

© Н.Л. Миронцов, 2010

*Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины,  
г. Киев*

## **ПОВЫШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗРЕШЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ И МАГНИТОМЕТРИИ**

Предложен неитерационный метод решения уравнения Фредгольма первого рода с ядром типа свертка. Показано, что данный метод позволяет решать задачи гравиметрии и магнитометрии с пространственным разрешением, сопоставимым с шагом измерения аномального поля.

**Ключевые слова:** Уравнение Фредгольма первого рода, гравиметрия, магнитометрия.

**Вступление.** Значительное количество актуальных задач геофизики сводится к решению уравнения Фредгольма первого рода с ядром типа свертка (УФ). К таким задачам можно отнести определение пространственного распределения аномальных масс или зарядов в задачах грави- и магнитометрии соответственно, а также восстановление пространственного распределения удельной проводимости в околоскважинном пространстве по измеренной с помощью метода индукционного каротажа кажущейся проводимости [1–3]. Безусловно, этими задачами не ограничивается круг задач геофизики, требующий решения УФ. Задача решения УФ является некорректно поставленной по Адамару [4], нахождение устойчивого решения которой требует применения регуляризирующих методов [5–7]. Используемые на практике методы в значительной степени требуют введения дополнительных предположений, что может ограничить класс объектов, в котором ищется решение. В данной работе будет предложен способ, позволяющий значительно увеличить пространственное разрешение методов гравии- и магнитометрии без использования дополнительных предположений.

**Метод.** Рассмотрим уравнение:

$$f(x, y) = \int_L K(x - x', y - y') \cdot g(x', y') \cdot dx' dy'. \quad (1)$$

Его можно переписать в силу теоремы о свертке [8]:

$$f(x, y) = \int_L K(x', y') \cdot g(x - x', y - y') \cdot dx' dy'. \quad (2)$$

Воспользовавшись теперь представлением функций из (2) в двумерный ряд Фурье:

$$f(x, y) = \sum_{j,k} f_{j,k} \cdot e^{i \cdot j \cdot x} \cdot e^{i \cdot k \cdot y},$$

$$K(x', y') = \sum_{j,k} K_{j,k} \cdot e^{i \cdot j \cdot x'} \cdot e^{i \cdot k \cdot y'},$$

$$g(x - x', y - y') = \sum_{j,k} g_{j,k} \cdot e^{i \cdot j \cdot x} \cdot e^{-i \cdot j \cdot x'} \cdot e^{i \cdot k \cdot y} \cdot e^{-i \cdot k \cdot y'},$$

где  $f_{i,j}$  – коэффициенты разложения в двумерный ряд Фурье известной функции  $f$ , а  $k_{i,j}$  – ядра  $K$  уравнения (2),  $g_{i,j}$  – искомой функции, перепишем (2) в виде:

$$\sum_{j,k} f_{j,k} \cdot e^{i \cdot j \cdot x} \cdot e^{i \cdot k \cdot y} = \int_L \sum_{i,j} K(x', y') \cdot g_{j,k} \cdot e^{i \cdot j \cdot x} \cdot e^{-i \cdot j \cdot x'} \cdot e^{i \cdot k \cdot y} \cdot e^{-i \cdot k \cdot y'}.$$

Окончательно можем записать уравнение для коэффициентов, соответствующих множителю

$$e^{i \cdot j \cdot x} \cdot e^{i \cdot k \cdot y} : f_{j,k} = K_{j,k}^* \cdot g_{j,k}. \quad (3)$$

Для интересующего нас случая уравнение (1) будет иметь вид:

$$f(x, y) = \int_L \frac{z \cdot g(x', y') \cdot dx' dy'}{\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4)$$

Оно связывает, например, измеренное аномальное поле  $f$  для заданного распределения неизвестной плотности массы или заряда  $g$  [1, 2]. Используя (3), можем записать коэффициенты ряда Фурье искомой функции:

$$g_{i,j} = \frac{f_{i,j}}{k_{i,j}^*}. \quad (5)$$

Введем обозначение  $g'_{n,m}$  для ряда, коэффициенты  $g_{i,j}$  которого рассчитаны по (5), и не содержащего членов разложения с номерами, большими по модулю, чем  $n$  и  $m$  соответственно по координатам  $x$  и  $y$ .

