

УДК 539.3:532.593

# ФОКУСУВАННЯ ПРОМЕНІВ НЕПЛОСКОЇ РОЗРИВНОЇ ХВИЛІ ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ ПРУЖНОГО АНІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА

Г. М. ІВАНЧЕНКО

*Київський національний університет будівництва і архітектури**Одержано 27.03.2003*

З використанням нульового наближення променевого методу розв'язана задача про перебудову фронтів квазіпродовжніх і квазіпоперечних хвиль сильного розриву, які формуються при взаємодії неплоскої нестационарної хвилі з вільною параболічною поверхнею пружного трансверсально-ізотропного середовища. Для рішення нелінійних рівнянь Снелліуса застосовувався синтез методу продовження рішення по параметру й алгоритму Ньютона. Проаналізовані ефекти розсіювання і фокусування нестационарних хвиль як окремі випадки біфуркації фронтів і утворення каустик.

С использованием нулевого приближения лучевого метода решена задача о перестройке фронтов квазипродольных и квазипоперечных волн сильного разрыва, формирующихся при взаимодействии неплоской нестационарной волны со свободной параболической поверхностью упругой трансверсально-изотропной среды. Для решения нелинейных уравнений Снеллиуса применялся синтез метода продолжения решения по параметру и алгоритма Ньютона. Проанализированы эффекты рассеяния и фокусирования нестационарных волн как частные случаи бифуркации фронтов и образования каустик.

The problem of reorganization of fronts of quasi-primary and quasi-secondary waves of strong discontinuity formed by interaction of a non-planar non-stationary wave with a free parabolic surface of elastic transversally isotropic medium is solved with the use of zero approximation of the ray method. For solution of the nonlinear Snell's equations a synthesis of the method of continuation of solution on the parameter and the Newton's algorithm was used. The effects of scattering and focussing of non-stationary waves as special cases of the front bifurcation and formation of caustics are analyzed.

## ВСТУП

Питання математичного моделювання явищ фокусування і розсіювання нестационарних розривних хвиль поверхнями та межами розділу середовищ з різними механічними властивостями виникають у сейсмології та сейсморозвідці. Вони особливо актуальні у тих випадках, коли необхідно аналізувати напружено-деформований стан земних порід поблизу вільних поверхонь. У гірничій справі такі ситуації виникають при дослідженні міцності та стійкості гірських виробок, у будівництві – при визначенні динаміки поведінки наземних і підземних споруд під впливом сейсмічних і вибухових хвиль.

Характерна особливість згаданих явищ полягає у тому, що вони можуть супроводжуватися концентрацією механічної енергії (кінетичної й потенційної) у зонах фокусування фронтів розривних хвиль на криволінійних ділянках вільних поверхонь гірських порід та на межах порід з різними механічними властивостями. Це призводить до посилення дії таких хвиль. В оптичних системах концентрація світлової енергії відбувається у фокусних точках дзеркальних відбивачів і лінз. У теорії нестационарних хвиль у пружних середовищах явища концентрації енергії є значно складнішими,

тому що тут польові функції є векторними, а при відбитті й заломленні променів формуються нові fronti хвиль, які відрізняються за своєю поляризацією й фазами.

Зазначимо, що оскільки практично неможливо прогнозувати час і місце настання землетрусу (тим більше, запобігти йому), то надзвичайно важливо визначити для обраних регіонів найбільш небезпечні зони, у яких сейсмічна (розривна) хвиля може фокусуватися, а її енергія – концентруватися. Нестационарні розривні хвилі можуть породжуватися короткочасним високоінтенсивним полем тиску, зосередженим у малій області – джерелі хвилі. Якщо в ізотропних середовищах fronti таких хвиль по віддаленні від джерела стають сферичними, то fronti нестационарних хвиль в анізотропних середовищах можуть мати досить складну конфігурацію. Окрім того, в анізотропних середовищах інтенсивність імпульсу, який переноситься розривною хвилею, на її фронтах розподіляється нерівномірно. Оскільки межа виділеної для розрахунку області середовища еволюціонує з розповсюдженням хвильового фронту, то для аналізу таких швидкоплинних процесів виявляються малоефективними традиційні аналітичні й чисельні методи (зокрема, метод скінченних елементів). Для розв'язання таких задач раціонально засто-

