по α и ω получим следующее спектральное уравнение:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{P_0\alpha^7}{4\gamma_1\Delta_1} \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2} \right)^2 e^{\delta\alpha\gamma_1} \left\{ e^{\delta\alpha\gamma_2} e^{-z_0\alpha\gamma_1} \left[4\gamma_1\gamma_2 - \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2} \right)^2 \right] + \right. \\
 & \quad \left. + 8\gamma_1\gamma_2 e^{-|\delta-z_0|\alpha\gamma_1} - e^{-\delta\alpha\gamma_2} e^{-z_0\alpha\gamma_1} \left[4\gamma_1\gamma_2 + \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2} \right)^2 \right] \right\} - \\
 & -\frac{P_0\alpha}{2\gamma_1} e^{-|\delta-z_0|\alpha\gamma_1} \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2} \right)^2 - \frac{P_1\alpha^7\gamma_2}{\Delta_1} e^{-\delta\alpha\gamma_1} \left\{ 2e^{\delta\alpha\gamma_2} e^{-z_0\alpha\gamma_1} \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2} \right)^2 + \right. \\
 & \quad \left. + e^{-|\delta-z_0|\alpha\gamma_1} \left[4\gamma_1\gamma_2 - \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2} \right)^2 \right] + e^{\delta\alpha\gamma_2} e^{-z_0\alpha\gamma_1} \left[4\gamma_1\gamma_2 + \right. \right. \quad (6) \\
 & \quad \left. \left. + \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2} \right)^2 \right] \right\} - \frac{P_0\alpha^7\gamma_2}{\Delta_1} \left\{ 2e^{-\delta\alpha\gamma_2} e^{-z_0\alpha\gamma_1} \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2} \right)^2 - \right. \\
 & \quad \left. - e^{-|\delta-z_0|\alpha\gamma_1} \left[4\gamma_1\gamma_2 + \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2} \right)^2 \right] + e^{\delta\alpha\gamma_2} e^{-z_0\alpha\gamma_1} \left[4\gamma_1\gamma_2 - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2} \right)^2 \right] \right\} = 0,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= \alpha^6 \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2} \right) \left[4\gamma_1\gamma_2 e^{\delta\alpha\gamma_1} - 4\gamma_1\gamma_2 \operatorname{ch}(\delta\alpha\gamma_2) - \operatorname{sh}(\delta\alpha\gamma_2) \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2} \right)^2 \right]; \\
 \gamma_1 &= \sqrt{1 - \frac{C^2}{C_1^2}}; \quad \gamma_2 = \sqrt{1 - \frac{C^2}{C_2^2}}; \quad P_0 = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{V_0^*}{2\pi^2}.
 \end{aligned}$$

В терминах Φ и Ψ перемещение w выражается следующим образом:

$$\bar{w}(z) = \delta\bar{\Phi}/\partial z + \alpha^2\bar{\Psi}. \quad (7)$$

Используя выражения (4), формулу (7) можно записать в таком виде:

$$\bar{w}(z) = \beta_1 C \exp(z\beta_1) + P_1 \exp[(z_0 - z)\beta_1] + \alpha^2 [A \exp(-z\beta_2) + B \exp(z\beta_2)] \quad \text{при } z \leq z_0; \quad (8)$$

$$\bar{w}(z) = \beta_1 C \exp(z\beta_1) - P_1 \exp[-(z_0 - z)\beta_1] + \alpha^2 [A \exp(-z\beta_2) + B \exp(z\beta_2)] \quad \text{при } z > z_0, \quad (9)$$

где, как и ранее, $P_1 = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{V_0^*}{2\pi\sqrt{2\pi}} \delta_+(\omega_0 - \alpha C)$.

Величины перемещений w на поверхности пластины ($z = 0$) определим после подстановки значений Φ и Ψ в выражение (8).

Следует отметить, что уравнение (6) в промежуток скоростей волн от 0 до C_2 при $\delta \rightarrow \infty$ допускает существование лишь одной волны, распространяющейся со скоростью C_3 , — волны Рэлея. Это уравнение определяет также и то, что все элементарные волны с волновыми числами α , составляю-

щие волну Рэлея, при $\delta \rightarrow \infty$ двигаются с одной скоростью, равной C_3 . Это позволяет, как и в случае полупространства, принять зависимость между ω_0 и α в виде дельта-функции $\delta_+(\omega_0 - C_3)$. Тогда с учетом сказанного после выполнения обратного преобразования Ханкеля по α и Фурье по ω_0 , с учетом начального условия для ω получим

$$\begin{aligned} w = & \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) [1 - \cos(\alpha C_3 t)] \times \\ & \times \left\{ \frac{P_0 \alpha^6}{\Delta_1} \left(2 - \frac{C_3^2}{C_2^2}\right) \left\{ -\exp(-z_0 \alpha \gamma_1) \exp(\delta \alpha \gamma_2) [4\gamma_1 \gamma_2 - \left(2 - \frac{C_3^2}{C_2^2}\right)^2] + \right. \right. \\ & + 8\gamma_1 \gamma_2 \exp[-\alpha(\delta - z_0)\gamma_1] - \\ & \left. - \exp(-z_0 \alpha \gamma_1) \exp(-\delta \alpha \gamma_2) [4\gamma_1 \gamma_2 + \left(2 - \frac{C_3^2}{C_2^2}\right)^2] \right\} + \quad (10) \\ & + P_0 \exp(-z_0 \alpha \gamma_1) - \frac{2P_0 \alpha^6}{\Delta_1} \left[\exp[-\alpha(\delta - z_0)\gamma_1] \left(2 - \frac{C_3^2}{C_2^2}\right) + \right. \\ & + 4\gamma_1 \gamma_2 \exp[-(\delta - z_0)\gamma_1] + \\ & \left. + 2\exp(-z_0 \alpha \gamma_1) \left(2 - \frac{C_3^2}{C_2^2}\right) \operatorname{ch}(\delta \alpha \gamma_2) \right] \Big\} d\alpha. \end{aligned}$$

Здесь $\gamma_1 = \sqrt{1 - \frac{C_3^2}{C_1^2}}$; $\gamma_2 = \sqrt{1 - \frac{C_3^2}{C_2^2}}$.