Количество членов ряда будем определять из условия минимума функционала:

$$F(n, m) = \left\| f(x, y) - \int_L \frac{z \cdot g'_{n,m}(x', y') \cdot dx' dy'}{\left( (x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right\|, \quad (6)$$

где норма может быть выбрана с учетом специфики задачи. Рассмотрим два типа нормы:

$$F_{L1}(n, m) = \int_L \left| f(x, y) - \int_L \frac{z \cdot g'_{n,m}(x', y') \cdot dx' dy'}{\left( (x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right| \cdot dx \cdot dy, \quad (7.1)$$

$$F_{L2}(n, m) = \int_L \sqrt{\left( f(x, y) - \int_L \frac{z \cdot g'_{n,m}(x', y') \cdot dx' dy'}{\left( (x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right)^2} \cdot dx \cdot dy, \quad (7.2)$$

Выбор количества членов в ряду будет определяться в значительной степени и выбором размеров области, в которой ищется решение. Для удобства изложения и универсальности применения метода будем считать, что все величины заданы в относительных безразмерных единицах.

**Результаты и анализ.** Для представленного на рис. 1 распределения  $g(x, y, z)|_{z=-10}$  в области  $10 \times 10$  (400×400 точек), было получено представленное на рис. 4 распределение  $f(x, y, z)|_{z=0}$ . На рис. 3 приведены зависимости  $F_{L1}(n, m)|_{n=m}$  и  $F_{L2}(n, m)|_{n=m}$  для такого  $f(x, y, z)|_{z=0}$ . Оказалось, что  $F_{L1}(n, m)|_{n=m}$  более “чувствительна” к изменению числа членов ряда. Для определенного (из условия минимума значения  $F_{L1}(n, m)$ ) количества  $n$  и  $m$  членов разложения на рис. 5 представлен результат решения  $g'_{n,m}$ .

Поскольку выбор параметров  $n$  и  $m$  не заложен в общей постановке задачи решения УФ и зависит от условий модели и специфики предложенного метода, а также значительно влияет на количественный результат решения, можно считать эти параметры регуляризирующими (по аналогии с классическими регуляризирующими методами).

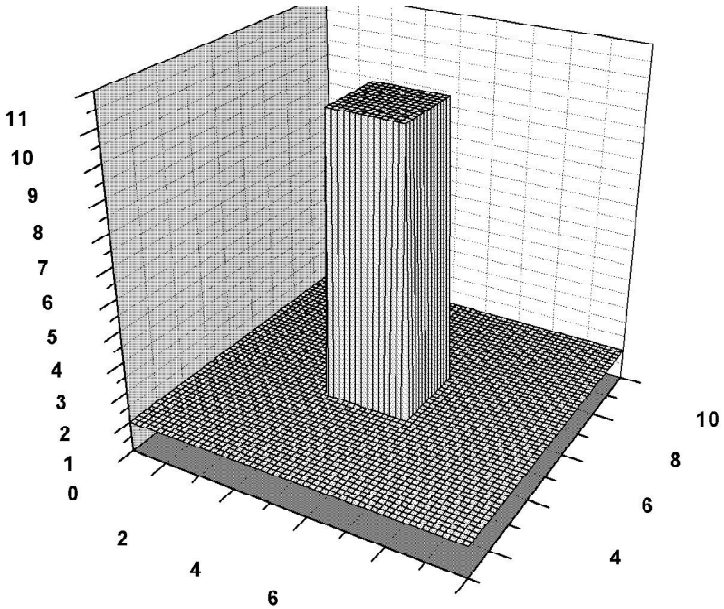


Рис. 1. Распределение  $g(x, y, z)|_{z=-10}$  в области 10 на 10 (400 на 400 точек)