совувати променеві методи [1–9], які дозволяють, використовуючи променевий ряд, одержувати досить точний розв’язок у прифронтних зонах хвилі. У цьому разі рівняння ейконалу описує еволюцію поверхні фронту хвилі, нульовий член ряду визначає величину розриву польової функції на поверхні фронту, а інші члени описують зміну поля за фронтом. Якщо для нестационарної розривної хвилі обмежитись урахуванням лише нульового члена, то можна визначити імпульс, отриманий хвилею. Тоді можливо спростити задачу і застосувати прийоми стереомеханічної теорії удару [10], які базуються на загальних теоремах механіки. Таку методику можна використовувати для дослідження взаємодії розривних хвиль з неоднорідними включеннями в ґрунтах і гірських породах, а також для дослідження перебудов фронтів нестационарних розривних хвиль на вільних поверхнях анізотропних середовищ.

**1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ**

Нехай вісь пружної симетрії нескінченно високого порядку трансверсально-ізотропного середовища співпадає з віссю  $Ox_2$  правої декартової системи координат  $Ox_1x_2x_3$ . З огляду на властивості симетрії, компоненти тензора пружних постійних середовища  $c_{ik,pq}$  можна подати у формі квадратної матриці  $(C_{\alpha,\beta})$ , встановивши відповідність між компонентами тензора й матриці за схемою [5]

$$(11) \leftrightarrow 1, \quad (22) \leftrightarrow 2, \quad (33) \leftrightarrow 3, \quad (23) = (32) \leftrightarrow 4, \quad (31) = (13) \leftrightarrow 5, \quad (12) = (21) \leftrightarrow 6. \quad (1)$$

Виходячи з того, що пружні властивості трансверсально-ізотропного середовища характеризуються п’ятьма параметрами, матрицю  $C_{\alpha,\beta}$  у вибраній системі координат запишемо у вигляді [5]

$$(C_{\alpha,\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda-l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu-p & \lambda-l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda-l & \lambda-l & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu-m \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де  $\lambda$  і  $\mu$  – параметри Ламе;  $l, m, p$  – пружні параметри анізотропії.

Нехай у деякій точці пружного середовища, яка належить осі симетрії, породжена нестационарна хвиля сильного розриву. Розглянемо дифракцію фронту такої хвилі при його взаємодії з вільною криволінійною осесиметричною поверхнею  $G$ , вісь симетрії якої також співпадає з віссю  $Ox_2$ .

Рух частинок пружного середовища визначається диференціальними рівняннями

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

де  $\lambda_{ik,pq} = c_{ik,pq} / \rho$  – зведені параметри пружності;  $\rho = \text{const}$  – щільність середовища;  $u_1, u_2, u_3$  – компоненти вектора пружних зміщень;  $t$  – час. Розв’язок системи (3) у формі сильного розриву [5], для якого на фронті хвилі мають розриви перші похідні функцій  $u_1, u_2, u_3$ , будуватимемо з використанням променевого методу [5].

В анізотропних середовищах промені, уздовж яких поширюється хвильова енергія, в загальному випадку не ортогональні до поверхонь хвильових фронтів. Тому розрізнятимемо вектори фазової  $\mathbf{v}$  й променевої  $\boldsymbol{\xi}$  швидкостей, вважаючи, що фронтом хвилі є поверхня постійної фази  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - vt = \text{const}$ , елементарна площинка якої в околі деякої точки  $M$  з радіус-вектором  $\mathbf{r}$  рухається уздовж місцевої одиничної нормалі  $\mathbf{n}$  зі швидкістю  $v$ .

Для довільно вибраного напрямку  $\mathbf{n}$  існує три величини фазових швидкостей  $v^{(r)}(\mathbf{n})$  ( $r = 1, 2, 3$ ), квадрати яких є власними числами матриці коефіцієнтів однорідної системи алгебраїчних рівнянь [5, 11]

$$\sum_{q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q - v^2 A_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Власні вектори  $\mathbf{A}^{(r)}$  цієї матриці визначають поляризацію кожної з трьох хвиль. Впорядковані за величинами фазові швидкості будуть визначати рух квазіпоzdовжньої ( $r = 1$ ) і двох квазіпоперечних ( $r = 2, 3$ ) хвиль:

$$v^{(1)}(\mathbf{n}) > v^{(2)}(\mathbf{n}) \geq v^{(3)}(\mathbf{n}) > 0.$$

Фронт кожної нестационарної розривної хвилі – поверхня постійної фази – задовольняє співвідношення

$$\tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0, \quad (5)$$

де функція  $\tau$  є розв’язком диференціального рівняння [5]

$$\sum_{i,k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \quad (6)$$

в якому через

$$p_k \equiv \frac{\partial \tau}{\partial x_k} = \frac{n_k}{v^{(r)}(\mathbf{n})}, \quad k = 1, 2, 3$$

позначено компоненти вектора рефракції.