Анализируя уравнение (6), нетрудно видеть, что оно имеет строгое решение в трех случаях: соответственно при $\delta = \infty$; $\alpha = \infty$; $\alpha\delta = \infty$.

Первый случай, как было показано выше, представляет полупространство. Распространяющаяся волна w не зависит от спектрального числа α , имеет скорость движения C_3 и определяется из формулы (10) предельным переходом $\delta \rightarrow \infty$. Во втором случае волны в пластине отсутствуют, так как интегрирование по α в формуле (10) осуществляется в пределах от ∞ до ∞ .

Особый интерес представляет третий случай, когда $\alpha\delta = \infty$. Следует отметить неопределенность понятия бесконечности в технических расчетах. Как правило, все процессы, рассматриваемые в технике, конечны, и лишь с определенными допущениями можно применить в них понятие бесконечности. Анализируя выражение (10), можно заметить, что все коэффициенты при сгруппированных членах есть функции, в которых достижение нуля или бесконечности осуществляется стремлением аргумента к бесконечности. Так, при стремлении толщины пластины к бесконечности мы имеем дело с полупространством. Но что такое полупространство для технической задачи? На этот вопрос ответить трудно.

Учитывая изложенное, предположим, что величина $\alpha\delta\gamma_1$ (третий случай, когда $\alpha\delta = \infty$), являющаяся аргументом в экспоненциальной функции в уравнении (6), стремится к очень большим значениям, например, к 50. В этом случае $\exp(-50) = 1,928 \cdot 10^{-22}$, что практически является нулем для технической задачи. Предположим, что такой «технический» нуль обеспечивает образование в пластинах (тонких и толстых) упругих волн, двигающихся со скоростями в диапазоне $0 \dots C_2$.

Решая уравнение (6) при указанном предположении, можно показать, что в данном диапазоне скоростей в пластинах образуется и распространяется только одна волна со скоростью C_3 . На рис. 2 приведены графики функции $F(\alpha, C_\alpha)$ (левая часть уравнения (6)) для различных C_α . Из рисунка видно, что функция $F(\alpha, C_\alpha)$ стремится к 0 с увеличением числа α только для волны Рэлея, в то время как остальные функции $F(\alpha, C_\alpha)$ для волн, распространяющихся с другими скоростями, существенно отклоняются от оси α .

Итак, поскольку уравнение (6) имеет решение только для больших значений $\alpha\delta\gamma_1$, то формулу (10) можно существенно упростить и переписать следующим образом:

$$w = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{V_0^*}{2\pi^2} \left(1 - \frac{1 + \gamma_2^2}{2\gamma_1\gamma_2}\right) \int_{\alpha_n}^\infty \alpha J_0(\alpha r) \cos(\alpha C_3 t) \exp(-\alpha z_0 \gamma_1) d\alpha. \quad (11)$$

Величина нижнего предела интегрирования в выражении (11) α_n есть значение волнового числа, при котором при заданной толщине пластины обеспечивается условный нуль в спектральном уравнении (11). На рис. 2 (кривая 1) это точка со значением $\alpha_n = 10,27 \text{ см}^{-1}$. При $\delta = \infty$ значение $\alpha_n = 0$ и выражение для w принимает тот же вид, что и для полупространства.

Интегрирование в выражении (9) затруднительно из-за бесконечного верхнего предела и цикличности подынтегральной функции. Для облегчения процедуры произведем замену функции Бесселя $J_0(\alpha r)$ ее интегральным представлением:

$$J_0(\alpha r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\alpha r \sin \theta) d\theta.$$

Тогда после выполнения интегрирования по α в пределах от α_n до бесконечности окончательно для w получим

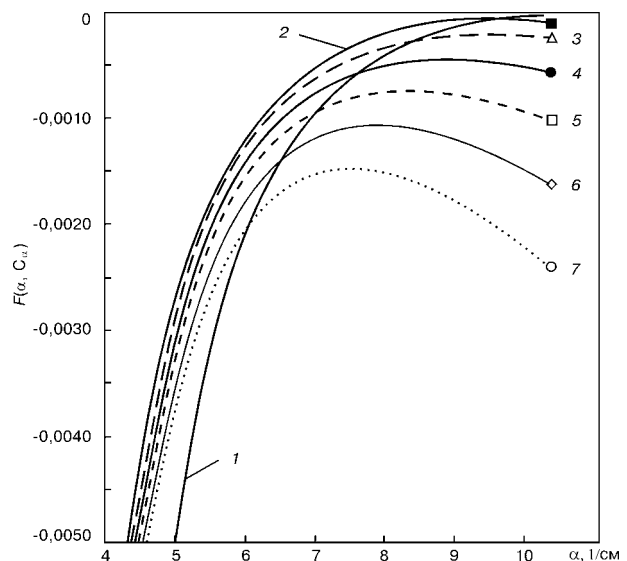


Рис. 2. Корни спектрального уравнения (6) в зависимости от скорости распространения упругой волны C_α (1 – 2986; 2 – 2996; 3 – 3006; 4 – 3016; 5 – 3026; 6 – 3036; 7 – 3046 м/с) и волнового числа α ($\delta = 1 \text{ см}$, $z_0 = 0,1 \text{ см}$).

