



УДК 539.3

А. М. Багно

## О дисперсии волн в упругом слое, несущем вязкий жидкий слой

(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)

*На основе трехмерных линеаризованных уравнений Навье–Стокса для вязкой жидкости и линейных уравнений классической теории упругости для упругого слоя построены дисперсионные кривые и исследовано распространение акустических волн в широком диапазоне частот. Проанализировано влияние вязкости жидкости, толщин упругого и жидкого слоев на фазовые скорости и коэффициенты затухания мод как для тонкого, так и для толстого упругих слоев.*

**Ключевые слова:** дисперсия волн, упругий слой, вязкий жидкий слой.

Волны, распространяющиеся вдоль границы контакта упругого слоя и слоя жидкости, относятся к числу обобщений основательно исследованных основных типов поверхностных волн Рэлея, Стоунли, Лява и Лэмба. Обзор работ и анализ результатов, полученных в рамках классической теории упругости и модели идеальной сжимаемой жидкости, приведены в [1, 2]. Вместе с тем, значительное практическое использование акустических волн требует учета свойств, которые присущи реальным средам. К числу таких факторов относится вязкость жидкости. Рассмотренные задачи и результаты, полученные с учетом этого свойства жидкости, приведены в [3–9]. В настоящей работе для исследования распространения волн в слое жидкости, взаимодействующем с упругим слоем, применяется модель вязкой сжимаемой ньютоновской жидкости. При этом используются трехмерные линеаризованные уравнения Навье–Стокса для жидкости и линейные уравнения классической теории упругости для твердого тела. Предполагается, что жидкость находится в состоянии покоя и тепловые эффекты не учитываются. В качестве подхода выбраны постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости и упругого тела, полученные в работах [4, 6–8, 10–12].

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о распространении акустических волн в гидроупругой системе, состоящей из упругого слоя и слоя вязкой сжимаемой жидкости. Решение получим с привлечением трехмерных линейных уравнений классической теории

упругости для твердого тела и линеаризованных уравнений Навье–Стокса для жидкости, находящейся в состоянии покоя. В рамках принятых моделей основные соотношения для системы упругое тело — вязкая сжимаемая жидкость будут иметь вид:

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0, \quad \sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right) + \lambda \delta_{ij}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}); \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu^* \Delta \vec{v} + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p - \frac{1}{3} \nu^* \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2, \quad a_0 = \text{const};$$

$$p_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \mu^* \left( \frac{\partial v_i}{\partial v_j} + \frac{\partial v_j}{\partial v_i} \right), \quad \lambda^* = -\frac{2}{3} \mu^*. \quad (3)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $u_i$  — компоненты вектора перемещений упругого тела;  $\rho$  — плотность материала упругого слоя;  $\lambda$  и  $\mu$  — константы Ламе материала твердого тела;  $v_i$  — составляющие вектора возмущений скорости жидкости;  $\rho^*$  и  $p$  — возмущения плотности и давления в жидкости;  $\nu^*$  и  $\mu^*$  — кинематический и динамический коэффициенты вязкости жидкости;  $\rho_0$  и  $a_0$  — плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя;  $p_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$  — составляющие напряжений соответственно в жидкости и упругом теле.

Равенства (1) описывают поведение упругого тела. Малые колебания вязкой сжимаемой жидкости, находящейся в состоянии покоя и без учета тепловых эффектов, описывают соотношения (2), (3).

Далее предположим, что упругий слой заполняет объем  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $-h_2 \leq z_2 \leq 0$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$  и контактирует со слоем вязкой сжимаемой жидкости, занимающим объем  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $0 \leq z_2 \leq h_1$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$ . Будем считать, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси  $0z_3$ . Поскольку в этом случае волна, бегущая в направлении оси  $0z_1$ , и возмущения, ее вызывающие, не зависят от переменной  $z_3$ , то задача будет плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости  $0z_1z_2$ . Следовательно, указанная задача сводится к решению системы уравнений (1)–(3) при таких граничных условиях:

$$p_{21}|_{z_2=0} = \sigma_{21}|_{z_2=0}, \quad p_{22}|_{z_2=0} = \sigma_{22}|_{z_2=0}, \quad v_1|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{z_2=0}, \quad v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{z_2=0}; \quad (4)$$

$$\sigma_{21}|_{z_2=-h} = 0, \quad \sigma_{22}|_{z_2=-h} = 0, \quad p_{21}|_{z_2=h} = 0, \quad p_{22}|_{z_2=h} = 0. \quad (5)$$