Для побудови хвильового фронту (5) розривної хвилі в однорідному анізотропному середовищі необхідно знайти розв’язок рівнянь (6), які за допомогою методу характеристик зводяться до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$dx_k/d\tau = \xi_k = \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \quad (7)$$

$$dp_k/d\tau = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Перші три рівняння з формули (7) визначають закон розповсюдження фронту розривної хвилі уздовж променя зі швидкістю  $\xi = \xi^{(r)}(\mathbf{n}, x_k)$ , а друга трійка підтверджує прямолінійність променів в однорідних ( $\rho = \text{const}$ ) середовищах.

Побудована за допомогою останньої системи сітка променів і фронтів дозволяє визначити зміну інтенсивності хвилі при переході через фронт за допомогою ряду [5]

$$u_q = \sum_{m=0}^{\infty} u_q^{(m)}(x_1, x_2, x_3) \times f_m[t - \tau(x_1, x_2, x_3)], \quad (8)$$

$$q = 1, 2, 3.$$

Поведінку розривної хвилі в малому околі фронту можна досліджувати, утримуючи в розкладі (8) лише один член  $m=0$ . Вектор інтенсивності хвильового поля  $\mathbf{u}^{(0)}$  в цьому випадку обчислюється з однорідної системи рівнянь

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p u_q^{(0)} - u_i^{(0)} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (9)$$

розв’язок якої в променевій системі координат  $\tau, \alpha, \beta$  має вигляд [5]

$$u_q^{(0)} = \frac{c_0(\alpha, \beta) A_q^{(r)}(\tau, \alpha, \beta)}{\sqrt{J(\tau, \alpha, \beta)}} \times f_0[t - \tau(x_1, x_2, x_3)], \quad (10)$$

$$q = 1, 2, 3,$$

де  $J = \partial(x_1, x_2, x_3)/\partial(\tau, \alpha, \beta)$  – функціональний визначник перетворення променевих координат у декартові.

За допомогою співвідношень (7), (10) будується сімейство прямолінійних променів і послідовності фронту нестационарної розривної хвилі в однорідному анізотропному середовищі, а також обчислюються значення розриву польових функцій на поверхні фронту, яка еволюціонує.

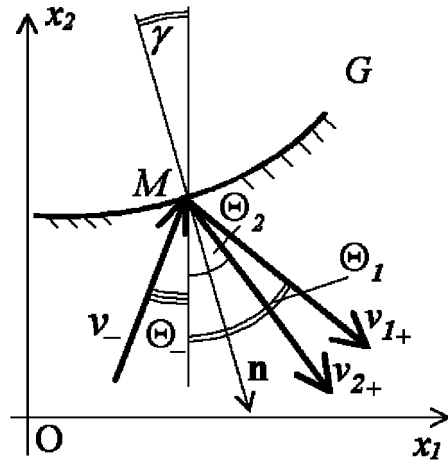


Рис. 1. Орієнтація векторів фазових швидкостей падаючої та відбитих хвиль

## 2. КІНЕМАТИЧНІ Й ДИНАМІЧНІ УМОВИ ВЗАЄМОДІЇ ХВИЛІ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Розв’язуючи поставлену осесиметричну задачу, досить обмежитись вивченням перебудови слідів фронтів розривних хвиль на одній з площин, якій належить вісь симетрії (наприклад,  $x_3=0$ ). Прийmemo “локально-плоске наближення” [5], відповідно до якого у місці падіння променя на елементарну площинку вільної поверхні  $G$  у площині падіння  $x_3=0$  промені усіх породжених хвиль також будуть належати цій площині, тобто треті компоненти векторів поляризації усіх хвиль дорівнюють нулю. Кути  $\Theta_\nu$ , ( $\nu=1, 2$ ), з якими відбиті квазіпоздовжня і квазіпоперечна хвилі відходять від вільної поверхні  $G$ , підпорядковуються узагальненому закону Снелліуса. Останній визначається рівностями [5, 11]

$$\frac{\sin(\Theta_- + \gamma)}{v_-(\Theta_-)} = \frac{\sin(\Theta_\nu - \gamma)}{v_\nu(\Theta_\nu)}, \quad \nu = 1, 2, \quad (11)$$