$C(\alpha) \times 10^{-3}$, см/с

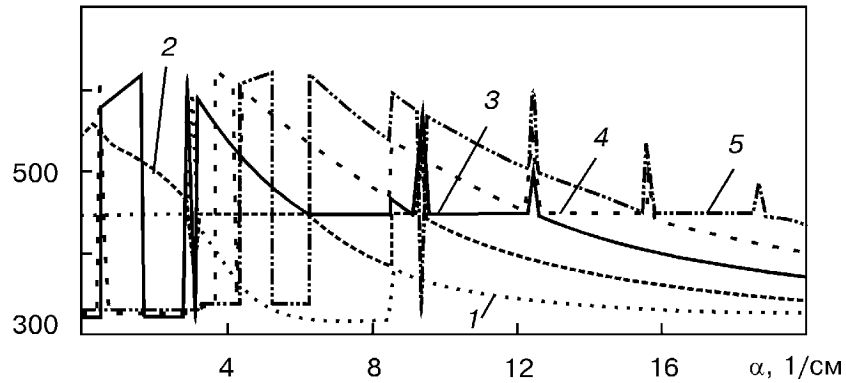


Рис. 3. Зависимость между величинами C и α , определенная спектральным уравнением (15) для корней 1–5-го порядков (соответственно кривые 1–5).

$$\omega = \frac{1 + v}{1 - v} \frac{V_0^*}{2\pi^3} \left(1 - \frac{1 + \gamma_1^2}{2\gamma_1\gamma_2}\right) \times \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{2e^{-\alpha_n a}}{a^2 + b_1^2} \left[(\alpha_n a + \frac{a^2 - b_1^2}{a^2 + b_1^2}) \cos(\alpha_n b) - (\alpha_n b + \frac{2ab}{a^2 + b_1^2}) \sin(\alpha_n b) \right] - \frac{e^{-\alpha_n a}}{a^2 + b_1^2} \left[(\alpha_n a + \frac{a^2 - b_1^2}{a^2 + b_1^2}) \cos(\alpha_n b_1) - (\alpha_n b_1 + \frac{2ab_1}{a^2 + b_1^2}) \sin(\alpha_n b_1) \right] - \frac{e^{-\alpha_n a}}{a^2 + b_2^2} \left[(\alpha_n a + \frac{a^2 - b_2^2}{a^2 + b_2^2}) \cos(\alpha_n b_2) - (\alpha_n b_2 + \frac{2ab_2}{a^2 + b_2^2}) \sin(\alpha_n b_2) \right] \right\} d\theta.$$

Здесь $\gamma_1 = \sqrt{1 - C_3^2/C_1^2}$; $\gamma_2 = \sqrt{1 - C_3^2/C_2^2}$; $b = r \sin \theta$; $b_1 = r \sin \theta - C_3 t$; $b_2 = r \sin \theta + C_3$; $a = z_0 \gamma_1$.

Как видим, теперь выражение для ω интегрируется в конечных пределах, и интегрирование может быть легко реализовано на компьютере.

В случае, если скорости распространения элементарных волн превышают C_2 , то решение второго дифференциального уравнения (для ψ) системы (2) будет отличаться от представленного в системе (4). Это объясняется тем, что подкоренное выражение для величины b_2 становится отрицательным, а сама величина b_2 — комплексной. Решение для этого случая запишется в виде

$$\bar{\varphi} = C \exp(z\beta_1) + \frac{1 + v}{1 - v} \frac{V_0^* \exp(-|z - z_0\beta_1|)}{2\pi \sqrt{2\pi\beta_1}} \delta_1(\omega_0 - \alpha C);$$

$$\bar{\psi} = A \sin(z\beta_2) + B \cos \exp(z\beta_2).$$

Подставляя эти выражения для φ и ψ в уравнения граничных условий (3), получаем

$$2C\beta_1 + (\alpha^2 - \beta_2^2)B - 2P_1 \exp(-z_0\beta_2) = 0;$$

$$2C\beta_1 \exp(\delta\beta_1) + (\alpha^2 - \beta_2^2)[A \sin(\delta\beta_2) + B \cos(\delta\beta_2)] - 2P_1 \exp[-(\delta - z_0)\beta_1] = 0;$$

$$\left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2\right)C - A\alpha^2\beta_2 + \frac{P_1}{\beta_1} \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2\right) \exp(-z_0\beta_1) = 0;$$

$$\left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2\right)C \exp(\delta\beta_1) - A\alpha^2\beta_2 \cos(\delta\beta_2) + B\alpha^2\beta_2 \times \sin(\delta\beta_2) + \frac{P_1}{\beta_1} \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2\right) \exp[-(\delta - z_0)\beta_1] = 0.$$