В дальнейшем для решения задачи гидроупругости воспользуемся представлениями общих решений для упругих тел и вязкой сжимаемой жидкости, предложенными в работах [4, 6–8, 10–12]

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}, \quad u_2 = \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi_1; \quad (6)$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_2 \partial t}, \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_1 \partial t}, \quad (7)$$

где введенные потенциалы  $\chi_i$  являются решениями следующих уравнений:

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0; \quad (8)$$

$$\left[ \left( 1 + \frac{4\nu^*}{3a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \nu^* \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \right] \chi_3 = 0. \quad (9)$$

Для анализа распространения возмущений, гармонично изменяющихся во времени, решения системы уравнений разыскиваются в классе бегущих волн

$$\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)], \quad j = \overline{1, 3}, \quad (10)$$

где  $k$  ( $k = (\beta + i\gamma)$ ) — волновое число;  $\gamma$  — коэффициент затухания волны;  $\omega$  — круговая частота.

Заметим, что выбранный в данной работе класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, не ограничивает общности полученных результатов, поскольку линейная волна произвольной формы, как известно, может быть представлена набором гармонических составляющих. Далее решаются две задачи Штурма–Лиувилля на собственные значения для уравнений движения упругого тела и жидкости, а также находятся соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (4) и (5) получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования. Исходя из условия существования нетривиального решения, приравнявая определитель системы к нулю, получаем дисперсионное уравнение

$$\det \left\| e_{mn} \left( c, \gamma, \lambda, \mu, \rho, \rho_0, a_0, \mu^*, \frac{\omega h_1}{c_s}, \frac{\omega h_2}{c_s} \right) \right\| = 0, \quad m, n = \overline{1, 8}, \quad (11)$$

где  $c$  — фазовая скорость мод в гидроупругой системе;  $h_1$  — толщина слоя жидкости;  $h_2$  — толщина упругого слоя;  $c_s$  ( $c_s^2 = \mu/\rho$ ) — скорость волны сдвига в упругом теле.

Как известно, в неограниченном сжимаемом упругом теле существуют продольная и поперечная волны. В идеальной сжимаемой жидкой среде распространяется только продольная волна. В вязкой сжимаемой жидкости существует как продольная волна, так и волна сдвига. Именно эти волны, взаимодействуя между собой на свободных граничных поверхностях, а также на поверхностях контакта сред, порождают сложное волновое поле в гидроупругой системе. Заметим, что особенность распространения возмущений в гидроупругом волноводе указанной структуры обусловлена наличием в упругом теле и жидкости граничных поверхностей. Это значительно усложняет картину волнового поля в нем. Причиной этого является то, что в формировании поля в гидроупругой системе существенную роль играет не только наличие жидкости и взаимодействие волн с поверхностью упругого тела, контактирующего с жидкой средой, но и наличие свободных границ и их взаимовлияние. Взаимодействие продольных и сдвиговых волн на граничных поверхностях приводит к возникновению в гидроупругом волноводе довольно сложного спектра мод.