де  $\gamma$  – кут між напрямком осі  $Ox_2$  та нормаллю до поверхні  $G$  у точці падіння променя;  $\Theta_-$ ,  $\Theta_\nu$ , ( $\nu=1, 2$ ) – кути між напрямками хвильових нормалей падаючої та відбитих у середовище хвиль і віссю симетрії –  $Ox_2$  (рис. 1). Значення індекса  $\nu=1$  відповідає квазіпоздовжній  $qP$ -хвилі, а  $\nu=2$  – квазіпоперечній  $qS$ -хвилі. У нижньому індексі знаками “-” і “+” позначатимемо параметри хвиль до перебудови на поверхні  $G$  і після неї.

Відмінність співвідношень (11) від звичайного закону Снелліуса полягає в залежності знаменників  $v_-(\Theta_-)$  і  $v_\nu(\Theta_\nu)$  від відповідних кутів  $\Theta_-$ ,  $\Theta_\nu$ , та (неявно) від кута  $\gamma$ . Величини кутів від-

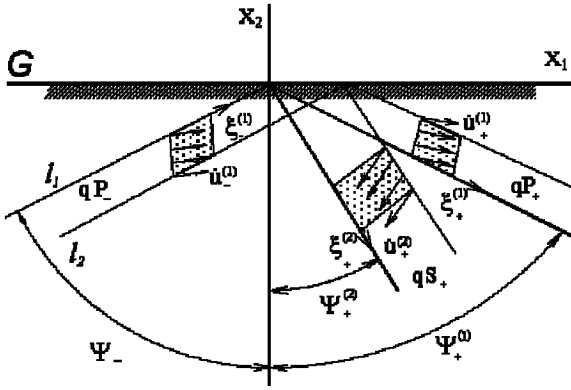


Рис. 2. Орієнтація векторів променевих швидкостей та швидкостей зміщень частинок середовища

биття променів  $\Theta_\nu$  ( $\nu=1, 2$ ) у кожній точці вільної поверхні  $G$  визначаються розв'язком нелінійної системи рівнянь (11). Для одержання конкретних числових результатів використовувались методи Ньютона і продовження розв'язку по параметру [3]. За параметр, якому надається припущення, зручно вибрати величину кута  $\gamma$ . Так, для деякого відомого стану  $\gamma = \gamma^i$ ,  $(\Theta_\nu)^i$  малому приросту ведучого параметра  $\Delta\gamma^i$  будуть відповідати зміни направляючих кутів фазових швидкостей відбитих хвиль:

$$\Delta\Theta_\nu^i = \frac{f_1\Delta\Theta_-^i - f_2\Delta\gamma}{f_3} + R, \quad (12)$$

де

$$f_1 = \sin(\Theta_\nu^i - \gamma)[\partial v_-^i(\Theta_-^i)/\partial\Theta_-] - \cos(\Theta_-^i + \gamma)v_\nu^i;$$

$$f_2 = \cos(\Theta_\nu^i - \gamma)v_-^i(\Theta_-^i) + \cos(\Theta_-^i + \gamma)v_\nu^i;$$

$$f_3 = \sin(\Theta_-^i + \gamma)[\partial v_\nu^i(\Theta_\nu^i)/\partial\Theta_\nu] - \cos(\Theta_\nu^i - \gamma)v_-.$$

Тут через

$$R = \sin(\Theta_\nu^i - \gamma)v_-^i(\Theta_-^i) - \sin(\Theta_-^i + \gamma)v_\nu^i(\Theta_\nu^i)$$

позначено нев'язку на  $i$ -му кроці побудови розв'язку. Продовження розв'язку по параметру розпочинається зі стартового стану  $\Theta=0, \gamma=0$ , в якому система (11) має тривіальний розв'язок.