Решив систему первых трех уравнений (14), найдем выражения для коэффициентов A , B и C :

$$A = \frac{2P_1}{\Delta} (\alpha^2 - \beta_2^2) \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2\right) \left\{ 2 \cos(\delta\beta_2) \exp(-z_0\beta_1) - \exp[-(\delta - z_0)\beta_1] - \exp(\delta\beta_1) \exp(-z_0\beta_1) \right\};$$

$$B = \frac{4P_1}{\Delta} \left\{ \alpha^2 \beta_1 \beta_2 [\exp[-(\delta - z_0)\beta_1] - \exp(\delta\beta_1) \exp(-z_0\beta_1)] - \sin(\delta\beta_2) \exp(-z_0\beta_1) (\alpha^2 - \beta_2^2) \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2\right) \right\};$$

$$C = \frac{P_1}{\beta_1 \Delta} (\alpha^2 - \beta_2^2) \left\{ -2\alpha^2 \beta_1 \beta_2 \exp[-(\delta - z_0)\beta_1] + \cos(\delta\beta_2) \exp(-z_0\beta_1) [2\alpha^2 \beta_1 \beta_2 - (\alpha^2 - \beta_2^2) \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2\right)] + \exp(-z_0\beta_1) \sin(\delta\beta_2) [(\alpha^2 - \beta_2^2) \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2\right)] \right\}.$$

После подстановки значений коэффициентов A , B , C в выражения (13) получим

$$\bar{\varphi} = \frac{P_1}{\beta_1 \Delta} (\alpha^2 - \beta_2^2) \left\{ -2\alpha^2 \beta_1 \beta_2 \exp[-(\delta - z_0)\beta_1] + \exp(-z_0\beta_1) \cos(\delta\beta_2) [2\alpha^2 \beta_1 \beta_2 - (\alpha^2 - \beta_2^2) \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2\right)] + \sin(\delta\beta_2) \exp(-z_0\beta_1) \left[(\alpha^2 - \beta_2^2) \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2\right) \right] \right\} \exp(z\beta_1) + \frac{P_1}{\beta_1} \exp[-(z - z_0)\beta_1];$$

$$\bar{\psi} = \frac{2P_1}{\Delta} (\alpha^2 - \beta_2^2) \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2\right) \left\{ 2 \cos(\delta\beta_2) \exp(-z_0\beta_1) - \exp[-(\delta - z_0)\beta_1] - \exp(-z_0\beta_1) \exp(\delta\beta_1) \right\} \sin(z\beta_2) + \frac{4P_1}{\Delta} \left\{ \exp[-(\delta - z_0)\beta_1] \alpha^2 \beta_1 \beta_2 - \alpha^2 \beta_1 \beta_2 \exp(\delta\beta_1) \exp(-z_0\beta_1) - \exp(-z_0\beta_1) \sin(\delta\beta_2) (\alpha^2 - \beta_2^2) \left(\frac{\omega_0^2}{2C_2^2} - \alpha^2\right) \right\} \cos(z\beta_2).$$

Подставляя выражения для φ и ψ в четвертое уравнение (10), получаем спектральное уравнение

пластины для случая, когда $C > C_2$. После выполнения обратного преобразования Ханкеля по α , Фурье по ω_0 и некоторых преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{P_0 \alpha^7}{\gamma_1 \Delta} \left\{ \exp[-\alpha(\delta - z_0)\gamma_1] \left[8\gamma_1 \gamma_2 \exp(\alpha\delta\gamma_1) \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2}\right)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \cos(\alpha\delta\gamma_2) \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2}\right) + \sin(\alpha\delta\gamma_2) \left(16\gamma_1^2 \gamma_2^2 - \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2}\right)^4\right) \right] + \right. \\ & \left. + 8\gamma_1 \gamma_2 \exp(-\alpha z_0 \gamma_1) \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2}\right)^2 - \right. \\ & \left. - \exp[-\alpha(\delta - z_0)\gamma_1] \left[\cos(\alpha\delta\gamma_2) \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2}\right) (8\gamma_1 \gamma_2 + \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2}\right)^2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sin(\alpha\delta\gamma_2) \left(16\gamma_1^2 \gamma_2^2 - \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2}\right)^4\right) \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\Delta_2 = \frac{\alpha^6}{2} \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2}\right) \left\{ 4\gamma_1 \gamma_2 [\cos(\alpha\delta\gamma_2) - \exp(\alpha\delta\gamma_1) + \sin(\alpha\delta\gamma_2) \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2}\right)^2] \right\};$$

$$\gamma_1 = \sqrt{1 - \frac{C^2}{C_1^2}}; \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{C^2}{C_2^2} - 1}; \quad P_0 = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{V_0^*}{2\pi}.$$

Зная спектральное уравнение пластины (15), т. е. связь между волновым числом α и скоростью распространения элементарных волн C , можем определить перемещения w , возникающие в пластине при движении волн со скоростями, превышающими C_2 . Так, перемещения на поверхности пластины ($z = 0$) с принятыми начальными условиями после выполнения обратного преобразования Ханкеля по α и Фурье по ω_0 будут иметь вид

$$\begin{aligned} w = \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha r) \cos(\alpha C t) & \left\{ \frac{P_0 \alpha^6}{2\Delta_2} \left[\gamma_2^2 \sin(\alpha\delta\gamma_2) \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2}\right)^2 \exp(-\alpha z_0 \gamma_1) + \right. \right. \\ & + 4\gamma_1 \gamma_2 \frac{C^2}{C_2^2} \exp[-\alpha(\delta - z_0)\gamma_1] - 2\gamma_1 \gamma_2 \exp(\alpha\delta\gamma_1) \exp(-\alpha z_0 \gamma_1) + \\ & \left. \left. + \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2}\right) \exp(-\alpha z_0 \gamma_1) \cos(\alpha\delta\gamma_2) (4\gamma_1 \gamma_2 + \left(2 - \frac{C^2}{C_2^2}\right)^2) \right] + \right. \\ & \left. + P_0 \exp(-\alpha z_0 \gamma_1) \right\} d\alpha. \end{aligned} \quad (16)$$

Перемещения поверхности пластины при распространении волн будут состоять из суммы перемещений, определяемых по формулам (12) (волна Рэлея) и (16) (волны Лэмба).