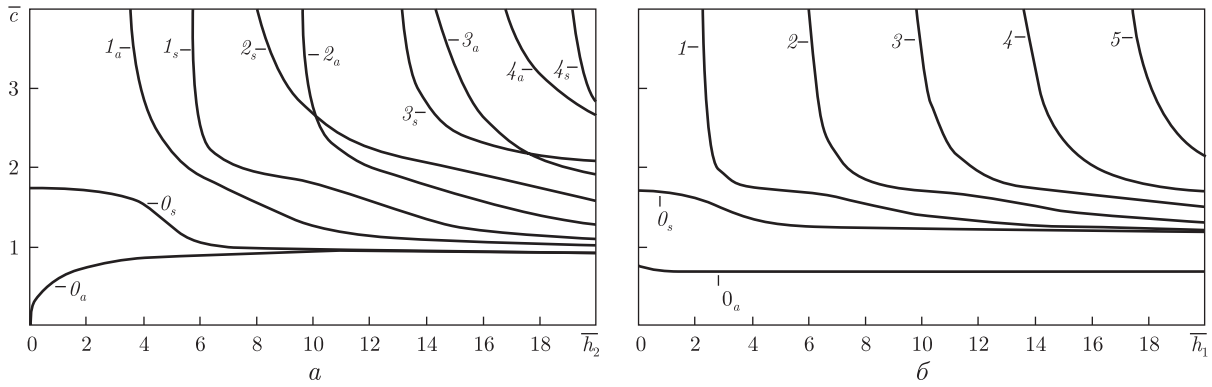


Рис. 1

Заметим, что полученное дисперсионное уравнение (11) является наиболее общим и из него можно получить соотношения для ряда частных случаев, которые рассмотрены в работах [1–3, 5]. В частности, если  $a_0$  устремить к бесконечности, то (11) переходит в уравнение для определения параметров мод в случае взаимодействия с вязкой несжимаемой жидкостью. Если  $\mu^*$  положить равным нулю, то из (11) получим результаты для гидроупругой системы с идеальной жидкостью. При  $\rho_0 = 0$  равенство (11) перейдет в уравнение для определения скоростей волн Лэмба [1, 2]. Если дополнительно устремить  $h_2$  к бесконечности, получим соотношение для определения скоростей поверхностных волн Рэлея [1, 2]. При  $\rho_0 \neq 0$  и  $h_1 \rightarrow \infty$  равенство перейдет в уравнение Стоунли [1, 2].

**Анализ численных результатов.** В дальнейшем дисперсионное уравнение (11) решалось численно. При этом расчеты проводились для системы органическое стекло — вода, которая характеризовалась следующими параметрами: упругий слой —  $\rho = 1160 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda = 3,96 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ,  $\mu = 1,86 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ; слой жидкости —  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$ ,  $\bar{\mu}^* = 0,001$ .

Результаты вычислений представлены на рис. 1–3.

На рис. 1, а для упругого слоя, не взаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = c/c_s$ ) от безразмерной величины толщины упругого слоя  $\bar{h}_2$  ( $\bar{h}_2 = \omega h_2/c_s$ ). Номерами  $n_a$  обозначены антисимметричные моды, а  $n_s$  — соответственно симметричные.

На рис. 1, б представлены дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей мод  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = c/c_s$ ) от безразмерной величины толщины слоя вязкой сжимаемой жидкости  $\bar{h}_1$  ( $\bar{h}_1 = \omega h_1/c_s$ ) для тонкого упругого слоя толщиной  $\bar{h}_2 = 2$ .

Из графиков, представленных на рис. 1, а, следует, что скорость нулевой антисимметричной моды Лэмба при росте толщины упругого слоя (частоты) стремится к скорости волны Рэлея снизу, а скорость нулевой симметричной моды стремится к скорости волны Рэлея сверху. Скорости всех высших мод Лэмба при увеличении толщины упругого слоя (частоты) стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела [1, 2].

Графики, приведенные на рис. 1, б, показывают, что при росте толщины вязкого жидкого слоя  $\bar{h}_1$  скорость нулевой антисимметричной моды  $0_a$  стремится к величине, которая меньше скорости волны Стоунли. Скорости нулевой симметричной моды  $0_s$  и всех высших мод 1–5, порождаемых слоем жидкости, стремятся к скорости распространения звука в жидкой среде.