Рівність нулю знаменника у співвідношенні (12) свідчить про неоднозначність розв'язку системи (11) і відповідає ефекту сходження (доторкання) й перегину відбитих променів після взаємодії падаючих променів з поверхнею  $G$  [12]. Нескінченна кількість таких критичних ситуацій обумовлює утворення огинаючої сімейства променів – каустики. У випадках анізотропних середовищ каусти-

ки можуть призводити до формування геометричних особливостей на поверхнях відбитих хвильових фронтів, навіть при взаємодії регулярного падаючого хвильового фронту з плоскою вільною поверхнею  $G$  [13,14]. Особливості хвильового фронту проявляються на каустиках, де відбувається його фокусування, яке супроводжується значним зростанням інтенсивності хвильового поля в місцях геометричних особливостей.

Динаміка взаємодії нестационарної хвилі з вільною поверхнею анізотропного пружного середовища вивчається з використанням природної крайової умови: рівності нулю вектора напружень на цій поверхні. Оскільки дослідження проводиться в рамках нульового наближення променевого методу, розв'язок задачі зручніше сформулювати в термінах розривів швидкостей елементів пружного середовища, а при формуванні умов взаємодії хвилі з вільною поверхнею – скористатись інтегральним підходом до опису динамічних процесів на фронтах взаємодіючих хвиль і застосовувати методи теорії стереомеханічного удару [10]. Крім того, при розгляді взаємодії хвиль, які мають криволінійні fronti, з криволінійною поверхнею  $G$  будемо використовувати концепцію локально-плоскої постановки.

Нехай промінь квазіпоздовжньої нестационарної  $qP_-$ -хвилі поширюється в пружному середовищі з фазовою швидкістю  $v_-$ , вектор якої утворює кут  $\Theta_-$  з віссю симетрії. У площині  $x_3=0$ , перпендикулярній до площини фронту й поверхні  $G$ , за допомогою двох променів  $l_1$  і  $l_2$  виділимо в середовищі за фронтом хвилі елемент з товщиною  $v_- \Delta t$ , де  $\Delta t$  – малий відрізок часу, який дозволяє нехтувати зміною розривних компонентів функцій поля за фронтом і вважати їх сталими (рис. 2). Це припущення не суперечить нульовому наближенню променевого методу. Промені  $l_1$  і  $l_2$  падають на поверхню  $G$  під кутом  $\Psi_-$  і спираються на ній на кінці відрізка одиничної довжини. Відстань між променями становить  $\cos\Psi_-$ .

Падіння розривної хвилі на вільну поверхню  $G$  породжує в середовищі відбиті хвилі  $qP_+$  і  $qS_+$ , які також поляризовані в площині падіння. Виділеному за допомогою двох променів елементу за фронтом падаючої хвилі будуть відповідати елементи між відповідними променями за фронтами утворених хвиль (див. рис. 2). Виходячи з інтегрального підходу в теорії розривних хвиль, який розглядає умови кінематичної сумісності й динамічного збереження на фронті хвилі [5], формулювання динамічної взаємодії всіх згаданих хвиль з вільною поверхнею  $G$  будемо проводити на базі закону збереження кількості руху відносно елемен-

тів середовища, залучених до руху.

При визначенні вектора кількості руху  $\Delta Q_-$  виділеного в падаючій хвилі елемента прийнято, що розмір усіх елементів уздовж координати  $x_3$  дорівнює одиниці, а маса одного елемента середовища становить  $\rho \xi_- \Delta t \cos \Psi_-$ . Тому вектор кількості руху буде

$$\Delta Q_- = \rho \xi_- \Delta t \cos \Psi_- \dot{u}_-$$

Після взаємодії падаючої хвилі з малою площинкою на поверхні  $G$  утворюються дві локально-плоскі відбиті хвилі. При цьому в шарах з товщинами  $v_i \Delta t$  ( $i=1, 2$ ) за фронтами компоненти функцій поля, які набули розриву (для похідних від  $u$  по нормалі і  $t$ , а також для напружень), залишаються сталими. В елементах цих шарів, утворених взаємодією з виділеним елементом падаючої хвилі (див. рис. 2), невідомі значення швидкостей частинок середовища мають позначення  $\dot{u}_+^{(1)}$ ,  $\dot{u}_+^{(2)}$  (у відбитих  $qP_+$  і  $qS_+$  хвилях), а їхні вектори кількості руху становлять

$$\Delta Q_+^{(r)} = \rho \cos \Psi_+ \xi_+^{(r)} \Delta t \dot{u}_+^{(r)}, \quad r = 1, 2. \quad (13)$$