Следует отметить, что вычисления перемещений по формуле (16) затруднительно из-за необходимости определения корней спектральных уравнений для получения зависимости $f(\alpha, C)$. Это решение требует мощных вычислительных средств и много машинного времени для реализации счета, так как расчеты выполняются в пределах от 0 до бесконечности при изменяющихся α и C . Это же относится и к выражениям для w .

В то же время, анализируя представленные на рис. 3 графики зависимости корней $C(\alpha)$ для эле-

ментарных составляющих волн Лэмба (уравнение (15)), можно заметить, что функция $C(\alpha)$ имеет непрерывное значение по волновым числам и дискретна для различных порядков корней для C , то есть имеет место дискретность в значениях α и C по номерам порядков корней спектрального уравнения (14)¹. Таким образом, в случае распространения волн в тонких пластинах мы имеем дело с кусочно-непрерывными пространствами зависимостей между α и C .

Для реализации расчета перемещений w выполним интегрирование в выражении (16) с учетом дискретности значений C для непрерывных значений волнового числа α . При этом будем предполагать, что значения подынтегральной функции будет определяться в виде суммы ее значений для каждого C_i , найденного из выражения (15). Тогда

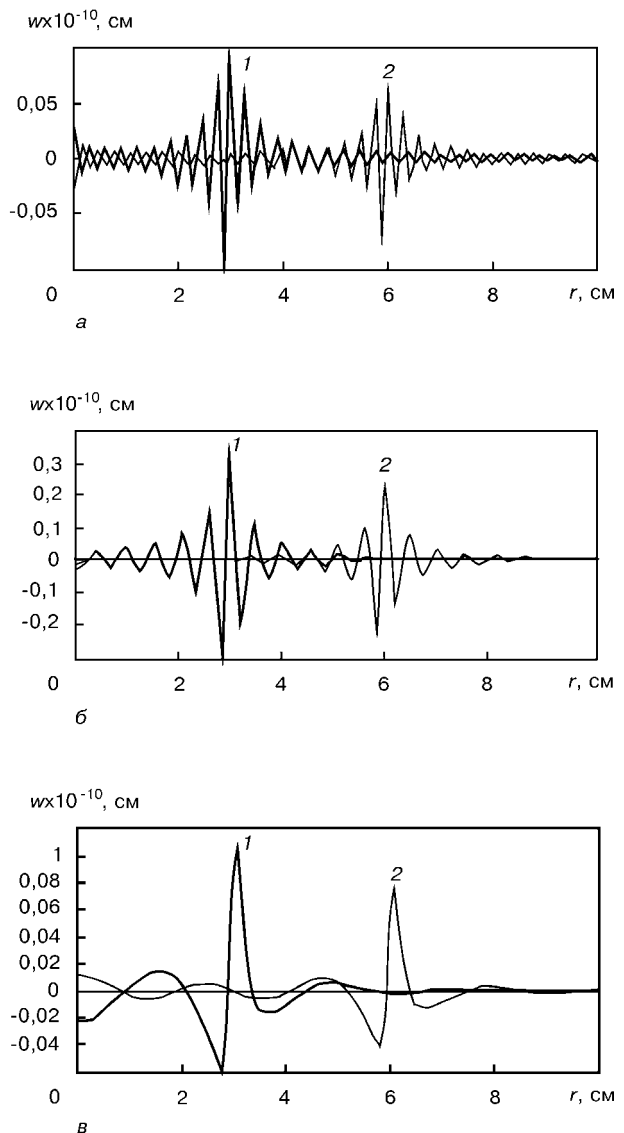


Рис. 4. Распространение волн Рэлея в пластинах толщиной 1 (а); 5 (б); 20 см (в) при $C_3 t = 3$ (1) и 6 см (2), $z_0 = 0,2$ см.

¹ Отметим, что на рис. 3, чтобы не загромождать изображение, приведены графики лишь для 5 значений порядков корней.

$$\begin{aligned}
 w = & \int_0^{\infty} \alpha J_0(\alpha r) \cos(\alpha C_i t) \left\{ \frac{P_0 \alpha^6}{2\Delta_2} \left[\gamma_2^2 \sin(\alpha \delta \gamma_2) \left(2 - \frac{C_i^2}{C_2^2} \right)^2 \exp(-\alpha z_0 \gamma_1) + \right. \right. \\
 & + 4\gamma_1 \gamma_2 \frac{C_2^2}{C_2^2} \exp[-\alpha(\delta - z_0)\gamma_1] - 2\gamma_1 \gamma_2 \exp(\alpha \delta \gamma_1) \exp(-\alpha z_0 \gamma_1) + \\
 & + \left. \left. \left(2 - \frac{C_i^2}{C_2^2} \right) \exp(-\alpha z_0 \gamma_1) \cos(\alpha \delta \gamma_2) (4\gamma_1 \gamma_2 + \left(2 - \frac{C_i^2}{C_2^2} \right)^2) \right] + \right. \\
 & \left. + P_0 \exp(-\alpha z_0 \gamma_1) \right\} d\alpha,
 \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\Delta_2 = \frac{\alpha^6}{2} \left(2 - \frac{C_i^2}{C_2^2} \right) \left\{ 4\gamma_1 \gamma_2 [\cos(\alpha \delta \gamma_2) - \exp(\alpha \delta \gamma_1)] + \left(2 - \frac{C_i^2}{C_2^2} \right)^2 \sin(\alpha \delta \gamma_2) \right\};$$

$$\gamma_1 = \sqrt{1 - \frac{C_i^2}{C_1^2}}; \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{C_i^2}{C_2^2} - 1}; \quad P_0 = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{V_0^*}{2\pi^2}.$$

Здесь значения γ_1 и γ_2 становятся также i -ми. В приведенной формуле эти значки не проставлены во избежание излишнего загромождения выражения. Интегрирование выражения (17) возможно только численным методом и выполняется следующим образом:

1. Из спектрального уравнения (15) находим значения скоростей C_i для каждого заданного значения волнового числа α_i .