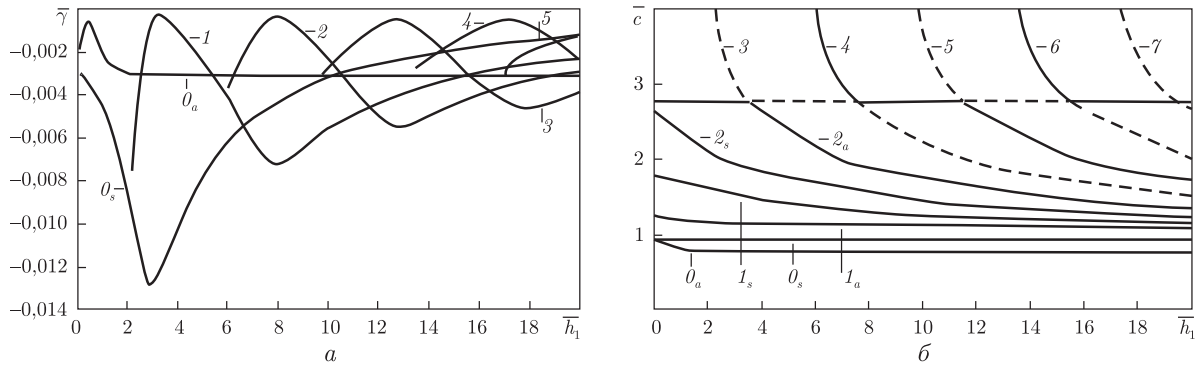


Рис. 2

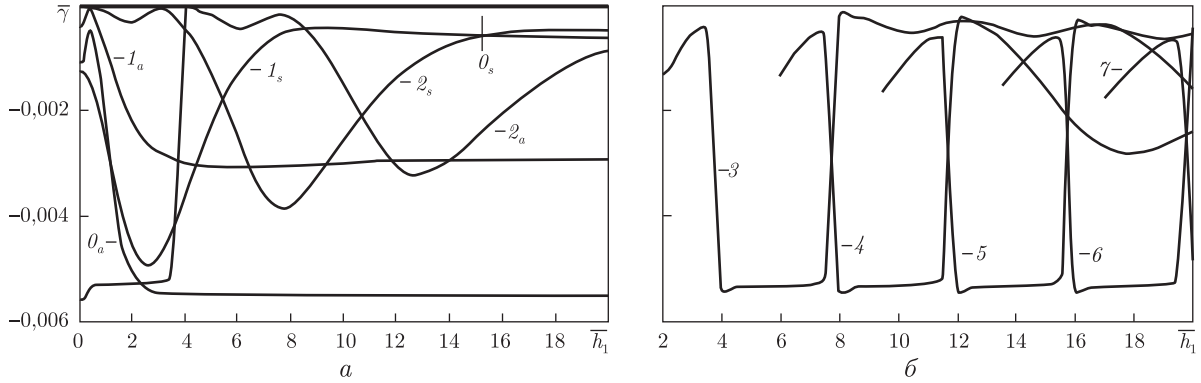


Рис. 3

На рис. 2, а приведены зависимости безразмерных величин коэффициентов затухания мод  $\bar{\gamma}$  ( $\bar{\gamma} = \gamma/k_s$ ,  $k_s$  — волновое число волны сдвига в материале упругого слоя) от безразмерной величины толщины слоя вязкой жидкости  $\bar{h}_1$  для упругого слоя толщиной  $\bar{h}_2 = 2$ .

Дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей мод  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины слоя вязкой сжимаемой жидкости  $\bar{h}_1$  для толстого упругого слоя толщиной  $\bar{h}_2 = 10$  представлены на рис. 2, б.

Из графического материала рис. 2, а непосредственно следует, что для всех мод существуют жидкие слои определенной толщины и определенные частоты, при которых моды распространяются как с наименьшим, так и с наибольшим затуханием.

Графики для гидроупругой системы, которые приведены на рис. 2, б для случая толстого упругого слоя с  $\bar{h}_2 = 10$ , показывают, что при росте толщины жидкого вязкого слоя скорость нулевой антисимметричной моды стремится к скорости волны Стоунли, распространяющейся вдоль границы контакта сред, а скорость нулевой симметричной моды — к скорости волны Рэлея на свободной поверхности упругого слоя. При увеличении толщины жидкого слоя скорость первой антисимметричной моды стремится к скорости волны, величина которой меньше скорости распространения звука в жидкости. Фазовые скорости всех мод высокого порядка стремятся к скорости распространения звука в жидкой среде.

На рис. 3, а, б приведены зависимости безразмерных величин коэффициентов затухания мод  $\bar{\gamma}$  от безразмерной величины толщины слоя вязкой жидкости  $\bar{h}_1$  для толстого упругого слоя толщиной  $\bar{h}_2 = 10$ , откуда следует существование для всех мод жидких слоев опреде-

ленной толщины и определенных частот, при которых величины коэффициентов затухания мод принимают как минимальное, так и максимальное значение. Вместе с тем, в отличие от тонкого упругого слоя для гидроупругого волновода с толстым упругим слоем для мод  $3-7$ , порождаемых жидкой средой, существуют не только определенные частоты, но и интервалы частот, при которых моды распространяются как с наименьшим, так и наибольшим затуханием.