Вектор зміщення частинок середовища за фронтом хвилі можна подати у вигляді [5]  $\mathbf{u}^{(r)} = u^{(r)} \mathbf{A}^{(r)}$ . З урахуванням цієї рівності і співвідношень виду (13) одержимо

$$\Delta Q_- = \rho \cos \Psi_- \xi_- \Delta t \dot{u}_- (A_{1-} \mathbf{i}_1 + A_{2-} \mathbf{i}_2), \quad (14)$$

$$\Delta Q_+^{(r)} = \rho \cos \Psi_+ \xi_+^{(r)} \Delta t \dot{u}_+ (A_{1+}^{(r)} \mathbf{i}_1 + A_{2+}^{(r)} \mathbf{i}_2). \quad (15)$$

Тут  $A_{1+}^{(r)}$ ,  $A_{2+}^{(r)}$  – проєкції вектора поляризації відбитої хвилі типу  $(r)$  відповідно на осі  $Ox_1$  і  $Ox_2$ .

Оскільки кількість руху елементів середовища, залучених до руху при взаємодії падаючої хвилі з вільною поверхнею  $G$ , не змінюється в результаті цієї взаємодії, умову динамічної сумісності розв'язку на площині  $G$  запишемо у вигляді

$$\Delta Q_- = \Delta Q_+^{(1)} + \Delta Q_+^{(2)}. \quad (16)$$

Вважаючи значення  $\dot{u}_-$  для падаючої хвилі відомим, після проєктування векторного рівняння (16) на осі  $Ox_1$ ,  $Ox_2$  одержимо два скалярні рівняння для визначення невідомих швидкостей зміщення частинок середовища на фронтах хвиль обох поляризацій  $\dot{u}_+^{(1)}$ ,  $\dot{u}_+^{(2)}$  поблизу вільної поверхні після взаємодії з нею. Ці рівняння можна записати у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} \rho \cos \Psi_+^{(1)} \xi_+^{(1)} A_{1+}^1 & \rho \cos \Psi_+^{(2)} \xi_+^{(2)} A_{1+}^2 \\ \rho \cos \Psi_+^{(1)} \xi_+^{(1)} A_{2+}^1 & \rho \cos \Psi_+^{(2)} \xi_+^{(2)} A_{2+}^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{u}_+^{(1)} \\ \dot{u}_+^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \Psi_- \xi_- A_{1-} \\ \rho \cos \Psi_- \xi_- A_{2-} \end{pmatrix} \dot{u}_-. \quad (17)$$

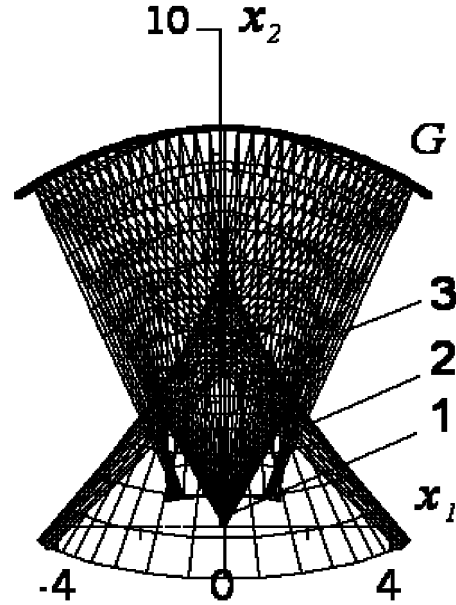


Рис. 3. Фокусування променів відбитих квазіпоздовжньої <sup>(2)</sup> і квазіпоперечної <sup>(3)</sup> хвиль при падінні неплоскої квазіпоздовжньої хвилі <sup>(1)</sup> на вільну поверхню  $G$

При обчисленні елементів матриці і коефіцієнтів лівої частини (17) враховується такий взаємозв'язок між компонентами векторів поляризації падаючої і відбитих хвиль:  $A_{1+}^{(1)} = A_{1-}^{(1)}$ ,  $A_{1+}^{(2)} = A_{1-}^{(2)}$ .