2. Для выбранного r_j строим по оси α_i для всех k порядков корней C_i суммарное по k значение подынтегральной функции.

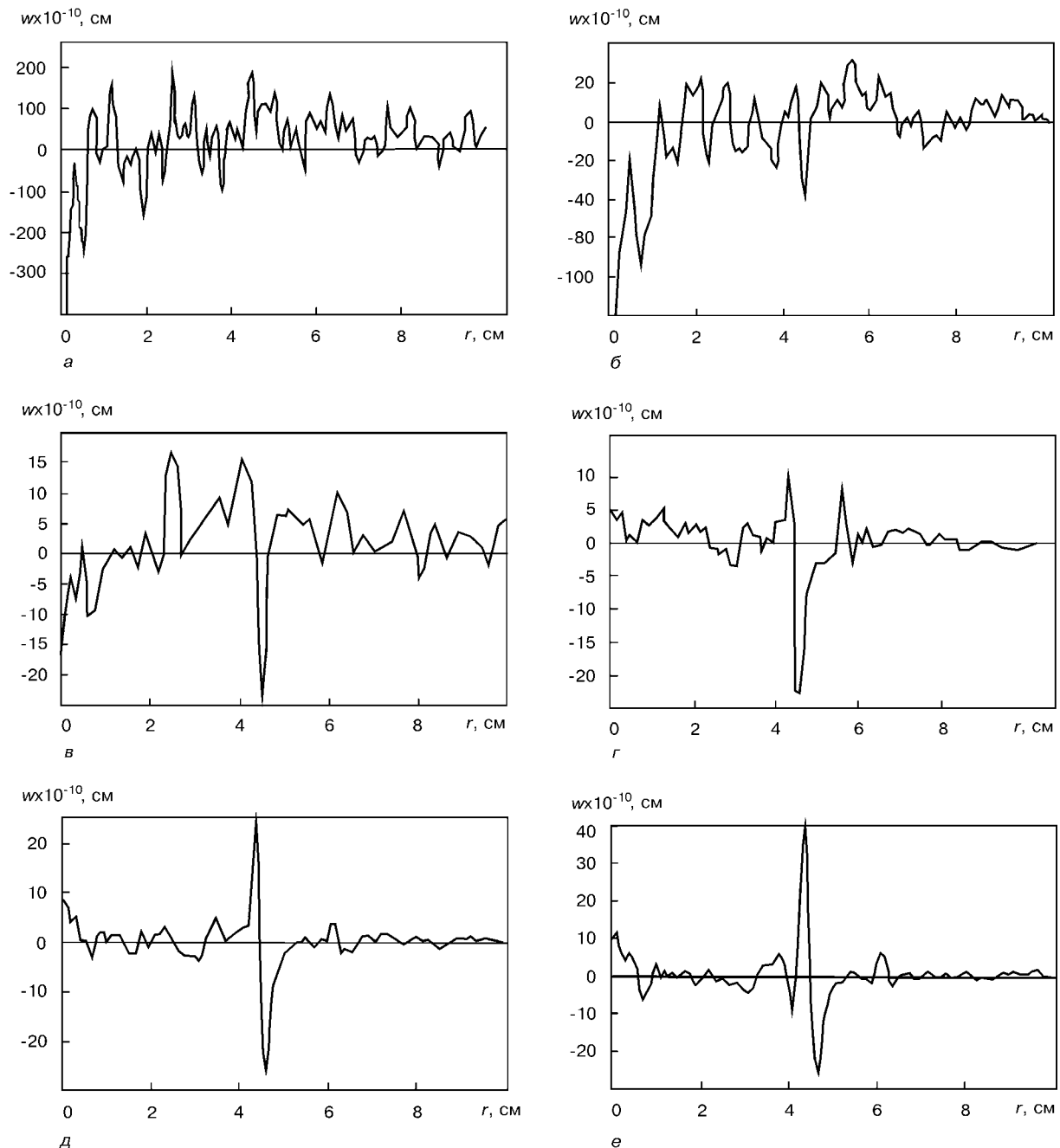


Рис. 5. Упругая волна АЭ, распространяющаяся в пластине толщиной 0,3 (а); 0,6 (б); 1 (в); 5 (г); 10 (д) и 20 см (е) от источника АЭ, возникшего на глубине $z_0 = 0,2$ см в момент времени $t = 10^{-3}$ с.

3. Интегрируем выражение (17) для полученных значений подынтегральной функции и переходим к следующему значению r_{j+1} .

4. Повторяем действия пп. 1–3 для всех значений r_j .

Теперь, используя принятую методику, рассчитаем сначала для волн Рэлея, а затем Лэмба перемещения в пластинах из сплава АМгб при возникновении в них внутреннего локального источника излучения. Импульс возмущения локального объема материала на глубине z_0 от поверхности пластины найдем из следующей зависимости:

$$V_0^* = \frac{4}{3} \pi R^3 t_0 = \frac{4}{3} \pi \cdot 0,05^3 \cdot 10^{-6} = 5,24 \cdot 10^{-10}, \text{ см}^3 \cdot \text{с}.$$

Здесь мы предположили, что локальное возмущение протекает в рамках одного зерна размером 1 мм за 1 мкс.