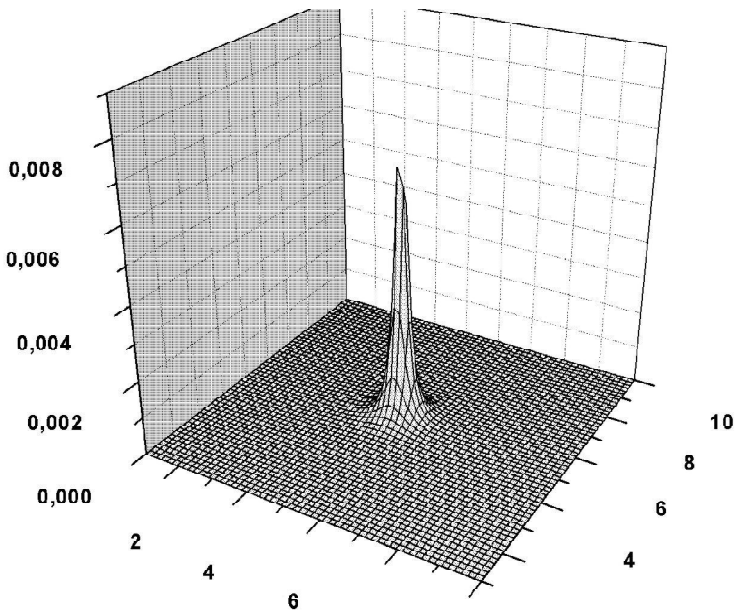


Рис. 2. Ядро уравнения

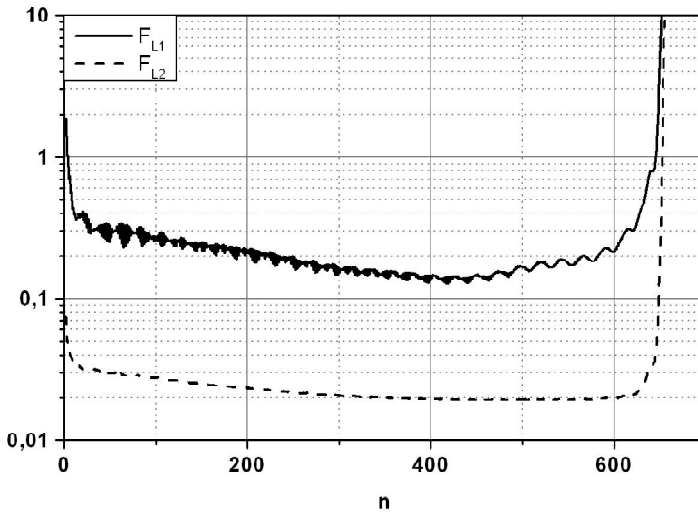


Рис. 3. Зависимости  $F_{L1}(n, m)|_{n=m}$  и  $F_{L2}(n, m)|_{n=m}$

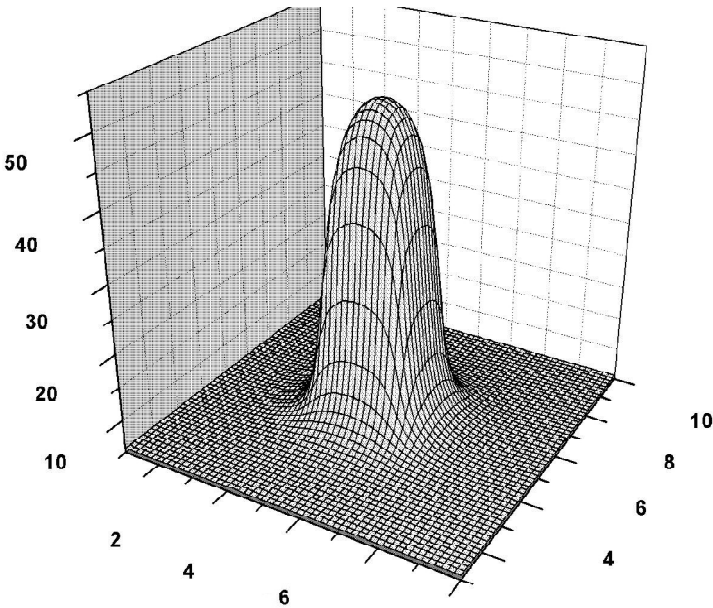
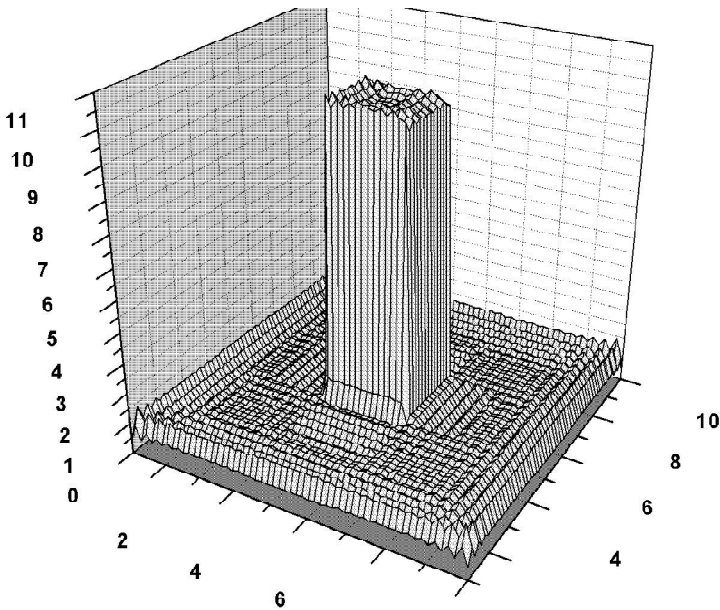