Визначені з системи (17) величини швидкостей частинок середовища надалі відіграють роль початкових умов  $\dot{u}_q^{(0)}(\alpha, \beta, 0)$  і використовуються у формулах (10) для обчислення значень розривів швидкостей на фронтах еволюціонуючих відбитих у пружне середовище хвиль.

### 3. ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ ТА АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

За допомогою розробленого алгоритму розв'язано задачу про дифракцію на вільній параболічній поверхні  $G$  трансверсально-ізотропного пружного середовища фронту квазіпоздовжньої нестационарної хвилі, яка поширюється від точкового джерела, розміщеного на осі симетрії поверхні  $G$ , що співпадає з віссю симетрії пружних властивостей середовища.

Розглядалися середовища, пружні властивості яких визначаються механічними константами  $\lambda = 3.409 \cdot 10^9$  Па,  $\mu = 1.364 \cdot 10^{10}$  Па,  $\rho = 2.760 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Значення параметрів анізотропії були вибрані такими:  $l = 0.1\lambda$ ,  $m = 0.2\mu$ ,  $p = 0.1(\lambda + 2\mu)$ . Лінії перетину вільної поверхні

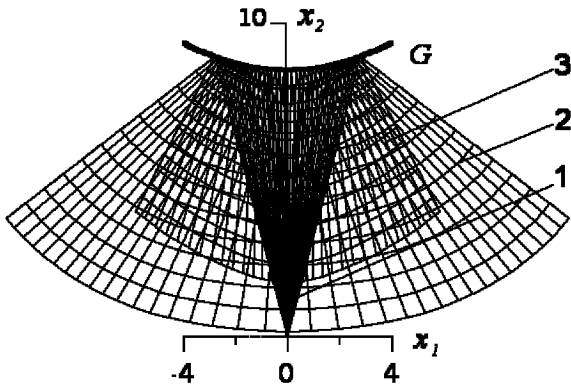


Рис. 4. Розсіювання променів відбитих квазіпоздовжньої (2) й квазіпоперечної (3) хвиль при падінні неплоскої квазіпоздовжньої хвилі (1) на вільну поверхню  $G$

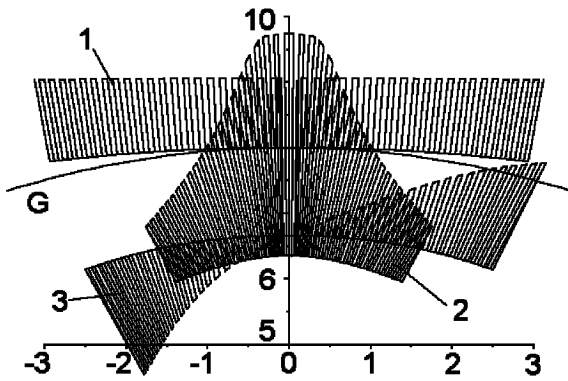


Рис. 5. Епюри полів швидкостей зміщення на фронтах падаючої поздовжньої (1) й відбитих квазіпоздовжньої (2) та квазіпоперечної (3) хвиль

з площиною  $x_3=0$  вважались параболічними:  $x_2 = \pm 0.055x_1^2 + 4$ . Джерело розривної хвилі в усіх випадках розміщувалось на початку координат.

При взаємодії розривної хвилі з опуклою вільною поверхнею  $G$  (рис. 3) розглянутого середовища падаюча квазіпоздовжня хвиля (1) породжує відбиті квазіпоздовжню (2) і квазіпоперечну (3) хвилі. При цьому промені квазіпоздовжньої хвилі фокусуються, а квазіпоперечної – утворюють каустики і формують зону фокусування поза полем рисунка. При певних геометричних і механічних умовах квазіпоперечна хвиля може розсіюватись такою поверхнею. Зміна параметрів анізотропії призводить до перебудови геометрії променів – фокусування може проявлятися не так чітко. Наявність зон фокусування відбитих променів і величина фокусної відстані залежать не лише від па-

раметрів пружності середовища, а й від геометрії поверхні  $G$ . Зазначимо, що термін “фокусна відстань” тут можна використовувати лише умовно, оскільки точного фокусування променів у загальному випадку немає.

Увігнута вільна поверхня (рис. 4) трансверсально-ізотропного середовища з тими ж механічними характеристиками у випадку падіння квазіпоздовжньої хвилі (1) не фокусує промені відбитої квазіпоздовжньої хвилі (2), а розсіює їх. Однак квазіпоперечна хвиля (3) і в цьому випадку має особливість, яка проявляється на променях поблизу осі симетрії.