Распространяющиеся в этих пластинах волны Рэлея, рассчитанные по формуле (12) для пластин толщиной 1; 5; 20 см, представлены на рис. 4. Анализируя графики, можно заметить, что движущаяся волна имеет четко выраженную конфигурацию, и с увеличением толщины пластины эта конфигурация приближается к конфигурации волны Рэлея в полупространстве. С увеличением толщины пластины незначительно растут амплитуды волны.

Последнее объясняется тем, что при $\alpha_n \rightarrow 0$ с увеличением толщины пластины в формировании суммарной волны принимают участие все большее число элементарных волн.

Для этих же пластин и условий рассчитаем возмущение их поверхности, вызванное распространяющимися в них упругими волнами Лэмба. Расчеты проведем для пластин толщиной 0,3; 0,6; 1; 5; 10 и 20 см. На рис. 5 приведены эпюры этих волн. Анализируя их, необходимо отметить существенное различие в амплитудах и характере распространения волн Лэмба по сравнению с волнами Рэлея. Распространяющаяся волна в тонких пластинах имеет большое количество незначительно отличающихся друг от друга максимумов и минимумов. И только с увеличением толщины пластины общая картина начинает меняться, наблюдается формирование ограниченного числа пиков амплитуд перемещений.

В пластинах толщиной 1 см и более резкий пик появляется на расстоянии 4,5 см от центра излучения. Этот пик соответствует волне, двигающейся со скоростью 4451 м/с. Перемещения ближайшей к этой волне части поверхности пластины продолжают носить хаотический характер. С дальнейшим увеличением толщины пластины в процесс формирования суммарной волны вовлекаются все новые элементарные волны, и характер волновой поверхности меняется. При этом сохраняется пик волны, распространяющейся со скоростью 4451 м/с, и более четкие очертания приобретают два пика с меньшей амплитудой, расположенные позади и впереди этой волны. Скорость их распространения составляет 3300 и 6300 м/с. Эти скорости приближенно соответствуют скоростям распространения поперечной C_2 и продольной C_1 волны.

Следует отметить, что наличие второй поверхности в пластине играет существенную роль в формировании волн. Поэтому с увеличением толщины

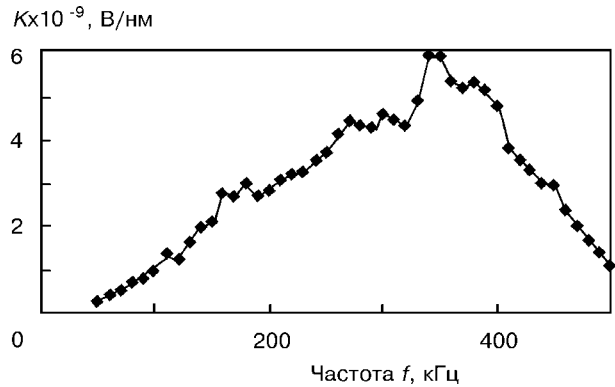


Рис. 6. Коэффициент электроакустического преобразования K для датчика АЭ типа ДАЭ-002Р.

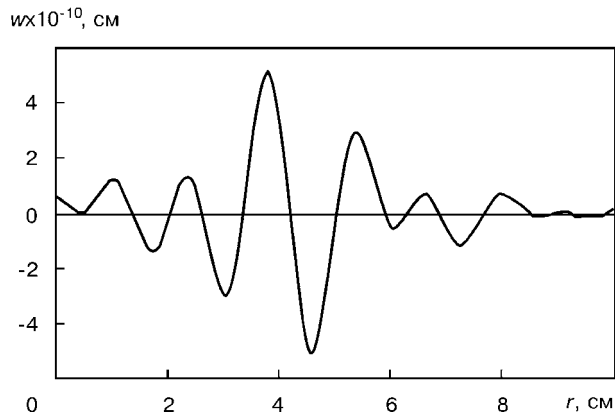


Рис. 7. Распространение упругой волны по поверхности пластины из сплава АМгб толщиной 1 см в диапазоне волновых чисел от 0 до 5 см^{-1} ($z_0 = 0,2 \text{ см}$, $t = 10^{-5} \text{ с}$).

пластины, как видно из графиков, представленных на рис. 5, волновое поле пластины не стремится к образованию одной волны, как в случае полупространства (волна Рэлея). В пластинах больших толщин одновременно существуют несколько типов волн, распространяющихся с различными скоростями. Перемещения поверхности для пластин очень большой толщины определяются по формуле, полученной из выражения (17) путем предельного перехода, когда $\delta \rightarrow \infty$:

$$\omega = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{V_0^*}{2\pi^2} \int_0^k \sum_{i=1}^k \alpha J_0(\alpha r) \cos(\alpha C_i t) (1 + \frac{1}{2 - C_i^2/C_2^2}) \exp(-\alpha z_0 \gamma_i) d\alpha.$$

Следует более подробно остановиться на характере распространения упругих волн в тонких пластинах. Характерным волновым полем для этих пластин является поле, представленное на рис. 5, а, б. В то же время распространяющаяся по пластине волна с увеличением расстояния от источника излучения теряет в спектре. Более короткие элементарные составляющие волны затухают с увеличением расстояния более интенсивно, чем длинные. Прошедшая большое расстояние волна Лэмба имеет более узкий спектр по сравнению с исходной. Динамическая задача теории упругости с учетом сопротивления среды много сложнее, и ее решение выходит за рамки настоящей статьи.