Приведенный графический материал непосредственно свидетельствует о том, что в гидроупругом волноводе с выбранными механическими параметрами системы [3] и твердым слоем произвольной заданной фиксированной толщины  $\bar{h}_2$  при увеличении толщины жидкого слоя  $\bar{h}_1$  все моды локализируются и распространяются в упругом слое.

## Цитируемая литература

1. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – Москва: Наука, 1981. – 288 с.
2. Кузнецов С. В. Волны Лэмба в анизотропных пластинах (обзор) // Акустич. журн. – 2014. – **60**, № 1. – С. 90–100.
3. Волкешштейн М. М., Левин В. М. Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела // Там же. – 1988. – **34**, № 4. – С. 608–615.
4. Гузь А. Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости. – Киев: А. С. К., 1998. – 350 с.
5. Bagno A. M., Guz A. N. Elastic waves in pre-stressed bodies interacting with a fluid (survey) // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, No 6. – P. 435–463.
6. Guz A. N. Compressible, viscous fluid dynamics (review). Part 1 // Ibid. – 2000. – **36**, No 1. – P. 14–39.
7. Guz A. N. The dynamics of a compressible viscous liquid (review). Part II // Ibid. – 2000. – **36**, No 3. – P. 281–302.
8. Guz A. N. Dynamics of compressible viscous fluid. – London: Cambridge Sci. Publ., 2009. – 428 p.
9. Ottenio M., Destrade M., Ogden R. W. Acoustic waves at the interface of a pre-stressed incompressible elastic solid and a viscous fluid // Int. J. of Nonlinear Mech. – 2007. – **42**, No 2. – P. 310–320.
10. Guz A. N. Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses // Int. Appl. Mech. – 1980. – **16**, No 3. – P. 175–190.
11. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2-х томах. – Киев: Наук. думка, 1986.
12. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: А. С. К., 2004. – 672 с.

## References

1. Viktorov I. A. Sound surface waves in solids, Moscow: Nauka, 1981 (in Russian).
2. Kuznetsov S. V. Acoustic J., 2014, **60**, No 1: 90–100 (in Russian).
3. Volkenstein M. M., Levin V. M. Acoustic J., 1988, **34**, No 4: 608–615 (in Russian).
4. Guz A. N. Dynamics of compressible viscous fluid, Kiev: A. S. K., 1998 (in Russian).
5. Bagno A. M., Guz A. N. Int. Appl. Mech., 1997, **33**, No 6: 435–463.
6. Guz A. N. Int. Appl. Mech., 2000, **36**, No 1: 14–39.
7. Guz A. N. Int. Appl. Mech, 2000, **36**, No 3: 281–302.
8. Guz A. N. Dynamics of compressible viscous fluid, Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009.
9. Ottenio M., Destrade M., Ogden R. W. Int. J. of Non-Linear Mech, 2007, **42**, No 2: 310–320.
10. Guz A. N. Int. Appl. Mech., 1980, **16**, No 3: 175–190.
11. Guz A. N. Elastic waves in bodies with initial stresses. In 2 vols., Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
12. Guz A. N. Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses, Kiev: A. S. K., 2004 (in Russian).

Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 15.12.2014

О. М. Багно

## Про дисперсію хвиль у пружному шарі, який несе в'язкий рідкий шар

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

*На основі тривимірних лінеаризованих рівнянь Нав'є–Стокса для в'язкої рідини та лінійних рівнянь класичної теорії пружності для пружного шару побудовано дисперсійні криві та досліджено поширення акустичних хвиль у широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив в'язкості рідини, товщини пружного та рідкого шарів на фазові швидкості та коефіцієнти згасання мод як для тонкого, так і для товстого пружних шарів.*

**Ключові слова:** дисперсія хвиль, пружний шар, в'язкий рідкий шар.

O. M. Bahno

## On the dispersion of waves in an elastic layer carrying the layer of a viscous fluid

S. P. Tymoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

*On the base of the three-dimensional linearized Navier–Stokes equations for a viscous fluid and the linear equations of classical theory of elasticity for an elastic layer, the dispersion curves are constructed, and the propagation of acoustic waves within the wide range of frequencies is studied. An effect of the viscosity of a fluid, the thicknesses of elastic and fluid layers on the phase velocities and the attenuation coefficients of modes are analyzed for both thin and thick elastic layers.*

**Keywords:** dispersion of waves, elastic layer, viscous fluid layer.