Інтенсивність розривних хвиль у пружному середовищі характеризується миттєвою зміною швидкості зміщення частинок середовища при переході через поверхню фронту. На рис. 5 вона показана у вигляді побудованих в одному масштабі епюр на фронтах відбитих квазіпоздовжньої (2) і квазіпоперечної (3) хвиль, зафіксованих в один момент часу. Для порівняння, інтенсивність падаючої квазіпоздовжньої хвилі стиску (1) показана для фронту, який досяг би вершини умовної поверхні  $G$  у безмежному середовищі. Відбита квазіпоперечна хвиля (2) змінює свою фазу на протилежну і при наближенні до зони фокусування набуває такої швидкості зміщення частинок середовища, модуль якої значно перевищує величину інтенсивності падаючої хвилі. У той же час, квазіпоперечна хвиля (3) виявляється косиметричною, причому її інтенсивність зростає з віддаленням від осі симетрії. В місцях фокусування променів чи утворення каустик інтенсивність розривних хвиль (у межах прийнятої ідеалізації) повинна стрімко зростати.

## ВИСНОВКИ

Фронти нестационарних розривних хвиль, породжених точковим джерелом у трансверсально-ізотропних середовищах, мають складну конфігурацію. Інтенсивність імпульсу, який переноситься ними, розподіляється по фронту нерівномірно. Взаємодія розривної хвилі з вільною поверхнею середовища спричиняє виникнення відбитих квазіпоздовжньої та квазіпоперечної хвиль. Опукла вільна поверхня середовища фокусує або розсіює відбиті квазіпоздовжні хвилі. При цьому розташування й величина зони фокусування залежать від механічних параметрів середовища, геометрії вільної поверхні й розміщення джерела хвилі. Квазіпоперечна хвиля на опуклій поверхні має особливості і також може розсіюватись. Увігнута поверхня трансверсально-ізотропного середовища

завжди розсіює як квазіпоздовжні, так і квазіпоперечні хвилі. В місцях фокусування променів та на каустиках інтенсивність імпульсу хвилі значно зростає за рахунок її концентрації.

1. Гуляев В. И., Иванченко Г. М. Фокусировка и рассеивание плоских ударных волн на поверхности границы раздела упругих сред // Прикл. мех. техн. физ.– 2000.– 41, N 1.– С. 21–27.
2. Гуляев В. И., Иванченко Г. М., Яковенко Е. В. Динамическое взаимодействие плоской ударной волны с плоскостью раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Акуст. вісн.– 2001.– 4, N 2.– С. 29–37.
3. Гуляев В. И., Луговой П. З., Иванченко Г. М., Яковенко Е. В. Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. мат. мех.– 2000.– 64, N 3.– С. 394–402.
4. Иванченко Г. М. Излучение нестационарных волн от эллиптической полости в трансверсально-изотропной упругой среде // Прикл. мех.– 2002.– 38, N 4.– С. 30–36.
5. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах.– Л.: Наука, 1980.– 280 с.
6. Подильчук Ю. Н., Рубцов Ю. К. Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн.– К.: Наукова думка, 1988.– 220 с.
7. Gulyayev V. I., Ivanchenko G. M. Discontinuous wave interaction with interfaces between anisotropic elastic media // Int. J. Solids Struct.– 2003.– 40, N 4.– P. 237–247.
8. Hanyda A., Serebrynska M. Asymptotic ray theory in poro- and viscoelastic media // Wave Motion.– 1999.– 30.– P. 175–195.
9. Shuvalov A. L., Gorkunova A. S. Cutting-off at reflection-transmission of acoustic waves in anisotropic media with sliding-contact interface // Wave Motion.– 1999.– 30.– P. 345–365.
10. Гольдсмит В. Удар. Теория и механические свойства.– М.: Наука, 1965.– 456 с.
11. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах.– М.: Наука, 1965.– 386 с.
12. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений.– М.: Наука, 1969.– 527 с.
13. Арнольд В. И. Критические точки функций и классификация каустик // Успехи мат. наук.– 1974.– 29,3.– С. 243–244.
14. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред.– М.: Наука, 1980.– 304 с.