Для приближенной оценки влияния исчезновения коротких волн из спектра исходной волны на ее форму и амплитуды рассмотрим поле волн в пластине толщиной 1 см в спектре АЭ датчика типа ДАЭ-002Р, работающего в диапазоне волновых чисел $2 \leq \alpha \leq 5 \text{ см}^{-1}$ (рис. 6).

На рис. 7 представлена эпюра волны, распространяющейся от источника излучения, который находится на глубине 0,2 см от поверхности пластины толщиной 1 см. Сравнивая параметры этой волны с аналогичной в широком диапазоне частот (рис. 5, в), видим достаточно существенную разницу. Таким образом, наличие ограниченной полосы частот, в которой работают датчики АЭ, может привести к существенному искажению формы волны АЭ и, как следствие, к улучшению или ухудшению регистрации волн, точности определения координат источников АЭ.

Таким образом, получены теоретические зависимости, описывающие генерирование упругих волн в материалах с дефектами, локально развивающимися в них при деформировании. Движение одиночного микродефекта, например, дислокации, в приведенных выше выкладках моделируется движением точечного источника. Если перемещение источника не заканчивается одиночным скачком, то картина волнового поля, образованная перемещающейся дислокацией или развивающейся трещиной, может быть получена путем суперпозиции квантов каждого единичного источника с расчетом наложения их действия друг на друга.

1. Бобров В. Т., Свиридов Ю. Б. Трансформация импульсов рэлеевских волн в нормальные волны в упругом стержне, контактирующем с полупространством // Аннот. докл. XI Всесоюз. акустич. конф. (Москва, 1991 г.). — М.: Акустич. ин-т, 1991. — С. 18.
2. Буденков Г. А., Недзвецкая О. В. Волны Рэлея, излучаемые моделями источников акустической эмиссии // Дефектоскопия. — 1992. — № 4. — С. 8–16.
3. Вахавиолос С. Дж., Вонг В. Девид. Совершенствование метода и средств акустическо-эмиссионного контроля работающего оборудования. Оценка возможности дальнейшей эксплуатации (ВДЭ) и неразрушающий контроль на основе анализа рисков (ОВДЭ/КОАР) // Тез. докл. 3-й междунар. конф. «Диагностика трубопроводов», Москва, 21–26 мая 2001 г. — С. 217.

4. Галазюк В. А., Недосека А. Я., Чумак А. К. Исследование зависимости волнового процесса на поверхности упругого слоя от размеров и скорости возникновения внутреннего дефекта типа трещины // Техн. диагностика и неразруш. контроль. — 1989. — № 3. — С. 3–10.
5. Использование многофункциональной акустико-эмиссионной системы МАЭС для контроля процесса сварки / В. А. Гумешюк, А. В. Яковлев, В. А. Сульженко, Н. А. Казаков // Тез. докл. 3-й междунар. конф. «Диагностика трубопроводов», Москва, 21–26 мая 2001 г. — С. 210.
6. Дослідження вкладу хвиль Релея в акустичне поле, що виникає при розвитку внутрішнього дефекту / О. Є. Андрейків, О. М. Сергієнко, М. В. Лисак, В. Р. Скальський // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 1993. — № 2. — С. 12–19.
7. Иванов В. И. Акустическая эмиссия в процессе когерентного разрушения // Докл. АН СССР. — 1986. — 287, № 2. — С. 302–306.
8. Иванов В. И. Применение метода акустической эмиссии для неразрушающего контроля и исследования материалов (Обзор основных проблем и задач) // Дефектоскопия. — 1980. — № 5. — С. 65–84.
9. Кожаринов В. Перспективы применения акустико-эмиссионного метода неразрушающего контроля в производстве // Тез. докл. 3-й междунар. конф. «Диагностика трубопроводов», Москва, 21–26 мая 2001 г. — С. 221.
10. Лыков Ю. И., Панин В. И., Шулатов А. В. Излучатель волны Рэлея импульсный точечный ИВРИТ-1 // Тез. докл. 3-й междунар. конф. «Диагностика трубопроводов», Москва, 21–26 мая 2001 г. — С. 229.
11. Недосека А. Я. Основы расчета и диагностики сварных конструкций / Киев: Индпром, 2001. — 816 с.
12. Ceranoglu A. N., Pao Y.-H. Propagation of Elastic Pulses and Acoustic Emission in a Plate // Applied Mechanics. — 1981. — Vol. 48. — P. 125–132.
13. Pao Y.-H., Gajewski R. R., Ceranoglu A. N. Acoustic emission and transient waves in an elastic plate // Acoustical Society of America. — 1979. — 65, № 1. — P. 96–105.
14. Pao Y.-H., Gajewski R. R. Generalized ray theory and transient response of layered elastic solids // Physical acoustics. — 1977. — 13, № 6. — P. 184–265.
15. Weaver R. L., Pao Y.-H. Spectra of transient waves in elastic plates // Acoustical Society of America. — 1982. — 72, № 6. — P. 1933–1941.
16. Gillis P. P. Dislocation motions and acoustic emissions // Proc. of symposium presented at the December Committee Week American Society for Testing and Materials on acoustic emission. Bal Harbour, Florida, 7–8 December 1971. — P. 20–29.
17. Tetelman A. S., Chow R. Acoustic emission testing and microcracking processes // Там же. — P. 30–40.

Ин-т электросварки им. Е. О. Патона НАН Украины,
Киев

Поступила в редакцию
03.07.2001