Рис. 4. Полученное распределение  $f(x, y, z)|_{z=0}$

Результат, приведенный на рис. 5, позволяет оценить пространственное разрешение метода. Полученные зависимости на рис. 3 позволяют сделать вывод о большей чувствительности к выбору  $n$  и  $m$  нормы, заданной в пространстве  $L_1$ . Как и следовало ожидать, в случае, когда  $g$  – кусочно-постоянная, в области разрывов  $g$  наблюдается явление Гиббса [9]. Для уменьшения влияния этого явления достаточно применить процедуру “сглаживания”, когда найденная функция подвергается нескольким последовательным преобразованиям, например, следующего вида:

$$g(x, y) = \frac{1}{4} \cdot (g(x + \Delta x, y) + g(x, y + \Delta y) + g(x, y - \Delta y) + g(x - \Delta x, y)) .$$

Рассмотренный случай соответствует одному объекту простейшей формы, в данном случае квадрату. Т. к. любую функцию можно аппроксимировать кусочно-постоянной, более сложные случаи можно представить в виде суперпозиции простейших объектов, аналогичных рассмотренному.



*Рис. 5. Результат решения  $g'_{n,m}$*

Следует отметить, что данный метод позволяет определять искомую функцию только в случае, когда неизвестные распределены в плоскости, параллельной плоскости измерения. Однако если исследуемые объекты нельзя отнести к одной плоскости, данный метод позволяет построить функцию аномального поля в любой плоскости, сколь угодно близкой к исследуемым объектам. Построенная функция обладает значительно более высоким пространственным разрешением и ее использование в качестве аномального поля для других методов может существенно повысить точность решения задач гравитационной и магнитометрии.

**Выводы.** На основании полученных результатов можно сделать вывод, что описанный метод позволяет существенно увеличить пространственное разрешение при решении задач гравитационной и магнитометрии. Если задача сводится к определению распределения неизвестной функции на плоскости, параллельной плоскости измерения, метод позволяет находить устойчивое решение, точность которого определяется исключительно условиями измерения (точность измерения, величина дискретного шага измерения и т. п.).

*Автор выражает глубокую признательность академику НАН Украины Виталию Ивановичу Старостенко за обсуждение изложенного материала и высказанные ценные замечания.*

1. *Anderson B.I. Barber T.D.* Induction Logging. – Schlumberger, 1996. – 45 p.
2. *Anderson B.I.* Modeling and inversion methods for the interpretation of resistivity logging tool response. – Schlumberger print, 2001. – P. 377.
3. *Кауфман А.А.* Теория индукционного каротажа. – М.: Наука, 1965. – 236 с.
4. *Старостенко В.И., Оганесян С.М.* Некорректно поставленные задачи по Адамару и их приближенное решение методом регуляризации А.Н. Тихонова // Геофиз. журн. – 2001. – **23**. – С. 3–20.
5. *Страхов В.Н.* О решении некорректных задач магнито- и гравиметрии, представляемых интегральным уравнением типа свертки. I // Физика Земли. – 1967. – № 4. – С. 36–54.
6. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1990. – 320 с.
7. *Старостенко В.И.* Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. – К.: Наук. думка, 1973. – 111 с.
8. *Свертка* // Математическая энциклопедия. – Т. 4 / под ред. Виноградова И.М. – М.: Советская энциклопедия, 1984. – 1216 с.
9. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. – Т. II. – М.: Наука, 1973. – 392 с.

**Підвищення просторової роздільної здатності під час вирішення задач гравіметрії та магнітометрії** М.Л. Миронцов

**РЕЗЮМЕ.** Запропоновано неітераційний метод розв’язання рівняння Фредгольма першого роду з ядром типу згортки. Показано, що даний метод дозволяє розв’язувати задачі гравіметрії та магнітометрії з просторовою роздільною здатністю співставною з кроком виміру аномального поля.

**Ключові слова:** Фредгольма першого роду, гравіметрія, магнітометрія.

**Improvement of spatial resolution for solving gravimetry and magnetometry problems** N.L. Myrontsov

**SUMMARY.** Non-iteration method for solving the Fredholm equation of the first kind with the kern of convolution type was proposed. It has been shown that this method allows solving gravimetry and magnetometry problems with spatial resolution comparable with the step of measurement of anomalous field.

**Keywords:** Fredholm equation of the first kind, gravimetry, magnetometry.